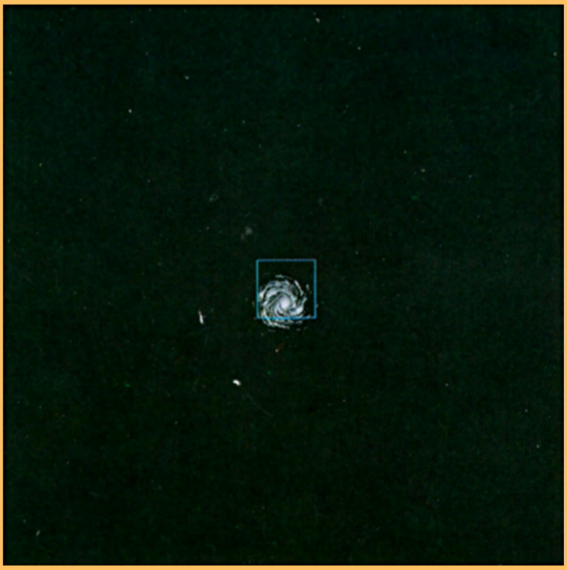


10^{22} m

GALÁXIAS INFINITA HALOS INFINITESIM

O que é o infinitamente grande? O que é o infinitamente pequeno? Como podemos pensar com eles?

JORGE BUESCU
Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico
jbuescu@math.ist.utl.pt

JOÃO PAULO TEIXEIRA
Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico
jteix@math.ist.utl.pt

O problema das ordens de grandeza e escalas coloca-se em Matemática com uma importância ao nível dos fundamentos, como provavelmente em nenhuma outra ciência. Questões como "O que é o infinitamente grande? O que é o infinitamente pequeno? Como podemos pensar com eles?" deixam, na Matemática, de ser perguntas metafísicas para estarem na base do Cálculo Infinitesimal e da própria Matemática. E, como é claro, não estamos a falar sobre o modo como se transformam os objectos matemáticos a escalas mais finas ou mais grosseiras, mas sim a escalas *infinitamente pequenas* (infinitesimais) ou infinitamente grandes. É a Matemática para além de todas as escalas!

A introdução dos infinitésimos, grandezas "infinitamente pequenas", ou seja, positivas mas menores do que qualquer real positivo, bem como dos "infinitamente grandes", deu-se com a formulação do Cálculo Infinitesimal no século XVII, na versão de Leibniz. Na ideia de Leibniz, um integral é uma soma infinita de parcelas infinitamente pequenas, e uma derivada um quociente de acréscimos infinitesimais. É uma abordagem extremamente intuitiva que ainda hoje se preserva quer na notação de Leibniz para derivadas e integrais quer – sobretudo – na maneira de pensar o Cálculo.

Para exemplificar a derivada sob o ponto de vista infinitesimal, vejamos um exemplo: a definição de velocidade instantânea para o movimento unidimensional de uma partícula. Admitindo que a posição da partícula é dada por $s(t)$, a sua velocidade média no intervalo de tempo

MENTE GRANDES, AIS

[$t,t+h$] é dada por

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

A velocidade instantânea pode obter-se tomando h infinitesimal, desenvolvendo o numerador e desprezando neste quociente termos "infinitesimais", isto é, que envolvam h.

As ideias de números infinitesimal e infinitamente grande de Leibniz revelaram-se de extrema importância para a explosão e florescimento simultâneas do Cálculo e da Mecânica Clássica no século XVIII. De resto, não é por acaso que os grandes nomes deste período – Euler, os Bernoulli, Lagrange, Laplace, etc. – são simultaneamente grandes físicos e grandes matemáticos. Por exemplo, em todos os trabalhos que envolvem séries ou produtos infinitos, Euler, "o Mestre de todos nós" nas palavras de Lagrange, não tem qualquer problema em deduzir identidades para n finito e argumentar "tomando agora n infinitamente grande, esta grandeza está infinitamente próxima de…". E, como sabemos, os resultados a que Euler chegou estavam correctos.

As primeiras objecções ao Cálculo Infinitesimal surgiram no âmbito das ferozes discussões ideológicas que permearam o século das luzes. Por esta ocasião, a ciência e o conhecimento "racional" iniciaram um aceso combate (que ainda hoje perdura…) por um espaço e influência culturais que entrava em colisão com o monopólio cultural das doutrinas religiosas. Em 1734, o Bispo Berkeley tomou em mãos a tarefa de provar que o Cálculo tinha fundamentos tão pouco racionais como os da própria religião. Assinalava ele em "O Analista – Sermão a um matemático infiel" que um incremento h, por mais pequeno que fosse, não poderia ser ignorado, sob o risco de se mergulhar toda a Matemática no "vazio absoluto, escuridão e confusão". Se h fosse zero, como se poderia passar o tempo a dividir por h? Se fosse diferente de zero, como ignorá-lo no final dos cálculos? Berkeley termina o seu sermão com a famosa afirmação de que os infinitésimos não são, afinal, mais do que "fantasmas de quantidades desaparecidas"!

Mas os físicos e matemáticos do século XVIII não se deixaram perturbar. O Cálculo Infinitesimal funcionava, era intuitivo, produzia a Mecânica do Contínuo e a explosão da Física Teórica. Esta tradição prolongou-se por muito do século XIX; o próprio Cauchy, um dos mestres do rigor fundacional da Análise, utilizou durante muito tempo infinitésimos.

No entanto, as críticas de Berkeley permaneceram sem resposta eficaz. A batalha pelo rigor na Análise é travada em meados do século XIX e emerge vitoriosa da Alemanha, sob a batuta de Weierstrass. Os números reais são axiomatizados e demonstra-se que, no âmbito dessa axiomática, não há lugar para infinitésimos nem infinitamente grandes. Estes vêem-se subitamente relegados para um lugar de segundo plano: o de uma abordagem tão intuitiva quanto ingénua da ideia de limite, sobre a qual a Análise passa a ser fundamentada. É o triunfo do rigor sobre a intuição. A definição de derivada passa a ser

$$\varepsilon > 0 \quad \delta > 0 \quad h > 0 \quad 0 < |h| < \delta$$

$$\left| \frac{s(x+h) - s(x)}{h} - \frac{ds}{dx}(x) \right| < \varepsilon.$$

Os infinitésimos e infinitamente grandes são erradicados da Matemática; cem anos depois de Weierstrass, nenhum texto sério de Análise os refere. Até dos nomes das cadeiras universitárias de Análise o adjectivo "Infinitesimal" está hoje banido (ao contrário do que acontecia há 20 anos).

No entanto… quase apetece dizer, inspirando-nos em Galileu, "no entanto eles existem"! A tradição dos infinitésimos manteve-se – não no campo dos matemáticos (o rigor não o permitiria) – mas no campo dos *utilizadores da Matemática*. Físicos, matemáticos aplicados, engenheiros continuam a pensar "como se" eles existissem. Ouçamos por exemplo Feynman nas suas *Lectures* *on Physics:* "Any volume can be thought of as completely made up of truncated cones. The flux of E from one end of each conical segment is equal and opposite to the flux from the other end. The total flux from the surface *S* is therefore zero". Feynman demonstra a Lei de Gauss da Electrostática com elementos de volume infinitesimais. E funciona!

Este fenómeno continua a gerar uma tensão permanente entre matemáticos puros, por um lado, e físicos, matemáticos aplicados e engenheiros, por outro. Os primeiros acusam os segundos de falta de rigor nos seus raciocínios "à século XVIII", censurando-os por não utilizarem argumentos ε-δ *à la Weierstrass.* Os mais radicais chegam a falar de laxismo intelectual. Os segundos acusam os primeiros de não olharem para o mundo real. Os argumentos infinitesimais *funcionam e dão sempre o resultado correcto, desde que bem aplicados!* O que interessa se não temos a bênção da irmandade matemática para os utilizar? Os fenómenos físicos são demasiado complexos; temos de pensar neles com intuição, tentando compreender o que se passa, e não perdermo-nos num oceano de δ's e ε's. Os mais radicais chegam a falar de pedantismo intelectual.

É uma pena que estas duas comunidades vivam de costas voltadas uma para a outra. Esta discussão é completamente estéril. Desde os anos 60 do século passado que os infinitésimos e os infinitamente grandes estão de regresso à Matemática – e desta vez pela porta grande, satisfazendo todos os requisitos do rigor matemático. Esta porta foi aberta pelo matemático Abraham Robinson.

Fig.1. Abraham Robinson.

Robinson, um brilhante lógico matemático, tinha estudado Engenharia na sua juventude. Durante a Segunda Guerra Mundial, trabalhou na indústria aeronáutica inglesa. Talvez daí tenha vindo a sua convicção acerca da validade dos raciocínios envolvendo infinitésimos; há, no campo da aeronáutica, uma enorme tradição no uso destes conceitos – por exemplo, a noção de camada-limite, usada no estudo e projecto das asas dos aviões. Nos anos 60, nos Estados Unidos, Robinson criou a Análise Não-Standard – disciplina na intersecção entre a Lógica Matemática e a Análise que se debruça sobre a construção e o uso de estruturas matemáticas com propriedades que se prestam, por exemplo, à fundamentação da Análise Infinitesimal. No seu livro "Non-Standard Analysis", Robinson responde a todas as objecções de Berkeley através da criação de uma estrutura – os números hiper-reais, cujo conjunto é designado por *R –– que é uma extensão da estrutura dos números reais R. Ao contrário de R, *R, possui infinitésimos: um número hiper-real *h* diz-se infinitesimal se $|h|<r$, para qualquer número real *r*.

Tendo definido este novo conjunto dos hiper-reais, põe-se então a questão: como operar com estes números? Sendo *h* um infinitésimo, poderemos falar em $2h$, $h+h$, ou mesmo $sin(x+h)$? Sim! Na construção da estrutura dos hiper-reais, as operações unárias (como o simétrico e o inverso) e binárias (soma, subtracção, etc.), bem como todas as funções reais de variável real (como o seno, exponencial, logaritmo, etc.), ou os subconjuntos de R (como, por exemplo, o conjunto dos números naturais, N, ou o dos inteiros, Z) podem ser prolongados por extensão a *R, mantendo todas as propriedades de primeira ordem da estrutura de R. Por exemplo, em R é válida a propriedade da existência de inverso:

"para qualquer *x* em R que não 0, existe um único *y* em R tal que $xy = 1$".

Por isso, essa mesma propriedade permanece válida em *R. Em particular, os infinitésimos têm inversos: se *h* for infinitesimal, $1/h$ é infinitamente grande, no sentido em que $|1/h| > 0$ para qualquer número real *r*. Se um número hiper-real não for infinitamente grande, diz-se finito.

Diz-se assim que as propriedades de primeira ordem são *transferidas* para *R. Resta então saber o que são propriedades de primeira ordem. Se repararmos no exemplo anterior, verificamos que as variáveis só tomam valores numéricos. As propriedades de R cujo enunciado é do tipo "para qualquer função real de variável real *f*, ..." (aqui a variável toma valores no conjunto de todas as funções), ou do tipo "para qualquer subconjunto A de R, ..." não são de primeira ordem, e por isso não são transferidas. E, como boa parte da Matemática é efectivamente construída partindo dos números e caminhando por aí acima, isto é quanto basta!

Para obter então a definição correcta de derivada no Cálculo Infinitesimal, comecemos por definir a relação "infinitamente próximo" da forma óbvia: x,y em *R dizem-se infinitamente próximos se $|x-y|$ for infinitesimal, escrevendo-se então $x \approx y$. Prova-se facilmente que se um hiper-real x é finito, existe então um único real r tal que $x \approx r$. Este real toma o nome de *parte standard* de x ou, abreviadamente, $r = st\ (x)$

De um ponto de vista intuitivo, tudo se passa como se em *R cada número real r estivesse rodeado por um "halo" de infinitésimos indistinguíveis de 0 a qualquer escala finita. Robinson chama a este halo a "mónada de r", em honra de Leibniz: afinal, as suas intuições sobre a natureza dos infinitésimos eram, 300 anos depois, colocadas numa base perfeitamente rigorosa. De forma análoga, definem-se na recta hiper-real diferentes "galáxias" que possuem apenas números a distâncias finitas uns dos outros. Por exemplo, a chamada *galáxia principal* de *R corresponde a todos os hiper-reais a distância finita de 0, ou seja, é constituída pelas mónadas de todos os números reais. Cada ordem de grandeza infinitamente grande é também representável por uma galáxia.

Regressando então ao nosso exemplo, podemos dizer que a velocidade instantânea é dada por

$$v(t) = st\left(\frac{s\,(t+h) - s(t)}{h}\right)$$

para qualquer $h \approx 0$. Mais genericamente, uma função real de variável real diz-se diferenciável em x com derivada df/dx se

$$\frac{df}{dx} = st\ \frac{f\,(x+h) - f(x)}{h}$$

der o mesmo resultado, qualquer que seja o acréscimo infinitesimal $h \approx 0$.

No estudo de problemas envolvendo conexões entre o discreto e o contínuo assumem enorme importância as extensões não-standard do conjunto dos números naturais – o conjunto dos naturais não-standard, *N – e do conjunto dos números inteiros – o conjunto dos hiper-inteiros, *Z. Ao contrário de Z, o conjunto dos hiper-inteiros contém inteiros infinitamente grandes positivos e negativos, que podem ser usados para construir somas hiper-finitas. Neste contexto, o integral define-se formalmente tal como aquilo que é nas mentes de quem trabalha com ele: a parte standard de uma soma (hiper-finita).

Outra aplicação importante é na construção de soluções de equações diferenciais. Considere-se a equação de Laplace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{, em } D \\ u(x,y) = g(x,y) & \text{, na fronteira de } D \end{cases}$$

Se D for um subconjunto do plano (limitado e aberto), a solução deste problema descreve a distribuição estacionária de temperatura, $u(x,y)$, numa placa representada por D, sendo a temperatura na fronteira $g(x,y)$. Para construir (matematicamente!) a solução deste problema usando a nossa intuição física consideremos D dividido em células quadradas de lado infinitesimal, h. Para simplificar, consideremos o caso simples que corresponde a D ser o quadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$(Fig. 2). Seja $N>0$ um hiper-inteiro infinitamente grande e $h = 1/\ N \approx 0$. Considerando os pontos $x_i = ih$ (para i entre 0 e N) e $y_i = ih$ (para i também entre 0 e N), e traçando todas as rectas verticais e horizontais passando nesses pontos, obtém-se uma decomposição de D em N^2 células infinitesimais quadradas de lado h. Chamemos célula (i,j) à célula cujo canto inferior direito é x_i,y_i. Seja $u_{i,j}$ a temperatura da célula (i,j). Substituindo as derivadas parciais envolvidas na equação pelas razões incrementais correspondentes, o operador laplaciano é substituído pela sua discretização. Obtemos assim o problema discreto.

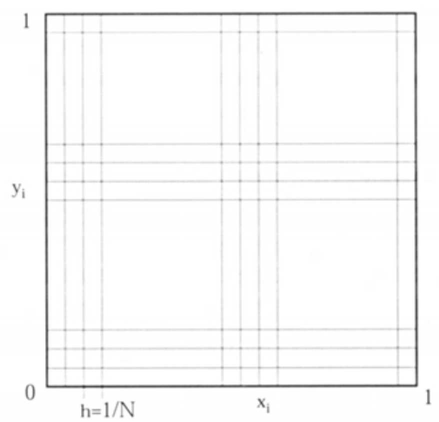


Fig.2. Célula quadrada para a discretização da equação de Laplace.

$$\begin{cases} U_{i,j} = \dfrac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}}{4} & \text{para células interiores;} \\ U_{i,j} = G_{i,j} & \text{para células fronteiras.} \end{cases}$$

Isto é nem mais nem menos do que um sistema linear de N^2 equações a N^2 incógnitas! Quanto à equação que substitui a equação de Laplace, ela estabelece apenas que a temperatura na célula (i,j) é igual à média das temperaturas das quatro células vizinhas. Como consequência imediata desta observação quase infantil, obtém-se o *princípio do máximo*: o máximo (e o mínimo) dos valores de temperatura ocorre obrigatoriamente em pelo menos uma célula fronteira. Usando este princípio, demonstra-se que o problema discreto tem uma única solução. A partir dessa solução, podemos definir um candidato à solução do problema contínuo original por $u(st\ x_i,\ st\ y_j) = (U_{i,j})$. Usando algumas consequências do princípio do máximo, é possível provar que esta função u está bem definida, é indefinidamente diferenciável em D, e satisfaz o problema original. Ou seja, tudo o que um físico precisa de saber sobre uma equação antes de a tentar resolver mas tem medo de perguntar a matemáticos!

Observe-se como, nesta abordagem, se inverte completamente a relação tradicional entre o discreto e o contínuo. Normalmente, a discretização de uma equação diferencial é uma aproximação à equação realizada com o objectivo de a estudar numericamente, na esperança de que a respectiva solução seja "próxima" da da equação diferencial parcial. Aqui, a equação às diferenças hiperfinitas é o objecto essencial, e a equação diferencial parcial apenas o seu análogo contínuo. O argumento acima mostra que a solução da equação do cimo da página é independente da escala $h=1/N$ infinitamente pequena que se tome. E é isto que torna a solução u um invariante do problema, o que, além de garantir a existência de solução única do problema contínuo, dá o devido significado a esse mesmo problema: o de representar todos os problemas hiperfinitos descritos, a *qualquer* escala infinitesimal.

A Análise não-standard é hoje muito mais do que uma curiosa justificação a *posteriori* de Leibniz. Em primeiro lugar, é possível reconstruir qualquer área da Matemática "standard" com o seu análogo não-standard à custa do Princípio de Transferência. Isso mesmo foi feito em áreas como a Geometria, a Análise Funcional ou a Topologia.

Em segundo lugar, a Análise não-standard tem enormes virtudes de transparência e intuição. Um resultado matemático raramente se descobre justapondo cuidadosamente todos os passos de uma demonstração até chegar ao teorema. Normalmente, é necessário utilizar argumentos intuitivos ou heurísticos para formular uma conjectura, que depois nos esforçaremos por demonstrar – muitas vezes com argumentos indirectos. Ora, a Análise não-standard permite por natureza utilizar argumentos provenientes da intuição física e encurtar demonstrações podendo constituir, tal como no século XVIII, uma ferramenta extraordinária para a descoberta de Matemática nova.

Dois exemplos paradigmáticos são a demonstração de um famoso problema em aberto da Teoria de Operadores, nos anos 60, por Robinson e Bernstein, e a *descoberta* de *canards* em equações diferenciais nos anos 80. Estes resultados foram depois redemonstrados com Matemática standard; mas a sua descoberta foi não-standard. Hoje em dia, um tópico quente de aplicação da Análise não-standard é a relação entre as Geometrias discreta e contínua.

Um breve comentário final. Por que é que a Análise não-standard tem 40 anos e ainda hoje é quase desconhecida por potenciais utilizadores e quase nunca utilizada pela comunidade matemática? A resposta é complexa, mas está sem dúvida relacionada com o cepticismo da comunidade científica. Notemos que este cepticismo é muito necessário, pois permite a depuração de erros; mas implica também uma grande inércia na aceitação de novas ideias, forçando-as a provar a sua utilidade de forma incontestável. A Análise *à la Weierstrass* demorou cerca de um século a erradicar os infinitésimos. Talvez a Análise *à la Robinson* demore outro século... a reabilitá-los.

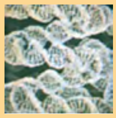
O que é o Eames Office

No início de tudo havia o interesse pela ciência de um casal de arquitectos e "designers" norte-americanos, os Eames. Contemporâneos do enorme desenvolvimento e interesse público pela ciência,nos anos 70, ficaram fascinados pelas escalas e pelas quase infinitas possibilidades de exploração do tema.A expressão inicial dessa curiosidade foi, já no final daquela década,um vídeo que dá a conhecer as várias escalas,a partir do homem,em direcção ao infinitamente grande e ao infinitamente pequeno. O êxito do filme foi tal que encorajou o casal a desenvolver outros produtos similares, e assim surge, em 1982,um livro sobre o mesmo assunto, que conhece agora a sua edição portuguesa (Porto Editora). Há dois anos atrás surgiu também um CD-ROM sobre a mesma temática, que estará também disponível no âmbito da exposição da Fundação Calouste Gulbenkian, onde poderá ser explorado pelos visitantes.

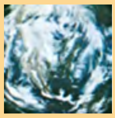
Demetrios Eames, neto do casal e seu herdeiro material e espiritual, deu seguimento ao projecto. Uma empresa explora, assim, o património gerado e, em especial, uma exposição que mostra o mundo às várias escalas tendo como centro o homem – até às galáxias e aos limites do universo conhecido (grandes escalas),por um lado, e até ao núcleo do átomo de carbono (pequenas escalas),por outro. São as 44 imagens e respectivos textos que constituem o "núcleo" da exposição patente ao público nas instalações da Gulbenkian.Esta é a primeira vez que a exposição do Eames Office se apresenta fora de um país de língua inglesa.

CARLOS PESSOA
gazeta@teor.fis.uc.pt




Uma Visita Guiada à Exposição


Comece na nossa escala, a Dimensão Humana. Sinta a força que emana das máscaras evocadoras dos espíritos e reflicta sobre os efeitos de escala no desenvolvimento do homem.

Veja depois o filme das Potências de Dez no espaço – uma sucessão contínua dos cenários do Mundo ao longo de uma viagem em linha recta, desde o interior de um átomo de carbono, por baixo da pele de um homem que dorme ao sol, até às fronteiras do cosmos mais longínquas que conhecemos.

Percorra então o corredor e observe os painéis,que são as paisagens em cada "estação" dessa viagem. Poderá explorar as grandes dimensões começando pelas Escalas da Terra para observar o chão que pisamos, à escala da cidade, do país ou do próprio planeta, seguindo depois por uma visita à Sala Cósmica, onde encontrará os planetas do sistema solar, poderá medir a distância às estrelas ou contemplar as galáxias do Grupo Local. Explore em seguida as dimensões do muito pequeno.Visite a Casa do Nano e observe os movimentos das moléculas da água ou mergulhe no invisível até à estrutura atómica.Entre de seguida Dentro do Átomo e descubra o coração da matéria até aos limites do que já foi possível conhecer.

Depois de tomar consciência das Escalas do Tempo, vendo o filme Potências de Dez no tempo, viage desde os dias de hoje até às origens do mundo, através de objectos que testemunham a nossa história. Aprecie depois a peça de Fernando Lanhas, "O quadro das grandezas fisicas", entretenha-se a explorar o CD-Rom "Powers of Ten" e, finalmente, deleite-se com a maneira como os mais jovens vêem o muito grande e o muito pequeno.