

# Mira Fernandes e a introdução da teoria da relatividade geral em Portugal

**José P. Sande Lemos**

Centro Multidisciplinar de Astrofísica - CENTRA, Departamento de Física, Instituto Superior Técnico - IST, Universidade Técnica de Lisboa - UTL, Avenida Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal.

joselemos@ist.utl.pt

## Resumo

Aureliano de Mira Fernandes (1884 -1958), célebre professor de matemática no Instituto Superior Técnico e no Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, em Lisboa, foi um dos primeiros portugueses, senão o primeiro, a compreender a teoria da relatividade geral na sua abrangência. Esta teoria foi sendo absorvida gradativamente pela comunidade académica portuguesa, em especial por alguns matemáticos e astrónomos, na década de 1920. Mira Fernandes na segunda metade dessa década e na seguinte publicou artigos na revista italiana *Rendiconti della Accademia dei Lincei*, através de Levi-Civita, matemático italiano especialista em cálculo tensorial com quem se correspondia. Alguns dos artigos versavam sobre propriedades de conexões afins em cálculo tensorial e sobre teorias unitárias, extensões da relatividade geral que tentavam incorporar o eletromagnetismo numa só teoria unificada. Neste artigo desenvolveremos estes temas em detalhe.

## 1. Mira Fernandes, professor e cientista

Os trabalhos científicos e académicos de Mira Fernandes foram coligidos e reimpressos pela Fundação Gulbenkian em três volumes [1]. Esta compilação possibilita o estudo e a compreensão de Mira Fernandes e a sua época. Vem na sequência de um volume publicado em 1971 [2], uma tentativa inicial para a publicação das obras completas.

## Doutoramento

Aureliano de Mira Fernandes, nasceu em 1884 no



Fig. 1 - Aureliano de Mira Fernandes (Coimbra, c. 1909-1910)

Alentejo. Formou-se em Matemática na Universidade de Coimbra em 1910. A sua tese doutoral de 1911, orientada por Sidónio Pais na Universidade de Coimbra [3], com o título “Teoria de Galois”, foi submetida quando ele tinha 27 anos [4] (para uma análise da tese ver [5]). Sidónio Pais tinha sido seu professor de Cálculo [6]. Souto Rodrigues, então com 70 anos, um matemático de Coimbra versado em álgebra e mecânica celeste certamente ajudou a incentivá-lo a dissertar sobre grupos e teoria de Galois [6,7]. Por formação Mira Fernandes era um matemático com um grande interesse em física teórica.

## Professor

Mira Fernandes foi professor durante mais de quarenta anos. Foi professor das cadeiras de Matemáticas Gerais, de Cálculo Infinitesimal, Integral e das Variações, e de Mecânica Racional no Instituto Superior Técnico (IST) desde a sua fundação em 1911, há cem anos, até se aposentar. O Instituto Superior Técnico situava-se provisoriamente na Rua do Instituto Industrial (perto da Rua Conde Barão) ao lado do rio Tejo. Provisoriamente significa até meados dos anos 1930s, quando se mudou para o lugar onde está atualmente, no meio da cidade. A partir de 1918 Mira Fernandes também foi professor de várias cadeiras de matemática no Instituto Superior do Comércio (ISC) [6], instituto que foi passando posteriormente por vários nomes, como Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras (ISCEF) entre outros, e é atualmente chamado de Instituto Superior de Economia e Gestão (ISEG). Esta divisão da docência de Mira Fernandes já preconizava a futura integração destes dois institutos, juntamente com outros, na Universidade Técnica de Lisboa, criada em 1930.

Teve muitos estudantes famosos. Dentro dos seus estudantes mais célebres contam-se Duarte Pacheco no Instituto Superior Técnico [8] e Bento de Jesus Caraça no Instituto Superior do Comércio [9]. Depoimentos dos antigos alunos sobre as aulas são variados, embora não discordantes. Uns dizem que era um prazer seguir o seu raciocínio nas aulas, sendo o docente apreciado pela clareza e precisão, outros que ele era inacessível e que as aulas não eram muito concorridas [10]. Eugénio Lisboa confessa que o aluno tinha a suspeita que Mira Fernandes sabia tudo, “discreto, quase olímpico, Mira Fernandes habitava outras mansões”. João Paes, neto de Sidónio Pais, corrobora esta opinião ao confessar que “a imagem que se tem de Mira é de um cientista, não de um professor, é de um ser de outro planeta”. Resina Rodrigues relembra [11] que quando os alunos entravam Mira Fernandes já lá estava sentado de costas à espera que todos os alunos se sentassem. O curso de Mecânica Racional para o 3º ano, que Resina frequentou, era anual e denso, o programa contendo tópicos de mecânica Hamil-

toniana e de relatividade, entre outros, mostrando que Mira Fernandes sabia muito. Margarida Lami revela que as aulas eram difíceis de seguir e a afluência diminuta, muitos alunos preferiam estudar pelas sebetas. Ela própria gostava de ir às aulas vê-lo discorrer, ele por vezes dizia “ocorreu-me isto agora ...”. Pulido Valente afirma que Mira era austero, distante, e que nessa época no Instituto Superior Técnico havia um ambiente de uma certa desorientação pedagógica, os professores de física criticavam as matemáticas de Mira Fernandes por serem muito teóricas. Jacinto Nunes mostra ter sido um homem feliz por ter tido dois excelentes professores no curso de Economia nos anos 1945-1946: Mira Fernandes e Bento Caraça, sendo que Mira era um excelente conversador.

Que Mira Fernandes tinha grande prestígio entre muitos alunos fica patente através de vários exemplos. Primeiro, no seu Jubileu em 1954, os cinco primeiros cursos do Instituto Superior Técnico (os cursos que se iniciaram em 1911 sucessivamente até 1916) organizaram uma festa em sua homenagem. No discurso dessa festa diz Mira Fernandes [12]: “Aprendi convosco a dar os primeiros passos na missão de ensinar, sem alardes duma perfeição inatingível, mas com uma devoção que não cansou em largos anos de exercício.” Pouco depois afirma: “de nossa velha escola, cujo sítio há pouco visitámos em consoladora romaria (Hic Troia Fuit!), o que resta é só humano: nós e os fundamentos duma instituição que soube vingar, fortalecer-se e dignificar-se.” E ainda “Quis a vossa amizade que um dos nossos encontros se realizasse na hora em que eu abandono o ensino oficial por uma disposição da lei que merece todo o meu aplauso. Ela não me inibe de fazer lições livres, para quem quiser ouvi-las, sobre temas de interesse, fora, já se vê, dos possíveis programas da Escola e em que o meu auxílio possa ser prestável.” Segundo, devemos mencionar a admiração que Manuel Sande Lemos, avô do autor, que viveu 102 anos e conseguiu atravessar três séculos, tinha por Mira Fernandes. Manuel Sande Lemos, obteve o grau de Engenheiro Químico no Instituto Superior Técnico nos meados da década de 1920, tendo iniciado o curso em 1920, quando o Instituto Superior Técnico se situava ainda na Rua do Instituto Industrial, Conde Barão. Ele cursou as cadeiras de Mira Fernandes, e mostrava constantemente uma grande admiração pelo professor e cientista. Estava sempre a dizer-me que eu devia estudar os seus trabalhos, em especial as equações chamadas Mira Fernandes. Terceiro, o testemunho vivo que Abreu Faro, engenheiro eletrotécnico e professor no IST, nos apresenta numa homenagem em 1978 da revista Técnica (uma revista da associação dos estudantes do IST) celebrizando os 20 anos da morte de Mira Fernandes [13], testemunho este que seria recapitulado em 1984 por ocasião do 1º centenário do nascimento de Mira Fernandes [14]. Por último, Pinto Barbosa, aluno e professor de economia do ISCEF, nessa mesma sessão comemorativa engrandece a personalidade do professor que foi Mira Fernandes [15].

Existem outros que não foram alunos, que no entanto mostram a importância que Mira Fernandes teve no traçado de suas escolhas. Um desses exemplos está documentado

num texto do excecional matemático Sebastião e Silva [16], outro no depoimento de Campos Ferreira [17], seu discípulo, ambos especialistas em análise e teoria das distribuições.

## Cientista

Após a brilhante dissertação da sua tese de doutoramento [4,5], Mira Fernandes dedicou-se durante alguns anos exclusivamente ao ensino. Com efeito, desde 1911, ano da dissertação e da entrada como professor no IST, até 1924 não existem publicações.

Surpreendentemente, de 1924 para a frente existem muitas publicações em diversos assuntos, nomeadamente, teoria de grupos, análise, geometria diferencial, geometria Riemanniana, cálculo tensorial (chamado então cálculo diferencial absoluto), teorias do campo unitárias, mecânica racional, e escritos variados como opúsculos sobre cientistas eminentes (ver [6] para alguns comentários gerais sobre os seus trabalhos). Não existe uma explicação direta para esta lacuna de 13 anos sem publicar. Aparentemente, ninguém o ensinou a publicar, como é agora costume quando um aluno, enquanto jovem, se prepara para ser um cientista e no seu doutoramento inicia-se na arte de publicar. Certamente, durante estes 13 anos ele esteve ocupado em preparar as aulas que tinha de lecionar e também em se inteirar com os novos assuntos pelos quais se interessava. A partir de 1924 deu-se a metamorfose. As publicações de Mira Fernandes são notáveis num meio científico onde pouco ou nada de nível internacional se publicava. Esta é uma das razões de se terem tornado famosas.

Os trabalhos mais celebrados foram publicados nos Rendiconti della Accademia dei Lincei (Atas da Academia dos Linceus), sendo estes trabalhos comunicados por Mira Fernandes à Academia italiana através de Levi-Civita, um dos nomes grandes da matemática. Após a aposentadoria compulsória de Levi-Civita em 1938, Mira Fernandes publicou em revistas portuguesas, como a *Portugaliae Mathematica*, a *Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa* e a *Técnica* (uma revista do Instituto Superior Técnico). Naquele tempo em Portugal era certamente muito complicado ter acesso aos trabalhos publicados no estrangeiro do momento. De alguma forma Mira conseguiu encontrar um nicho e ter acesso a alguns trabalhos que o interessavam, nomeadamente aos trabalhos publicados nos Rendiconti, colocando a sua habilidade matemática e os seus dons criativos para funcionarem. Mira Fernandes demonstra assim sentido de oportunidade, de contacto científico e de modernidade. Seria certamente interessante saber que livros possuía e quais as revistas que Mira Fernandes consultava com regularidade.

Também exerceu atividades em prol do desenvolvimento da ciência em Portugal [18]. Foi fundador da Sociedade Portuguesa de Matemática em 1940 e

foi seu primeiro Presidente da Assembleia Geral. Em 1943 foi Presidente da direção da mesma sociedade, com Bento de Jesus Caraça, seu antigo aluno no Instituto Superior do Comércio e amigo, sendo o Secretário-Geral. Esteve na fundação da Junta de Educação Nacional (JEN) em 1929 (mais tarde em 1936 tornada o Instituto para a Alta Cultura (IAC)). Mira Fernandes criou ainda em 1938, juntamente com Bento de Jesus Caraça e Caetano Beirão da Veiga, o Centro de Estudos de Matemáticas Aplicadas à Economia. Em 1943 fundou a Junta de Investigação Matemática, juntamente com António Aniceto Monteiro e Ruy Luís Gomes.

## Reconhecimento científico

Nessa época, nas décadas de 1910 e 1920, na matemática em Portugal, existia a figura reinante de Gomes Teixeira no Porto, um matemático reconhecido mundialmente com trabalhos em teoria de curvas e superfícies. Em Lisboa, Mira Fernandes não tinha par. Desde o início da sua atividade académica era respeitado para além do normal. Exemplos são dados em seguida.

A família de Sidónio Pais ofereceu-lhe, após o assassinato deste em 1918 e através de um dos seus filhos, as insígnias académicas da Borla e do Capêlo pertencentes a Sidónio [19]. O respeito e admiração entre Sidónio e Mira era mútuo [3].

Em 1927, ainda não tinha começado a publicar consistentemente, é convidado para proferir a oração inaugural da secção de ciências matemáticas do Congresso misto das Associações espanhola e portuguesa para o Progresso das Ciências, realizado em Cadiz. Fala sobre conceitos geométricos de espaço mostrando um à vontade e conhecimento invejáveis [20].

Foi membro da Academia das Ciências de Lisboa a partir de 1928. Em 1930 foi nomeado sócio correspondente da Real Academia de Ciências de Madrid [21]. Em 1955, a Academia das Ciências de Lisboa indicou Mira Fernandes como único candidato à série de prémios abertos pela Accademia dei Lincei, não porque não houvesse outros cientistas portugueses merecedores de tal indicação, mas pela alta estima e respeito que a Academia e seus cientistas tinham para com Mira Fernandes [17].

Em 1938 é convidado para Professor Catedrático da Faculdade de Ciências de Lisboa. Honrado com o convite, não o pode aceitar, alegando que teria de abandonar um dos dois institutos, ou o Instituto Superior Técnico ou o Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, onde há tanto tempo lecionava [21].

Após a sua jubilação em 1954, o Instituto Superior Técnico colocou um medalhão em bronze com a sua imagem na sala onde costumava dar aulas [21]. Ainda em 1954, um volume da *Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa* é dedicada a Mira Fernandes contando com a colaboração de vários matemáticos [21]. Viu ainda criado pelo Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras um “Curso de Matemáticas Superiores Mira Fernandes” que continuou até depois da sua morte [22].



Fig. 2 - Em Coimbra (1909)

Após a sua morte foram-lhe prestadas várias homenagens. Em 1971, o Volume I das suas obras foram editadas, ver [2]. Em 1978 a revista Técnica celebrando os 20 anos da sua morte é inteiramente dedicada a Mira Fernandes, ver [23]. Em 1984, o Instituto Superior Técnico monta uma exposição bio-bibliográfica comemorativa do I centenário do seu nascimento, ver [24]. Também em 1984, a Academia das Ciências de Lisboa organiza uma sessão comemorativa do I centenário do nascimento de Mira Fernandes, da qual saem as atas [25]. Em 2008 iniciam-se uma série de homenagens à vida e a obra de Mira Fernandes, celebrando os 50 anos de sua morte, promovidas pela Universidade Técnica de Lisboa. As sessões são abertas no Instituto Superior de Economia e Gestão nesse ano e continuam no Instituto Superior Técnico em 2009, organizando-se a conferência “Mira Fernandes e a sua época, uma conferência histórica em memória de Aureliano de Mira Fernandes (1884-1958)” da qual saíram atas [26], e uma conferência científica “Relatividade Matemática em Lisboa”. Fizeram parte das comemorações um lançamento de um selo comemorativo com uma

caricatura de Mira Fernandes e a inauguração de uma lápide na Avenida Mira Fernandes em Mértola, capital do concelho onde o matemático nasceu.

Teve uma correspondência extensa e respeitosa com Levi-Civita [27]. Num artigo na Gazeta de Matemática de Abril de 1942 [28] escreveu o obituário de Levi-Civita que tinha morrido em 29 de Dezembro de 1941. Fica claro que nunca se viram. Com efeito, não há registos disponíveis que mostrem que Mira Fernandes tenha viajado em visitas científicas para o estrangeiro além de Espanha [20]. Também se correspondeu com Élie Cartan, matemático francês de fama e renome. Cartan no seu trabalho “Les espaces de Finsler” [29] escreve (minha tradução) “Foi após uma troca de cartas com M. Aurelio (sic) de Mira Fernandes, que eu percebi da possibilidade desta simplificação”. Isto mostra que ele tinha relações de valor para ele e seu país. Também se correspondia com matemáticos portugueses [30].

António Aniceto Monteiro, matemático duma geração posterior à de Mira Fernandes, percebendo o valor das publicações deste cientista num País em que nada ou pouco se publicava de nível internacional, resolveu reimprimir todos os trabalhos de Mira Fernandes dos Rendiconti no volume 1 da revista Portugalea Mathematica em 1940 [31]. Esta foi a primeira vez que se concebeu coligirem-se trabalhos de Mira Fernandes num volume. Posteriormente houve uma primeira tentativa de publicar a sua obra completa [2], o que finalmente veio a acontecer entre 2008 e 2010 [1]. Claramente, o seu labor tem vindo a ser apreciado ao longo de várias gerações.

Ser citado é valorizar a instituição em que se trabalha e o País em que se vive. Vários trabalhos citam os artigos de Mira Fernandes. Yano, Takano e Tomonaga num artigo publicado em 1946 [32] citam o nome de Mira Fernandes, juntamente com o de Levi-Civita e outros, pelos trabalhos sobre desvio geodésico, certamente referindo-se ao trabalho inaugural de Mira nos Rendiconti de 1928, “Sur l'écart géodesique, la courbure riemannienne et la courbure associée de Bianchi” [33]. Arrow num artigo publicado em 1947 [34] cita o artigo de Mira de 1931 [35], assim como os de Zermelo e Levi-Civita [36,37], sobre o problema da braquistócrona de Zermelo. Este problema, por sua vez, pode ser posto num contexto de geometria de Finsler [38]. Em 1950, na Revista da Faculdade de Ciências, Mira Fernandes publicou um artigo com o título “Le geodetiche degli spazi unitari” [39]. O artigo é em variedades complexas generalizando resultados de Coburn, um matemático americano. Não está de todo relacionado com os artigos sobre teorias unitárias do espaço físico que o fizeram famoso como entendedor de relatividade geral. Este artigo de Mira Fernandes é citado no livro “Ricci Calculus” do matemático holandês Jan Schouten [40], a segunda edição de 1954, agora em inglês, não mais em alemão

como a primeira edição de 1924, uma citação que lhe deve ter dado muita satisfação. O artigo também é citado num livro de 1955 [41], sobre as teorias unitárias de Einstein e Schrödinger, de Madame Tonnelat, uma física francesa especialista em gravitação. Um outro seu artigo é citado no livro “Relativity: The general theory” do reconhecido relativista irlandês John Synge [42]. É o primeiro artigo de Mira Fernandes sobre teorias unitárias, “Sulla teoria unitaria dello spazio fisico” de 1932 nos Rendiconti. Em 1986, durante o meu doutoramento em Cambridge, após ver esta citação, comprei sem hesitar, este livro do Synge na livraria Galloway and Porter em Cambridge, de livros de segunda mão. Baritomba, Löwen, Polster e Ross num artigo de 2005 [43] citam o artigo de Mira sobre funções contínuas numa superfície esférica, artigo publicado no *Portugaliae Mathematica* em 1943 e na *Técnica* [44]. De realçar a citação, que estes autores fazem no seguimento, ao artigo “Continuous functions defined on spheres”, publicado no *Annals of Mathematics* em 1951, de Freeman Dyson, então um jovem matemático inglês de Cambridge que se tornaria pouco depois um reconhecido físico americano de Princeton.

## 2. A introdução da teoria da relatividade geral em Portugal

### A relatividade geral

A relatividade restrita [45], através de argumentos puramente cinemáticos, apresentou novos conceitos para o espaço e o tempo, permitiu uma extensão direta da dinâmica da partícula e da mecânica em geral e incorporou automaticamente o eletromagnetismo de Maxwell assim como a eletrodinâmica de Lorentz. A relatividade restrita e seus novos conceitos podem ser apresentados com matemática elementar. A demonstração que, seguindo a teoria da relatividade restrita, espaço e tempo devem ser vistos como uma entidade una quadridimensional, o espaço-tempo, foi fornecida em 1908 e publicada em 1909 pelo matemático alemão Hermann Minkowski [46]. Muitos físicos aperceberam-se imediatamente da importância da teoria e ajudaram a divulgá-la rapidamente, nomeadamente, Planck e von Laue na Alemanha e Langevin na França, este formulando em 1911 o famoso paradoxo dos gémeos [47,48].

A teoria da relatividade geral é outra história. Por um lado, assim como a relatividade restrita, a relatividade geral requer intuição física. Por outro lado, ao contrário da relatividade restrita, a relatividade geral é matematicamente complicada. A relatividade geral exige álgebra e cálculo tensorial, geometria diferencial e geometria Riemanniana, além, claro, da matemática necessária para se entender a gravitação Newtoniana. A relatividade geral revolucionou não só os conceitos de espaço e tempo, mas também

de matéria e gravitação. Einstein levou quase dez anos a construí-la, é o trabalho de um génio [49]. Por volta de 1907, através da experiência pensada do elevador, Einstein percebeu que massa inercial e massa (ou carga) gravitacional são identificáveis, assim como aceleração e campo gravitacional (por unidade de massa) têm, localmente, efeitos equivalentes. Tal ideia foi logo elevada ao estatuto de um princípio, que Einstein chamou de princípio de equivalência. Percebeu também que aceleração e campo gravitacional (por unidade de massa) só eram equivalentes localmente, e que a gravitação se fazia sentir sobre distâncias, através das forças de maré. Isto mostrou-lhe que necessitava de matemática tensorial em espaços curvos. Dos conceitos da relatividade restrita conjuntamente com a formulação quadridimensional de Minkowski, a métrica (isto é, como se medem distâncias e intervalos) assume carácter fundamental. Por outro lado, como o espaço-tempo em geral é curvo, transportes de vetores têm de ser realizados com cuidado, através de uma conexão, uma conexão linear, dita afim, que determina como um vetor aqui pode ser comparado em termos direcionais com um vetor ali. Esta conexão afim é em geral prescrita de forma independente, mas na geometria de Riemann (a geometria que Einstein incorporou como basilar para a sua teoria) a conexão é dada em termos da métrica e suas derivadas, um facto percebido de forma clara por Levi-Civita em 1917 [50]. Assim, esta conexão especial tem o nome de conexão de Levi-Civita, também chamada por razões históricas de símbolos de Christoffel. Christoffel, foi um matemático alemão do século XIX que desenvolveu a geometria Riemanniana. Finalmente, a informação de quanto um vetor roda quando é transportado, é dado pelo tensor curvatura ou tensor de Riemann (por vezes chamado de Riemann-Christoffel).

Einstein, através de análises e intuições profundas, aprendeu que o tensor de Riemann num espaço-tempo é, em termos físicos, o tensor de maré. Notou também, que o tensor de Riemann contraído, isto é, o tensor de Ricci, assim chamado em homenagem ao matemático italiano fundador do cálculo tensorial, tinha significado físico. Percebeu ainda que uma certa combinação do tensor de Ricci era o tensor geométrico importante para as equações que queria montar. Conseguiu então formular a teoria compondo geometria (isto é, o campo gravitacional) com os campos de matéria, incluindo o eletromagnetismo. De facto, a equação da teoria da relatividade geral diz que a geometria, representada pelo tensor de Einstein (dado pelo tensor de Ricci combinado), é moldada pela matéria representada pelo tensor de energia-momento, e que por sua vez, este tensor de energia-momento flui pela própria geometria. As equações de Einstein são [49]

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}$$

onde  $G_{ab}$  é o tensor de Einstein,  $T_{ab}$  é o tensor de energia-momento e  $G$  e  $c$  são a constante da gravitação universal e a velocidade da luz, respetivamente. Para a extraordinária história da criação da teoria da relatividade geral ver [51]. Para uma resenha da ciência e personalidade de Einstein ver [52].

Com o êxito das medidas do desvio da luz num campo gravitacional, efetuadas no eclipse total do Sol de 1919 pela expedição inglesa liderada por Eddington, um astrofísico inglês, com o próprio Eddington deslocando-se para a Ilha do Príncipe, então uma colónia portuguesa, e Crommelin, seu colaborador, para Sobral, uma cidadezinha no Ceará, a relatividade geral passou a ser considerada a teoria perfeita do campo gravitacional. No entanto, após os primeiros testes à teoria, nomeadamente o sucesso do cálculo da anomalia do periélio de Mercúrio, a própria deflexão da luz pelo campo gravitacional do Sol e o desvio espectral gravitacional, as aplicações físicas da teoria caíram num marasmo. Não havia mais testes a fazer.

É certo que o próprio Einstein percebeu que se podia fazer cosmologia com a sua teoria, ideia esta que foi levada adiante por de Sitter em 1917, um astrónomo holandês de primeira água, com um novo modelo, inflacionário, para o Universo. Depois apareceram os modelos de expansão de Friedmann, desenvolvidos por Eddington, Lemaitre e outros, que foram confirmados como possíveis quando Hubble anunciou em 1929 que as galáxias distantes afastavam-se umas das outras, concluindo corretamente que o Universo estava realmente em expansão.

A outra saída para a teoria da relatividade geral era tentar desenvolver a teoria do ponto de vista matemático e físico teórico experimentando teorias mais gerais. Esse foi o caminho seguido por Einstein e muitos outros pouco depois da relatividade geral estar formulada.

Só se voltou a fazer física a sério com relatividade geral no fim da década de 1950 e início da de 1960, quando as escolas americana através de Wheeler e a inglesa através de físicos-matemáticos como Penrose e Hawking se debruçaram mais seriamente sobre a problemática e, além disso, quando em 1963 as primeiras observações de quasares (objetos nos confins do Universo com uma luminosidade fantástica) começaram a oferecer evidências que astrofísica e relatividade geral eram assuntos que se deviam ligar.

A ênfase inicial na matemática da teoria nota-se nos livros produzidos. De início apareceram somente livros com enfoque matemático, os bons livros-texto iniciais foram escritos por matemáticos. Mesmo não sendo um matemático, e sim um astrofísico, Eddington escreveu um livro [53] cujo título, “The mathematical theory of relativity”, já diz tudo. O livro de Synge escrito em 1960 [42], uma referência importante nesse período, e do qual já falámos, tem poucas aplicações físicas. Só em 1965 apareceu um livro de física sobre relatividade geral. É o livro de Adler, Bazin e Schiffer [54]. Este livro de Adler e colaboradores é uma obra prima. É o primeiro livro texto em relatividade geral escrito de um ponto de vista físico, e de forma soberba, mostrando definitivamente as aplicações da relatividade geral à astrofísica. Estas aplicações deram origem à disciplina que se denominou astrofísica relativista. Esta disciplina lida com colapso gravitacional, buracos negros e discos em rotação em torno de buracos negros (que por seu lado explicam o fenómeno quasar), ondas gravitacionais, lentes gravitacionais e sua importância cosmológica e todos os fenómenos cosmoló-

gicos onde campos gravitacionais fortes aparecem. Além disso surgiram mais testes de campo fraco, como o eco de radares de planetas e precessão de giroscópios num campo gravitacional em rotação (como o da Terra), e ainda notavelmente, aplicações tecnológicas, o GPS não funcionaria se não fossem as correções relativistas (ver este ponto em [55]).

Atualmente, a relatividade geral e suas ramificações, como a astrofísica relativista, encontram-se numa fase de pleno desenvolvimento. Em particular, em breve, quando as antenas de ondas gravitacionais começarem a detetar sistematicamente os fenómenos altamente energéticos que ocorrem no universo, uma nova janela gravitacional direta para o cosmos estará aberta. Tal facto terá consequências profundas na nossa compreensão do próprio Universo.

## A teoria da relatividade geral em Portugal

Em Portugal a relatividade foi sendo introduzida paulatinamente no meio académico. A restrita com aplicações mais diretas e de matemática simples singrou mais rapidamente. A geral só era conhecida por alguns académicos. Hoje em dia a restrita faz parte do curriculum de 1º ano de qualquer curso de física, matemática e engenharia e a relatividade geral é praticamente obrigatória para alunos de 4º ano de física.

Ao revolucionar os conceitos espaço-temporais a relatividade restrita atraiu filósofos e pessoas com esse tipo de inclinações. Assim, em Portugal, Leonardo Coimbra, um filósofo do Porto, foi o primeiro a se interessar e escrever sobre a teoria. Vários opúsculos, livros e cursos explicando a teoria, introduzem a relatividade restrita em Portugal (ver [56,57,58, 59,60]).

Em relação à introdução da relatividade geral em Portugal, Gagean e Leite realizaram um trabalho notável ao escrever o artigo “General relativity and Portugal: a few pointers towards peripheral reception studies” em 1991 [56]. Este é o primeiro artigo a estudar relatividade geral no contexto português. Posteriormente publicaram um trabalho relacionado [57] e apareceram outros excelentes artigos, e.g., [58,59,60].

Até ao ano de 1919, em Portugal, só existe uma menção à relatividade geral. Em Dezembro de 1917, na revista “O Instituto” da Universidade de Coimbra, aparece uma nota de três páginas “Explicação física da atracção universal” assinada por Francisco Costa Lobo, matemático e professor de astronomia da Universidade de Coimbra, onde é referido o trabalho de Einstein sobre a relatividade geral, mas com a ressalva que o autor tem uma teoria melhor. Esta teoria, apresentada por Costa Lobo em 1911 num congresso em Granada, pretende dar uma explicação mecânica para a gravitação através de meca-

nismos de radiação e radioatividade [61] e parece estar em linha com as teorias Fatio-Lesage iniciadas por Fatio no fim do século XVII e continuadas por Le Sage em meados do século XVIII [62] (para se perceber como a teoria Fatio-Lesage tenta explicar a gravitação ver, por exemplo, [63]). Mostra por um lado um certo distanciamento da corrente principal, por outro uma vivacidade ingénua de alguns membros da comunidade científica portuguesa.

O ano de 1919 é o ano separador de águas para a teoria da relatividade geral. Também poderia ter sido um ano importante na ciência portuguesa. Fica claro, que o eclipse total do Sol de 1919 e a expedição à Ilha do Príncipe liderada por Eddington é uma pedra no sapato na ciência portuguesa [56] (ver também [58,59,60]). Embora tenham existido tentativas isoladas, não houve interesse real em capitalizar com tal evento. Esta caixa negra da relação dos astrónomos portugueses com o eclipse de 1919 e a relatividade geral foi deslindada de forma admirável por Mota et al [64,65,66]. O diretor do observatório de Lourenço Marques, Manuel Peres Júnior, quis acompanhar a expedição inglesa, mas aparentemente, inexplicavelmente, não conseguiu superar a burocracia [66], mesmo não havendo oposição do diretor do Observatório Nacional da Ajuda (agora chamado Observatório Astronómico de Lisboa), César Augusto Campos Rodrigues, nem do seu vice-diretor, Frederico Tomás Oom. Nesse mesmo ano de 1919 Oom foi tornado o 3º diretor do Observatório Nacional da Ajuda [66]. Tivesse a comunidade política com interesses científicos sabido da repercussão que o evento proporcionaria, todo o processo ter-se-ia desenvolvido de forma diferente. É certo que se pode considerar a existência de atenuantes para não haver a percepção de ninguém de prestígio da importância do evento, a situação política no País era instável, possivelmente caótica. Mas, o facto é que a comunidade portuguesa teve uma participação nula, nenhum astrónomo português acompanhou a expedição inglesa à Ilha do Príncipe, território português nessa época. Já a comunidade científica brasileira, com o Observatório Nacional do Rio de Janeiro e seu diretor de origem francesa, Henrique Morize, participou na outra metade da expedição liderada por Crommelin. É certamente um marco importante na ciência brasileira [67]. De notar, no entanto, que os astrónomos portugueses continuaram a se interessar por relatividade geral [64,65,66]. Peres Júnior sucedeu a Oom como diretor em 1930. Escreveu um livro em 1923 sobre relatividade que discutia relatividade geral, mas nunca foi publicado. Melo e Simas, também um astrónomo no Observatório Nacional da Ajuda, deu aulas e desenvolveu o tema de relatividade geral na Universidade Livre em 1922 e interessou-se pelo eclipse total de Setembro de 1922 na Austrália, que propiciou um novo teste à relatividade geral. Apresentou também uma comunicação à Academia das



Fig. 3 - Fotografia oficial (?) de professor do IST (Lisboa, 1922)

Ciências de Lisboa, da qual era membro, em que tentou medir o desvio da luz por Júpiter numa ocultação de uma estrela, mas o efeito era de antemão desprezável [66].

Em 1921, no 1º Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências no Porto Plans y Freire, um matemático espanhol de prestígio que já tinha traduzido o livro de Eddington [53], e ele mesmo publicado um bom livro-texto “Nociones fundamentales de mecanica relativista” [68], na sessão inaugural da secção de Matemática falou sobre a teoria da relatividade geral e as suas consequências em geometria [69]. Parece que a palestra foi uma injeção de estímulo, e muitos matemáticos portugueses, mas não físicos, foram impulsionados a se interessar definitivamente por relatividade geral.

Mário Mora em 1922 escreveu um livreto de aproximada-

mente 80 páginas, com o título “Teorias de Einstein, o princípio da relatividade restrita” [70]. O livro é uma dissertação apresentada para o Concurso de Admissão à Escola Normal Superior de Coimbra, uma escola para formar professores do ensino secundário. No livro, nas últimas páginas descreve as confirmações da relatividade geral. Um dos interesses maiores do livro é o prefácio de Gomes Teixeira em que diz, referindo-se a Einstein, “A sua obra é, depois dos Princípios Matemáticos do grande Newton, o mais importante monumento consagrado à Filosofia Natural”. E depois, “Apreciando estas observações, vê-se que eu, velho, cansado e incapaz de longas e aturadas meditações, tenho de limitar-me nestas questões a percorrer as planuras e a admirar de lá os que sobem às montanhas e faço-o com encanto e emoção”, o que não deixa de ser comovente. E Gomes Teixeira segue dizendo que o livro é um guia para indicar as belezas do Universo de Einstein. O autor deste livro agradece a Germano Vieira por desenhar um retrato de Einstein a lápis, por sinal um excelente retrato. Agradece também ao jovem Manuel dos Reis, um matemático de Coimbra.

A palestra de Plans y Freire ainda despontou o interesse do matemático catedrático na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, António Santos Lucas. Em 1922, na cadeira de Física-Matemática do curso de Matemática ele lecionou relatividade restrita e geral seguindo de perto o livro de Plans y Freire [68] e o excelente livro de Jean Becquerel [71], filho do descobridor da radioatividade. As notas de aula dessa cadeira ficaram para a posteridade [72].

Ainda em 1922, Pedro José da Cunha, também Professor na Faculdade de Ciências escreveu um texto sucinto sobre relatividade restrita e geral (ver [73]). Estes dois cientistas, Lucas e Cunha, deviam-se opor a José de Almeida Lima, um físico, colega da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, ao qual a relatividade restrita não agradava. Ainda na Faculdade de Ciências de Lisboa em 1925, Victor Hugo de Lemos, certamente orientado pelos seus superiores, apresenta uma dissertação de doutoramento com o título “Cálculo Tensorial”, com interesses voltados para a recente teoria da relatividade geral [60,73]. Em 1956, Victor Hugo de Lemos seria nomeado reitor da Universidade Clássica de Lisboa.

Ramos da Costa, um oficial da marinha, professor de Astronomia e Navegação na Escola Naval e de Topografia e Geodesia na Escola do Exército, e com interesse profissional em física e astronomia, escreveu em 1923 um opúsculo de divulgação elementar em que fala sobre ideias da relatividade geral [74], sendo que já havia escrito um pequeno livro sobre a teoria da relatividade restrita em 1921 [75]. Em 1924 escreveu um artigo “L’enseignement des mathématiques doit être orienté pour l’étude de la Relativité”, a ser apresentado em Toronto no International Mathematics Congress [58,59,64,65], mas o artigo não tendo sido aceite, aparentemente por Costa Lobo, foi publicado em 1925 em português com o título traduzido diretamente para “O ensino das matemáticas deve ser orientado para o estudo da relatividade” [66].

Em 1923, Einstein faz uma viagem a Madrid a convite do eminente físico espanhol Blas Cabrera, especialista em magnetismo [76]. Cabrera também foi grande divulgador da obra de Einstein. Esta viagem não foi aproveitada por cientistas portugueses [73].

Em 1925 Einstein passa por Lisboa, mas não há sinal que se reúna com algum cientista português [77], outro facto embaraçoso para a ciência nacional. Esta escala em Lisboa fez parte duma viagem feita à América do Sul, com paragens em Buenos Aires, Montevideu e Rio de Janeiro. No Rio foi pomposamente recebido. Antes, durante e depois da estada de Einstein, vários artigos foram publicados nos jornais cariocas sobre a teoria da relatividade, alguns contrários à teoria, como aconteceu em todo o lado. Na Academia Brasileira de Ciências houve um debate que se estendeu por várias sessões. Vários académicos defenderam as ideias de Einstein e, algumas semanas mais tarde, Roberto Marinho de Azevedo apresentou um artigo que respondia às objeções levantadas contra a teoria da relatividade [78]. Amoroso Costa no seu livro de 1922, “Introdução à teoria da relatividade”, já tinha mostrado que relatividade era um assunto do maior interesse para toda a comunidade científica [78].

Em 1929 Langevin visitou Portugal, nomeadamente Lisboa, Coimbra e Porto. Langevin era um proeminente físico francês, com trabalhos importantes em paramagnetismo e diamagnetismo, e em processos estocásticos criador da equação Langevin. Também foi um grande divulgador da teoria da relatividade [48] e a sua visita foi importante para divulgar mais e melhor entre os cientistas portugueses as relatividades restrita e geral [60].

Em 1930 Vicente Gonçalves publica um livro baseado nas suas aulas do ano letivo de 1928-1929 da cadeira de cálculo infinitesimal da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra. O título do livro é “Lições de Cálculo e Geometria Vol. I”, onde o capítulo VIII, o último do livro, é dedicado ao cálculo diferencial absoluto, isto é, ao cálculo tensorial [79].

Ainda em 1930 Manuel dos Reis, um físico-matemático então com 30 anos, escreve uma tese para as provas para professor catedrático na Universidade de Coimbra, publicada depois em 1933 [80], com o título “O problema da gravitação universal”, onde estuda a teoria da relatividade geral em algum detalhe [60] (ver [57,81,82] para comentários sobre este e outros livros científicos e de divulgação científica publicados em Portugal sobre Einstein e relatividade em Portugal nesse período). É este professor, então já lente de Mecânica Celeste e Diretor do Observatório Astronómico de Coimbra, que se envolve na discussão sobre a teoria da relatividade restrita com Gago Coutinho [60]. Coutinho era herói nacional com todos os méritos pela sua travessia aérea do Atlântico Sul com Sacadura Cabral em 1922. Era

perito em geodesia, mas de física percebia muito pouco. É ainda Manuel dos Reis que escreve o prefácio do livro “O princípio da relatividade” impresso pela Gulbenkian em 1978 que é uma tradução do livro alemão de 1922 [83].

É por esta época, segunda metade da década de 1920 início da de 1930, que Mira Fernandes aparece em cena, já com mais de 40 anos de idade. Nenhum dos seus trabalhos é diretamente versado sobre relatividade geral propriamente dita ou sobre suas consequências, como por exemplo cosmologia, um assunto que, naturalmente, despertou interesse desde a formulação inicial da teoria. Ao contrário do que se diz, Mira nunca publicou nada original em relatividade geral. Obviamente conhecia bem a teoria. Isso pode ser comprovado pelas magníficas lições realizadas em 1933 no Instituto de Altos Estudos em Lisboa [84], onde discorre sobre mecânica Newtoniana, relatividade restrita, relatividade geral, teorias unitárias e mecânica quântica, sendo que em teorias unitárias discute os seus trabalhos nesta área. É também sabido [11,14,57] que desde o ano letivo de 1933-1934 [57] até à década de 1950 [11,14], as suas aulas de Mecânica Racional, além de estudarem as mecânicas Newtoniana, Lagrangiana, Hamiltoniana e o formalismo Hamilton-Jacobi, também continham tópicos de relatividade geral analisando modelos cosmológicos e teorias alternativas ou estendidas, da gravitação, como por exemplo teorias unitárias. Dava também uma introdução à mecânica quântica, derivando a equação de Schrödinger via equação de Hamilton-Jacobi [11]. Notas de aula editadas confirmam inequivocamente os temas abordados [85]. Esta plethora de tópicos demonstra que era um profundo conhecedor de física teórica. Os seus trabalhos científicos ao longo destes anos exploram os fundamentos matemáticos da teoria, analisando várias conexões do cálculo diferencial absoluto, e estendem a teoria para tentar englobar o eletromagnetismo junto com a gravitação dentro de uma só teoria unitária. Foram vários trabalhos publicados em revistas internacionais nesta área. Mostra assim, que em Portugal, existiu alguém que tomou parte ativa na massa universal de cientistas que se preocupou com a teoria e a tentou desenvolver [56].

O seu interesse em cálculo tensorial, relatividade geral e teorias unitárias era manifesto, tanto que em 1932 indicou Levi-Civita e Einstein para membros estrangeiros da Academia de Ciências de Lisboa, uma proposta aceite pela academia e seu Presidente, Egas Moniz, o futuro prémio Nobel da medicina. Estas propostas feitas por ele eram adequadas, pois estas duas figuras tinham sido pioneiras em cálculo tensorial e geometria Riemanniana e em relatividade geral e teorias unitárias. Certamente por estes factos correspondeu-se com Einstein [86].

Em 1919 Mira, possivelmente, ainda não estava interessado por relatividade geral, mas é estranho que em 1925 não tivesse estado com Einstein quando este fez escala breve em Lisboa. Ou Mira Fernandes ainda não se tinha interessado pela teoria da relatividade geral, o que não parece ser o caso, tudo indica que já era um bom conhecedor da teoria, ou, mais provavelmente, não soube da escala de Einstein na cidade.

Vamos analisar as contribuições de Mira Fernandes nestas áreas de conexões em cálculo tensorial e geometria diferencial e de teorias unitárias. Antes faremos uma abordagem sucinta destes temas.

### 3. As teorias de unificação dos campos gravitacional, eletromagnético e da matéria

#### A ideia de unificação

A ideia de unificação em física é uma ideia antiga. Nos tempos modernos, uma das primeiras tentativas de unificar campos e partículas num mesmo esquema foi fornecida em 1912 por Mie [87], um físico alemão. No livro “The Genesis of General Relativity” [51] uma tradução para inglês do artigo original, assim como de outros artigos importantes, é fornecida. Um seguimento direto desta ideia de Mie veio mais tarde através do trabalho de Born e Infeld em 1934 [88], que implementaram este tipo de unificação modificando a Lagrangiana de Maxwell e fornecendo uma extensão não-linear das equações de Maxwell, a partir da qual se obtêm soluções intrínsecas de partículas. Nordström em 1914 [89] tentou um tipo diferente de unificação, não dos campos e partículas que geram esses campos, mas uma unificação dos diferentes campos. À época existiam somente dois campos conhecidos, o gravitacional e o eletromagnético. Nessa tentativa de unificar a sua teoria de gravitação, uma teoria escalar, com a teoria electromagnética de Maxwell, Nordström usou uma quinta dimensão, sendo por isso o precursor das teorias Kaluza-Klein [90].

O aparecimento da relatividade geral em 1916 [49] inspirou novas formas de unificação, a partir da sua estrutura baseada na geometria Riemanniana. Por exemplo, Hilbert [91] desde logo tentou usar as ideias de Mie [87] em conjunto com a relatividade geral para produzir uma teoria de partículas e campos, mas sem efeito de maior. É verdade que só por si a relatividade geral deixou o eletromagnetismo de fora. Pode-se argumentar, no entanto, que na equação de Einstein o tensor de energia-momento pode representar o tensor de energia-momento do campo eletromagnético e assim nas equações Einstein-Maxwell existe desde logo uma forma de unificação. Isto foi sugerido por Rainich em 1925 [92] e continuado por Misner e Wheeler em 1954 [93] no que eles chamaram de uma teoria desde logo unificada. Mas aqueles em perseguição da unificação queriam mais.

O argumento para unificação total era atraente e tinha antecedentes históricos. Os campos elétrico e magnético tinham sido unificados por Maxwell no campo eletromagnético, mais tarde tendo sido mostrado que todo este esquema

unificado era consistente somente se se usasse relatividade restrita e a arena espaço-temporal correspondente. Logo, poder-se-ia argumentar, gravidade (e assim relatividade geral) e eletromagnetismo, os dois campos conhecidos à época, deviam ser unificáveis numa teoria unitária usando-se algum tipo de fundo universal como arena correta. Esta era uma ideia apadrinhada por muitos, em particular por Eddington [53]. O que esta arena de fundo especial podia ser era deixado impreciso. Esta lógica funciona se se considerar relatividade geral como uma teoria de campo, num mesmo pé que a teoria electromagnética. Mas, é a teoria da relatividade geral uma teoria de campo ou, como a relatividade restrita, fornece uma arena para os outros campos? Aqui assinalamos simplesmente que a partir de 1916 muitos esquemas de unificação, tendo a relatividade geral como ponto de partida, têm estado sempre na fronteira dos problemas.

### A teoria de unificação de Weyl

A primeira tentativa de unificar gravitação, tendo como base a relatividade geral, e o eletromagnetismo de Maxwell foi proposta por Weyl, um matemático e físico alemão de primeira grandeza, em 1918 [94,95]. Nesta teoria o potencial electromagnético é introduzido como uma quantidade geométrica que determina a lei de transporte de uma escala de comprimento.

A ideia de Weyl pode ser decomposta em duas partes. Primeiro, é necessário desenvolver uma nova geometria, a qual, por seu lado, incorpora a geometria Riemanniana. Segundo, é preciso formular uma teoria física da gravitação e do eletromagnetismo que num certo limite particular fornece as equações Einstein-Maxwell. Analisemos primeiro a geometria de Weyl, depois a teoria de Weyl.

Na geometria de Weyl o transporte de um vetor é generalizado em relação ao transporte em geometria Riemanniana. A conexão, a entidade geométrica que transporta um vetor, não é dada pelos símbolos de Christoffel, compostos somente pela métrica, mas é mais geral. A ideia de um transporte geral, independente da métrica, tinha sido desenvolvida nesta mesma época por Levi-Civita e outros. Weyl impôs, além do requerimento usual de que o vetor transportado seja proporcional ao vetor inicial e ao deslocamento infinitesimal efetuado, o requerimento de que o comprimento de um vetor pode mudar sob transporte, o que não ocorre na geometria de Riemann. Para isto acontecer aparece naturalmente um novo campo, um campo vetorial além do campo gravitacional. Com esta duas exigências pode-se deduzir duas coisas. Uma é que a conexão de Weyl é dada em termos da métrica e do novo campo vetorial. A outra é que a derivada covariante da métrica, isto é, como a métrica é transportada de um ponto para outro, é proporcional à própria métrica com o fator de proporcionalidade sendo dado pelo novo campo vetorial. Isto leva a definir um tensor não-metricidade  $Q$  que dá uma medida de como a geometria se afasta da geometria Riemanniana. Na geometria Riemanniana a derivada covariante da métrica é simplesmente zero e assim  $Q=0$ . Além disso, nesta geometria mais geral, o tensor de Riemann é também decomposto em duas par-

tes, uma feita somente de símbolos de Christoffel e outra da curvatura dependente do campo vetorial. Várias outras conclusões importantes podem ser retiradas desta nova geometria, por exemplo, ângulos entre vetores e razões entre comprimentos são preservados sob transporte de Weyl, e a estrutura de cone de luz também é preservada.

Um outro facto importante na geometria de Weyl está relacionado com o conjunto de transformações que não mudam a lei de transporte. Efetuem-se as seguintes transformações: a métrica transforma-se na métrica multiplicada por uma função  $f$  geral, e o campo vetorial transforma-se num novo campo vetorial somado à metade da derivada do logaritmo da função  $f$ . Conclui-se que a conexão não muda e assim a lei de transporte não muda. Este conjunto de transformações forma o grupo de Weyl. Como o calibre, ou gauge, do comprimento é mudado sob estas transformações, mas o transporte não muda, diz-se que a geometria é invariante sob transformações de calibre, ou transformações de gauge.

Claro, se o novo campo vetorial é zero então a geometria é Riemanniana. A condição para ser Riemanniana é que o rotacional do campo vetorial seja zero. Isto leva a definir um novo tensor relacionado com esse rotacional. Quando este tensor rotacional for nulo a geometria torna-se Riemanniana já que não existe variação de comprimento quando um vetor é transportado ao longo de um caminho fechado. Este tensor rotacional é análogo ao tensor de Riemann na medida em que quando um vetor transportado ao longo de um caminho fechado não muda a sua direção o tensor de Riemann é zero e o espaço é plano. Existem ainda analogias adicionais entre os dois tensores, o tensor rotacional possui simetrias com afinidades com as simetrias do tensor de Riemann.

Tendo estabelecido uma geometria em que direções e comprimentos têm comportamentos semelhantes em relação a transporte, Weyl fez a tentativa de unificar gravitação (dada pela relatividade geral) e o eletromagnetismo (dado pela teoria de Maxwell). A sua ideia era, partindo de que o tensor de curvatura e as suas contrações fornecem uma base física para a gravitação e as forças de maré, como em relatividade geral, uma geometria estendida com a sua nova conexão e o seu novo campo vetorial, pode fornecer a base para uma teoria unitária gravitoelectromagnética. Analogamente a ter uma geometria Riemanniana e uma teoria física baseada nela como fez Einstein com a relatividade geral, Weyl propôs uma teoria baseada na sua própria geometria. Ele procurou equações, que de alguma forma preservassem transformações de calibre e de coordenadas. Aplicando um critério cuidadoso encontrou as equações que governam a teoria de Weyl, em que um tensor de Einstein generalizado aparece, assim como o novo tensor rotacional, mencionado acima,

é associado ao tensor de Maxwell, com tensores de energia-momento e correntes elétricas construídos a partir da própria teoria. Assim, de maneira notável, Weyl conseguiu reproduzir as equações de Einstein e de Maxwell a partir de uma só teoria.

Contudo, quando confrontada com as observações a teoria falha, tem de ser rejeitada em bases físicas fundamentais, como foi mostrado de imediato por Einstein [96]. Com efeito, como segundo a teoria de Weyl, comprimentos de objetos, assim como intervalos de tempo de trajetórias de partículas, dependem dos caminhos percorridos, e deste modo dependem da sua história passada, dever-se-ia observar que átomos a chegarem à Terra de diferentes lugares e diferentes distâncias do cosmos teriam propriedades diferentes, facto que não acontece. O livro de Adler, Bazin e Schiffer [54] de 1965 contém um capítulo em que a teoria de Weyl é explicada de forma exemplar, e o leitor interessado não deve perder. Na segunda edição do livro, de 1974, o capítulo é mantido.

Mesmo com este problema demolidor, a ideia de Weyl de calibre foi uma das ideias mais frutuosas na história da física. Em 1927, London, um físico alemão, foi o primeiro a tentar aplicar a ideia de calibre de Weyl à mecânica quântica [97]. A seguir, o próprio Weyl em 1929 [98] percebeu que em vez de calibrar o tensor métrico podia-se calibrar a função de onda quântica por uma fase e acoplá-la ao eletromagnetismo trocando a derivada normal por uma derivada covariante envolvendo o potencial-vetor eletromagnético e a carga elétrica elementar. Estas transformações deveriam se chamar transformações de fase, mas devido à sua semelhança com o trabalho anterior de Weyl, o nome de 1918, transformações de calibre ou gauge, colou, ver [99] para esta história inesperada. Todas as teorias quânticas de campo que vingaram são teorias de gauge.

### Uma pletera de teorias de unificação

Apesar dos problemas apresentados na teoria de Weyl na unificação da gravitação e eletromagnetismo, a porta para esquemas de unificação estava aberta, e, como diz um ditado brasileiro, “onde passa um boi, passa uma boiada”.

Nesta conjuntura, a teoria de Eddington de 1921 foi a seguinte [100] (ver também [53]). Eddington propôs a ideia de que talvez a conexão, e não a métrica, fosse a quantidade primária. Admitindo uma conexão simétrica, o que ele fez, o tensor de Ricci pode ser decomposto numa parte simétrica e numa parte anti-simétrica. A parte anti-simétrica em geral é não zero, é somente zero para uma conexão de Levi-Civita. Logo, pode-se identificar, primeiro, o tensor eletromagnético com a parte anti-simétrica do tensor de Ricci, e segundo, identificar o potencial vetor da teoria com uma contração do próprio tensor de Ricci. O tensor métrico, não sendo

fundamental, tem de ser recuperado. Postula-se então que este é essencialmente a parte simétrica do tensor de Ricci, multiplicado por uma constante, a constante cosmológica. Dado o essencial da geometria, Eddington propõe então a física através de uma ação que contém a raiz quadrada do tensor de Ricci, uma ação que foi depois explorada e modificada por Born e Infeld em 1932 para o eletromagnetismo [88] seguindo as ideias de Mie [87]. A teoria de Eddington é uma teoria baseada numa conexão afim, com efeito é a primeira teoria afim. É talvez também a única, provavelmente devido à sua inaptidão, embora engenhosa. Einstein entre 1923 e 1925 mexeu com esta ideia, tentando encontrar as equações de campo apropriadas, mas não conseguiu fazer progressos (ver [101] onde uma explicação lúcida das teorias unitárias do interesse de Einstein é fornecida).

A relatividade geral também deu nova luz à geometria diferencial, à teoria das variedades e ao cálculo tensorial. Começaram a ser considerados ramos importantes da matemática. De facto, as ideias sobre conexões e transporte paralelo de matemáticos como Hessenberg (1917), Levi-Civita (1917) e Schouten (1917), germinaram do estabelecimento da beleza e poder da relatividade geral. O matemático holandês Jan Arnoldus Schouten aproveitou para sistematizar de imediato estas conexões no seu livro de 1924 “Ricci-Kalkül” [102], escrito em alemão, o que certamente fornecia uma audiência mais alargada. Estas ideias com novas conexões já aparecem de facto nas ideias e teorias de unificação de Weyl (1918) [94,95] e de Eddington (1921) [100] (ver também [53]). Por seu lado, estas teorias foram inspiradoras de novos caminhos para explorar teorias de conexões gerais e suas propriedades. Assim, Cartan em 1922 descobriu a noção de torsão, que é dada por um tensor  $S$ , definido pela parte anti-simétrica da conexão [103,104], e cujo significado físico fornece em termos gerais como um vetor quando transportado de volta não consegue chegar ao ponto de saída. A partir desta conexão segue a geometria de Riemann-Cartan, ver o livro de Schouten [102]. Esta noção gerou um novo tipo de teorias físico-geométricas que se chamam genericamente teorias Einstein-Cartan (para um livro texto ver [105]).

A conexão afim foi desta forma alargada. Uma conexão geral tem uma parte métrica como em geometria Riemanniana, uma parte homotética como na geometria de Weyl, e uma torsão como na geometria de Cartan. Assim, para além da curvatura Riemann-Christoffel, obtém-se uma curvatura homotética e uma curvatura de torsão. Com a ajuda desta parafernália de conexões, novas teorias unitárias foram inventadas e propostas. Estas usavam uma, duas ou todos estes tipos de conexão e curvatura. Enumeremos algumas destas teorias, ver [106,107,108] para citações precisas: (i) Teorias com curvaturas Riemann-Christoffel e homotética, sem torsão, em que a conexão é simétrica, basearam-se na teoria original construída por Weyl (1918). (ii) Teorias com curvaturas Riemann-Christoffel e de torsão, sem curvatura homotética, têm uma conexão assimétrica que pode ser escrita como uma parte simétrica mais uma parte anti-simétrica. Estas são teorias tipo Einstein-Cartan. Num caso particular, nomeadamente, no caso em que se pode usar a

noção de paralelismo distante, estas versões teleparalelas foram explorados por Weitzenböck (1925), Einstein (1925), Infeld (1928) e outros. (iii) Teorias com todas as três curvaturas foram tentadas por Schouten (1924), Eyraud (1926), Infeld (1928) e Straneo (1931). A teoria original de Eddington (1921), explorada por Einstein (1923), parte de uma variedade só com conexão, a métrica sendo uma quantidade derivada, e está talvez fora deste esquema. Einstein (1942) e Schrödinger (1943) até tentaram teorias em que o tensor fundamental, uma generalização do tensor métrico, tem uma parte simétrica e uma parte anti-simétrica [41].

### O campo tensorial C, ponte entre conexões

Outra ideia que germinou da junção entre geometria diferencial e cálculo tensorial e é poucas vezes mencionadas, é que a variedade pode ter uma conexão para vetores contravariantes, e outra conexão diferente para vetores covariantes [102]. Assim, para cada uma das duas conexões distintas, obtém-se uma curvatura Riemann-Christoffel usual, uma curvatura homotética e uma curvatura de torsão, isto é, o número de curvaturas duplica. Estas duas conexões distintas originam um novo tensor C de três índices, que por seu lado efetua a ponte entre as próprias conexões e assim entre os vetores contravariantes e covariantes. O campo C é definido como a derivada covariante do tensor identidade I. É zero se se impuser que a derivada covariante do produto de tensores é Leibniziana, isto é, vale a regra do produto na derivação. Para a maioria dos físicos e matemáticos, e na maioria das teorias, o campo C era posto igual a zero, sem preocupações, e sem mencioná-lo, provavelmente por causa da falta de significado físico aparente para tal campo. Para Mira Fernandes não. Nos anos entre 1926 e 1933 ele explorou algumas das teorias unitárias propostas adicionando-lhes o campo C, enquanto ao mesmo tempo tentava interpretá-lo.

### Outras vias

Existiam outras vias, diferentes da via de modificar a estrutura de conexão do espaço-tempo, para se tentar uma unificação entre os campos gravitacional e eletromagnético, e eventualmente, uma unificação com os campos materiais também. Um esquema importante ainda continua sob escrutínio. Neste esquema a geometria Riemanniana mantém-se intacta, e as equações de Einstein também (ou alguma modificação menor destas), mas em espaços-tempos de dimensões maiores do que quatro. O campo gravitacional das dimensões extra é visto em quatro dimensões como um campo eletromagnético ou outro campo físico possível. Tal ideia foi perseguida por físicos e matemáticos, nomeadamente, Kaluza (1921), Klein (1926), Einstein e Mayer (1931), Einstein, Bargmann e Bergmann (1941), Jordan (1945), Thiry (1945), Podolanski (1950), e outros. Estas teorias são genericamente chamadas de teorias Kaluza-Klein [106,107,108] (para uma visão histórica e moderna ver [90]).

### Campos de matéria

Após o aparecimento da equação de Dirac para o elétron [109], passou-se a pensar neste como mais um campo, o campo spinorial eletrônico, a juntar aos campos eletromagnético e gravitacional. Para aqueles interessados em unificação era então natural unificar campos e campos de matéria numa só teoria. Tentativas foram feitas nesse sentido, por vários físicos e matemáticos, com destaque para Wigner, Fock, Levi-Civita, Pauli e outros (ver [108] para detalhes desta história).

### 4. Os trabalhos de Mira Fernandes: cálculo tensorial, conexões, e teorias unitárias dos campos gravitacional, eletromagnético e da matéria

#### Sinopse

Tendo mostrado as ideias sobre teorias unitárias da gravitação, eletromagnetismo e matéria no contexto da década de 1920 e início da de 1930 estamos agora prontos para entender os trabalhos de Mira Fernandes, primeiro em conexões afins, depois em teorias unitárias, ou teorias de unificação, como passaram a ser chamadas posteriormente (ver [110,111] para mais informações e detalhes matemáticos). Além de um livro, estes trabalhos de Mira Fernandes fazem parte das famosas publicações nos Rendiconti da Accademia dei Lincei que surgem na época mais criativa da sua vida. Estes trabalhos nos Rendiconti estão escritos em italiano, uma língua que Mira Fernandes não dominava com à vontade, necessitando de assistência para os escrever. Talvez por isso os trabalhos nos Rendiconti sejam mais comedidos em explicações, tornando por vezes difícil a compreensão das motivações do autor.

Os trabalhos em conexões afins [112,113] são baseados nos livros e artigos dos matemáticos e físico-matemáticos já referidos. Os trabalhos em teorias unitárias dos campos gravitacional e eletromagnético são baseados diretamente em ideias desenvolvidas pelo físico-matemático italiano Paolo Straneo, e também pelo físico polaco Leopold Infeld, que por sua vez basearam as suas ideias nos trabalhos de Weyl, Eddington, Cartan, Einstein e outros mencionados anteriormente. Com efeito, usando as ideias de Straneo e Infeld sobre os campos gravitacional e eletromagnético e as suas relações com conexões [114,115,116,117,118], Mira Fernandes escreveu um artigo em 1932 [119]. Posteriormente Mira Fernandes interessou-se por outra ideia de Straneo relacionada com teorias teleparalelas [120,121] sobre a qual escreveu um trabalho em 1933 [122]. Em 1934, baseando-se num trabalho de Levi-Civita [123], escreveu ainda sobre ideias de unificação tentando incluir a equação de Dirac, que descreve campos materiais carregados, mais preci-

samente campos eletrônicos [124]. Vejamos estes trabalhos mais pormenorizadamente.

### Os trabalhos sobre conexões

Os trabalhos sobre conexões são dois: um livro de 1926 e um artigo nos Rendiconti de 1931.

#### O livro

Em 1926 Mira Fernandes publicou o livro “Fundamentos da geometria diferencial dos espaços lineares” pela prensa do Museu Comercial [112], que foi reimpresso nas edições das obras completas da Gulbenkian [1]. Este livro resultou de um curso livre que Mira Fernandes realizou no Instituto Superior Técnico no ano letivo de 1922-23 sobre “Geometria Infinitesimal” [13]. No prefácio do livro faz o seguinte agradecimento: “Ao meu querido amigo, saudoso discípulo e prezado colega Bento Caraça agradeço muito reconhecido a solícita colaboração prestada na ingrata revisão das provas.” Bento de Jesus Caraça, mais tarde matemático e pedagogo de renome em Portugal, tinha então 25 anos. Ainda no prefácio, Mira Fernandes presta reconhecimento aos matemáticos holandeses Schouten e Struik, aos matemáticos alemães Blashke e Weyl, e ao astrofísico inglês Eddington. Neste livro Mira Fernandes inspira-se no livro de Schouten de 1924, “Ricci-Kalkül” [102].

Após definições preliminares sobre tensores e cálculo tensorial, que tomam cerca de 70 páginas, transporte linear geral de vetores tanto para vetores contravariantes como para vetores covariantes, com as respetivas conexões afins, é definido.

Aparece então o campo tensorial  $C$  de três índices que faz a ligação entre as duas conexões distintas. Este tensor  $C$  é por definição a derivada covariante do tensor identidade  $I$ . Quando esta derivada é zero, os vetores contravariantes e os vetores covariantes vêm a mesma conexão, caso contrário não. A derivada covariante da contração de dois vetores em geral não obedece à regra de Leibniz, somente quando o tensor  $C$  é zero isso acontece. Neste caso diz-se, segundo Mira Fernandes, que o transporte é invariante por contração.

O tensor  $C$  é muito geral e, seguindo Schouten, Mira Fernandes para simplificar põe-no como o produto de um vetor  $C$ , digamos, com o tensor identidade. Mostra então neste caso que quando dois vetores  $v$  e  $u$ , com  $v$  contravariante e  $u$  covariante, são incidentes, isto é o produto entre os dois é zero, então a regra de Leibniz vale para o transporte da contração dos vetores. Neste caso o transporte é dito invariante por incidência.

Define também o tensor métrico e o tensor não-metricidade  $Q$ . Define ainda torsão  $S$  de uma conexão. Mostra várias propriedades desses tensores e tabela os vários transportes possíveis. Mostra a



Fig. 4 - Fotografia oficial (?) de professor do IST (Lisboa, 1935)

generalização do tensor de curvatura Riemann-Christoffel, assim como várias propriedades desse tensor. Usando o tensor curvatura diz que se o transporte de um bivector (um tensor de ordem 2 anti-simétrico formado pelo produto de dois vetores) ao longo de uma curva fechada é zero então o transporte é chamado transporte equivalente ou transporte equiafim.

Existem casos particulares importantes, analisados no fim do livro, um livro de 152 páginas. O transporte de Riemann tem  $C=0$ ,  $S=0$  e  $Q=0$  e leva à relatividade geral. O transporte de Weyl é tal que  $C=0$  e  $S=0$  mas  $Q$  não é zero e leva à teoria de Weyl. O transporte afim é tal que  $C=0$ ,  $S=0$ , e  $Q$  qualquer, como na teoria de Eddington.

A maioria das geometrias conhecidas têm  $C=0$ . Isto é um alívio matematicamente, pois o campo  $C$  complica as fórmulas tremendamente. Contudo por alguma razão Mira Fernandes engraçou com o campo  $C$  e usa variedades em que as conexões estão ligadas pelo campo  $C$ . Tenta ainda dar um significado físico a  $C$ , como fornecendo o campo eletromagnético em esquemas unitários que ele tentou desenvolver.

O artigo de 1931 nos Rendiconti

Este artigo de 1931 nos Rendiconti tem o título “Proprietà di alcune connessioni lineari” [113]. Nele Mira Fernandes mostra, relativamente a conexões lineares, sete propriedades que não estão no livro de Schouten [83] nem no livro do próprio Mira Fernandes [103]. No final, compara propriedades de uma conexão com  $C \neq 0$ , com propriedades de uma conexão de Eddington, com  $C=0$  e com não-metricidade  $Q$ . Não cita em que texto de Eddington se baseou. É a primeira vez que Mira Fernandes tenta dar uma aplicação teórica para o campo  $C$ , o campo que liga as conexões. Os artigos seguintes desenvolvem esta ideia.

## Os trabalhos sobre teorias unitárias da gravitação, do eletromagnetismo e da matéria

Os trabalhos sobre teorias unitárias são três: três artigos nos Rendiconti em 1932, 1933 e 1934.

O artigo de 1932 nos Rendiconti

O primeiro artigo sobre teorias unitárias foi publicado no Rendiconti em 1932 com o título “Sulla teoria unitaria dello spazio fisico” [119]. No artigo anterior, quando menciona Eddington, Mira Fernandes já tinha dado indicações que aprecia este tipo de teorias e especulações. Mas agora ele abraça a ideia na totalidade. Analisa os artigos de Paolo Straneo, citando dois artigos de Straneo e um artigo de Infeld. Straneo publicara artigos sobre um certo tipo de teorias unitárias nos Rendiconti dei Lincei em 1931 e 1932 [114,115,116] e um artigo de revisão das suas ideias na La Rivista del Nuovo Cimento em 1931 [117]. Infeld publicou em várias revistas, principalmente alemãs, mas o artigo que Mira cita está no Rendiconti [118]. Estes artigos são essenciais para a nossa análise, já que Mira Fernandes baseou os seus trabalhos sobre teorias unitárias nos artigos de Straneo. Paolo Straneo era um físico matemático de Génova que pertencia ao grupo de Levi-Civita. Levi-Civita apresentava à Academia dos Lincei artigos dos matemáticos do seu círculo, Paolo Straneo, Attilio Palatini, Pia Nalli, Mira Fernandes e outros. Infeld era um físico polaco que mais tarde seria colaborador de Einstein.

Para se entender o contexto em que Mira Fernandes trabalha é preciso ter acesso ao livro de Mme.Tonnelat de 1965, “Les théories unitaires de l'électromagnetisme et de la gravitation” [106]. Este livro faz uma revisão completa até 1965 de todos os conjuntos e ramificações das teorias unificadas em voga e fora de moda. Não cita os trabalhos de Mira Fernandes sobre teorias unitárias. Contudo, cita trabalhos de Straneo e Infeld (os trabalhos de Straneo são citados em nota de pé de página), e desta forma é possível conectar Mira Fernandes à corrente principal do tempo. Sem o livro de Mme. Tonnelat é muito difícil pôr o trabalho de Mira Fernandes sobre teorias unitárias no contexto próprio, dado que o próprio autor não fornece subsídios suficientes. O livro de Vizgin sobre a história das teorias unitárias é também interessante [107]. O artigo de Goenner de 2004 “On the history of unified field theories” [108] é um artigo de revisão

sobre teorias de campo unificadas, a primeira parte até ao início dos anos 1930s [108], e a segunda parte ainda a ser publicada. Este trabalho relaciona-se bem com o livro de Tonnelat de 1965 [106]. Também cita Straneo e Infeld e assim também ajuda a ligar os artigos de Mira Fernandes com a corrente principal.

Neste artigo de 1932 [119] Mira Fernandes escreve (minha tradução): “Em várias notas publicadas nestas atas o prof. Paolo Straneo estabelece uma teoria unitária da gravitação e do eletromagnetismo, a qual, constituindo uma síntese geométrica dos fenómenos físicos, reduz-se à teoria de Einstein na ausência de fenómenos elétricos”. Mira Fernandes baseia-se numa conexão apresentada por Straneo que além de ter uma parte Christoffel tem um campo vetorial. A conexão é uma modificação da conexão de Weyl mencionada acima. Contudo, não tem o mesmo substrato matemático, nem a mesma base física. Apesar disso, à época tinha algum interesse.

Após deduzir o tensor de curvatura, as equações de campo da teoria são mostradas envolvendo o tensor de Einstein, a derivada do vetor da teoria e o tensor de energia-momento. Existe também uma equação de campo para o novo vetor que Mira Fernandes não escreve. Este vetor é para ser associado ao potencial-vetor eletromagnético. Existe uma teoria semelhante proposta previamente em 1928 por Infeld [118] e Mira Fernandes menciona essa teoria de passagem (ver também [106]). Notemos que, de forma clara, estas equações não cumprem um esquema de unificação total, como requerido por alguns físicos à época, nomeadamente Einstein [101], já que um tensor de energia-momento aparece.

Mira Fernandes escreve agora (minha tradução): “O objetivo desta Nota é formular considerações sobre a conexão de Straneo, e sobre outras conexões que levam às mesmas equações de campo e sobre as quais o autor ocupou-se num artigo prévio”. Este artigo prévio é o artigo de 1931 nos Rendiconti [113]. Mira precisa de várias coisas.

Para começo ele menciona que a conexão de Straneo não é contravariante métrica, isto é tem um tensor não-metricidade  $Q$  não zero. Depois delongase a mostrar que supondo não-metricidade total zero o tensor de curvatura de Straneo não pode ser encontrado, um resultado que se podia adivinhar dada a experiência que se pudesse ter com a conexão de Weyl.

Ele quer ir mais além e derivar o campo potencial-vetor a partir da própria conexão. Para isso ele admite que a conexão é invariante por incidência, isto é existe um tensor  $C$  que é redutível a um vetor  $C$  vezes a identidade. Além disso supõe que a conexão é covariante simétrica, isto é que a torsão

covariante é zero, e contravariante métrica. Após alguma álgebra Mira Fernandes percebe que o campo  $C$ , que liga as conexões dos campos vetoriais contra e covariantes, fornece o campo eletromagnético de Straneo. É talvez a primeira vez que o campo  $C$  recebe uma interpretação física. Mira Fernandes mostra também que o campo  $C$  se relaciona com a torsão e a não-metricidade. É ainda mostrado que a conexão é equivalente.

Mira Fernandes escreve então que a conexão satisfaz (minha tradução) “todas as condições atribuídas por Straneo à estrutura do espaço físico”. Conclui dizendo que a conexão é distinta da conexão de Weyl já que existe um campo  $C$  aqui. Quando o vetor  $C$  é um gradiente de um campo escalar, então a conexão reduz-se à de Weyl.

#### O artigo de 1933 nos Rendiconti

O segundo artigo é publicado no Rendiconti em 1933 como título “Sulla teoria unitaria dello spazio fisico” [122]. O título é mesmo que o do artigo anterior, talvez isso fosse uma prática comum nos Rendiconti quando o autor escrevia sobre o mesmo assunto.

Neste artigo Mira Fernandes debruça-se sobre outra ideia de Straneo. Ele não cita o artigo em que se baseia. Parece, no entanto, que se baseia no artigo de Straneo nos Rendiconti [120], que também saiu em alemão, com o título “Einheitliche Feldtheorie der Gravitation und Elektrizität” (Teoria de campo unificada da gravitação e do eletromagnetismo) publicado na revista Zeitschrift für Physik também em 1932 [121]. Mira mostra que as equações de Straneo definem um transporte absoluto para vetores covariantes. Straneo recupera assim o paralelismo distante de Cartan, Weitzenböck, Einstein e outros [106,107,108]. Com uma afirmação algo pomposa Mira Fernandes diz (minha tradução): “A equação acima traduz uma notável estrutura do espaço físico caracterizando um cronotopo de curvatura contravariante zero e covariante métrica”. No modelo de Straneo existe também paralelismo distante para transporte covariante.

Mira Fernandes volta-se então de novo para o tensor  $C$  e mostra que se este é não zero então as equações de Straneo ainda valem para vetores contravariantes, mas agora o tensor de curvatura covariante pode ser não zero. Isto é, existe transporte absoluto para vetores contravariantes mas não para vetores covariantes. A observação final de Mira Fernandes é (minha tradução): “E não será sem interesse, para futura utilização da teoria unitária haver constatado que as equações do prof. Straneo são compatíveis com conexões lineares (em número infinito) para as quais o tensor  $C$  não é nulo; i.e., que elas não são invariantes por contração”. Desta maneira Mira Fernandes tenta colocar o tensor  $C$

dentro de uma teoria unitária.

Ambos os artigos de 1932 e 1933 sobre teorias unitárias [119,122] são descritos e explicados de forma mais expansiva, e com as motivações mais explícitas, nas célebres lições de 1933 [84].

#### O artigo de 1934 nos Rendiconti

Em 1934 existe uma outra publicação nos Rendiconti sobre teorias unitárias com o título “La teoria unitaria dello spazio fisico e le equazioni relativiste della meccanica atomica” [124]. É um artigo sobre a equação de Dirac e tenta unificar relatividade geral e mecânica ondulatória. É inspirado num artigo de Levi-Civita de 1933 [123]. Pauli numa carta a Ehrenfest rejeita por completo esta tentativa de Levi-Civita [108] e ele mesmo formula uma maneira para relacionar a equação de Dirac com a relatividade geral [125,126]. Como observado por Costa Leite e Gagean [56], dado a atenção e polémica suscitadas por estas ideias seria de interesse real ter uma interpretação deste trabalho de Mira num contexto histórico [127].

### Outros trabalhos de Mira Fernandes

Neste encadeamento, existem outras publicações de Mira Fernandes que são de interesse mencionar e para as quais valeria a pena realizar-se um estudo cuidadoso.

Em 1924 Mira Fernandes publicou o seu primeiro livro “Elementos da teoria das formas quadráticas” [128] (ver também [1]). Assim como o livro “Fundamentos da geometria diferencial dos espaços lineares”, esta monografia também adveio do curso livre no Instituto Superior Técnico no ano letivo de 1922-23 [13]. Está dividido em duas partes: formas algébricas e formas diferenciais. É autónomo, escrito num nível algo avançado, mas de fácil leitura. Este livro baseia-se nas “Lezioni di geometria differenziale” do matemático italiano Luigi Bianchi [129], que daria nome às identidades diferenciais envolvendo o tensor de Riemann que aparecem em geometria Riemanniana. No prefácio escreve, “a revisão das provas, trabalho a tantos títulos ingrato, já pela minúcia, já pelas dificuldades da composição, foi feita pelo meu ilustre amigo, antigo, e saudoso discípulo, o senhor Engenheiro Duarte Pacheco. A êle se deve a iniciativa desta publicação, e, por ambos êsses motivos, aqui lhe deixo os meus agradecimentos por mais êste testemunho da sua fraterna amizade”. Duarte Pacheco, além das excepcionais qualidades de empreendedor era também versado em matemática. Em 1932 Mira Fernandes por razões que desconheço desentendeu-se com Duarte Pacheco.

Em 1945 e 1950 Mira Fernandes publicou dois artigos na Portugaliae Mathematica desenvolvendo ideias recentes de Einstein e Bargmann sobre bivectores [130,131]. Nestes trabalhos Einstein tentou encontrar equações fundamentais sem o uso de equações diferenciais. O primeiro trabalho de Mira Fernandes é sobre conexões finitas [132] e o segundo sobre transportes finitos [133].

Em 1950, na Revista da Faculdade de Ciências, Mira Fernandes publicou um artigo escrito em italiano com o título “Le geodetiche degli spazi unitari”, que apareceu também

em português na Técnica [39]. O artigo é em variedades complexas generalizando resultados de Coburn, um matemático americano. Não está de todo relacionado com os artigos sobre teorias unitárias do espaço físico mencionados acima. Este artigo de Mira Fernandes é citado no livro “Ricci Calculus” [40], a segunda edição de 1954, agora em inglês, não mais em alemão, de Schouten, uma citação que lhe deve ter dado muita satisfação. O artigo também é citado no livro de 1955 de Mme. Tonnelat sobre as teorias unitárias de Einstein e Schrödinger [41].

De 1943 até ao seu último trabalho em 1957 publicou cinco artigos sobre extensores [134,135,136,137,138], uma generalização do conceito de tensores, iniciada na década de 1940 pelo matemático americano Homer Craig e independentemente pelo matemático japonês Akitsugu Kawaguchi [139], que ele acreditava poder mais facilmente levar à unificação dos campos físicos [57]. Estes seus trabalhos foram elogiados pelo próprio Craig [21].

Existem outros artigos de Mira Fernandes em geometria diferencial de grande interesse, mas serão para desenvolver noutra ocasião, dado que estão fora dos temas conexões e cálculo tensorial e relatividade geral e teorias unitárias.

## 5. A relatividade geral em Portugal depois de Mira Fernandes

Desde a década de 1940 até à de 1960 houve um cientista que atuou em relatividade geral ou teorias relacionadas. Foi António Gião. Foi preciso esperar pelas décadas de 1970 e 1980 para começar a aparecer um corpo de cientistas que atuassem de forma consistente em física teórica. Só na década de 1990 a relatividade geral e áreas afins se instalaram em definitivo nas universidades portuguesas.

### António Gião

Até aqui só matemáticos com interesse em física, ou astrónomos com propensão para a matemática, se interessaram pela teoria da relatividade geral em Portugal.

Embora na interface da física teórica possa ser difícil saber se um físico é matemático ou se um matemático é um físico, consegue-se argumentar, pela sua formação, que o primeiro físico português a trabalhar em relatividade geral foi António Gião. Estudou na Universidade de Coimbra e em Estrasburgo tendo aí tirado o curso de Engenharia Geofísica e Física com especialidade em Meteorologia. Por volta de 1940 com 36 anos voltou a Portugal. Foi mais tarde, na década de 1960, Professor Catedrático Convidado da Faculdade de Ciências de Lisboa e diretor científico do Centro de Cálculo Científico do Instituto Gulbenkian de Ciência. Correspondeu-se com Einstein em 1946 sobre teorias de unificação. Publicou muitos artigos na *Portugaliae Physica* e apresentou comunicações à Academia das Ciências de Paris. Escreveu dois artigos na revista americana *Physical Review*. Um em 1949 “The equations of Codazzi and the relations between electromagnetism and gravitation” [140] em que apresenta uma teoria unificada do tipo Rainich e Misner-Wheeler [92,93]. Este artigo tem a particularidade de ser o artigo imediatamente precedente a um dos arti-

gos mais famosos da história da física, o artigo de Feynman “Space-time approach to quantum electrodynamics” [141], escrito quando Feynman ainda estava no Departamento de Física da Universidade de Cornell e que lhe valeu o Prémio Nobel. O outro artigo de Gião na revista *Physical Review*, “On the general motion of matter at the cosmological scale” [142] é também de interesse. Organizou em 1963 uma escola de verão internacional em Lisboa sobre modelos cosmológicos, em que proferiram palestras Pascual Jordan, alemão de ascendência espanhola da Universidade de Hamburgo e um dos fundadores da mecânica quântica agora interessado em cosmologia e ideias de unificação, Hermann Bondi um físico e astrofísico britânico de origem austríaca do King’s College de Londres que propôs junto com Gold e Hoyle a teoria do estado estacionário que confrontava a teoria do Big Bang, Yves Thiry um físico francês de Paris, e George McVittie um físico e astrofísico britânico a trabalhar na Universidade de Illinois. Foram realizados *Proceedings* da escola [143] com as apresentações dos cinco oradores, a de Gião com o título “On the theory of the cosmological models with special reference to a generalized steady-state model”, ocupa cerca de metade dos *Proceedings*. Entre os participantes destacam-se Manuel dos Reis, da Universidade de Coimbra, do qual já falámos e o jovem Steven Hawking ainda a realizar o doutoramento na Universidade de Cambridge em temas que o fizeram famoso, a saber, buracos negros e cosmologia quântica. Gião morreu em 1969 não deixando escola nem discípulos. Para mais detalhes sobre António Gião ver [144,145].

### Outros nomes

Há outros nomes que contribuíram para divulgar as teorias relativistas, principalmente a teoria da relatividade restrita. Podemos mencionar, António da Silveira, físico do Instituto Superior Técnico, e Mário Silva, físico de Coimbra. Ambos, nas cadeiras de eletromagnetismo lecionavam relatividade restrita, a arena correta para os fenómenos eletromagnéticos [60] (ver também [82]).

Nesta senda destaca-se o nome de Ruy Luís Gomes. Ruy Luís Gomes pode ser considerado, em termos, um discípulo de Mira Fernandes [18], embora não tivesse realizado trabalhos em teoria da relatividade geral ou em áreas afins. Ruy Luís Gomes doutorou-se em 1928 em matemática com 23 anos pela Universidade de Coimbra com uma tese com o título “Sobre o desvio das trajetórias de um sistema holónimo”, inspirada, segundo o autor, em trabalhos de Mira Fernandes. Entrou para Catedrático na Universidade do Porto em 1933 apresentando a dissertação “Sobre a estabilidade de movimentos de um sistema holónimo”, induzido por trabalhos de Levi-Civita, com quem se correspondeu. Na década de 1930 publicou trabalhos em relatividade restrita nos *Rendiconti della Accademia dei Lincei*, tendo

publicado ali em 1935 uma dedução original das fórmulas das transformações de Lorentz. Em Lisboa foi convidado em 1937 para dar uma série de aulas sobre relatividade restrita no Instituto Superior Técnico a convite do Núcleo de Matemática, Física e Química. Daí saiu o livro “Teoria da relatividade restrita” de 1938 [146]. Também esteve envolvido na polémica com Gago Coutinho, publicando artigos de repúdio na revista Seara Nova, que foram coligidos num livreto [147]. No início da década de 1940, Guido Beck, austríaco, discípulo de Hans Thirring e Heisenberg, com trabalhos importantes em mecânica quântica, mas também em relatividade geral, em particular um trabalho pioneiro de 1925 em ondas gravitacionais [148] e um artigo de revisão em relatividade geral [149], emigra para Lisboa devido à sua ascendência judaica. Passa por Coimbra onde profere uma série de seminários e é convidado por Ruy Luís Gomes para dar um curso de mecânica quântica no Centro de Estudos Matemáticos do Porto, recém criado por ele. Beck foi depois para Córdoba, Argentina, estabelecendo-se na década de 1950 no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) no Rio de Janeiro (para mais detalhes sobre Guido Beck em Portugal ver [150]). Este seminário de Física Teórica ainda contou com Proca, um físico Romeno instalado em Paris, que deu nome a uma equação para partículas de spin 1 com massa (a equação de Proca para fótons massivos), e desafeto de de Broglie, por brilhar autonomamente, um facto que lhe custou muito caro [126]. Ainda na década de 1940, aproveitando o clima científico instaurado na Universidade do Porto, em parte devido ao entusiasmo de Ruy Luís Gomes, António Almeida Costa, que se mudaria na década de 1950 para a Faculdade de Ciências de Lisboa, incluía tópicos de relatividade geral na cadeira de Mecânica Celeste. Ainda no Porto, também na década de 1940, Manuel Gonçalves de Miranda lecionava sobre cálculo tensorial e aplicações à teoria da elasticidade e relatividade geral, aulas essas que foram posteriormente publicadas [57]. Mais tarde Ruy Luís Gomes teria que deixar Portugal como exilado político, primeiro para a Argentina, depois para Recife, só voltando ao seu País em 1974 com a Revolução de Abril. Para mais detalhes sobre Ruy Luís Gomes ver [151,152].

Ruy Luís Gomes interessou-se muito mais por mecânica quântica do que relatividade. Assim como já existe um conjunto bom de artigos sobre a introdução da relatividade em Portugal, seria interessante fazer uma história sobre a introdução da mecânica quântica em Portugal, desde a receção das ideias de Planck até aos nossos dias, indo talvez mais atrás aos trabalhos de Kirchhoff da década de 1860, ele que cunhou a palavra corpo negro para o fenómeno físico em questão. Ao contrário de outros casos, o resultado de Planck não estava no ar, foi totalmente inesperado. Por exemplo, seria oportuno saber-se quando e como em Portugal se percebeu

e começou a mencionar os resultados de Planck e o efeito fotoelétrico de Einstein (ver contudo neste contexto [57], ver também [153,154]). O próprio Mira Fernandes era interessado em mecânica quântica tendo tecido alguns comentários sobre o prémio Nobel de 1932 atribuído a Heisenberg e o de 1933 a Schrödinger e Dirac [155]. Escreveu também em 1934 uma pequena nota na Técnica mostrando certas propriedades que advêm de um teorema de Ehrenfest que relaciona a onda de probabilidade associada a uma partícula quântica à dinâmica de uma partícula pontual clássica [156].

## Relatividade geral atualmente

Nas décadas seguintes à década de 1960, a relatividade geral, assim como a ciência em geral, teve um grande desenvolvimento em Portugal. Com a criação do Instituto de Física e Matemática (IFM) em Lisboa no final da década de 1960, por António Silveira, houve um incentivo para se realizar investigação científica independente das universidades. Este instituto acolheu novos cientistas fornecendo um ambiente propício ao desenvolvimento científico, especialmente com o restabelecimento da democracia em Portugal após a revolução de 1974. Muitos dos cientistas foram posteriormente absorvidos pelas universidades. Em relatividade geral



Fig. 5 - Aureliano de Mira Fernandes numa sala de aula no fim da década de 1940, início da de 1950.

e áreas afins, existem atualmente grupos de professores e investigadores a trabalharem nos vários departamentos de física e matemática de universidades portuguesas, nomeadamente Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa, Universidade de Lisboa, Universidade do Porto, Universidade do Minho, Universidade de Aveiro, Universidade de Évora e Universidade do Algarve.

## 6. Conclusão e a sina das teorias unitárias e dos trabalhos de Mira Fernandes

### Epítome

Demos uma ideia de Mira como professor e cientista. Generalidades relacionadas com relatividade geral e geometria Riemanniana, a geometria na qual a teoria está baseada foram apresentadas. Alinhavámos o contexto científico em que Mira Fernandes estava imerso e o que se tinha feito em relatividade geral. Alinhavámos o contexto científico das teorias unitárias do campo, durante um período que vai desde cerca de 1916, o ano da criação da relatividade geral, até cerca de 1934, o ano do último trabalho de Mira Fernandes no assunto. A extensão da geometria Riemanniana para a geometria de Weyl com o tensor não-metricidade, o primeiro esquema de unificação proposto pelo próprio Weyl, e o seu desenvolvimento potencial feito por Eddington, foi exposto. A extensão da geometria Riemanniana para incluir torsão dada por Cartan, também foi mencionada. Apresentámos o espectro de teorias unitárias baseado nas diferentes geometrias e conexões lineares da época, e mencionámos as várias tentativas feitas por Einstein e outros para encontrar a verdadeira teoria unitária. Referimos também um campo  $C$  que faz a ponte entre vetores e tensores contravariantes e covariantes. Mergulhámos então nos trabalhos de Mira Fernandes. Primeiro analisámos os seus trabalhos sobre conexões lineares afins, nomeadamente, o livro de 1926 e o artigo de 1931 nos *Rendiconti dei Lincei* e comentámos sobre estes. Estudámos seguidamente os seus dois trabalhos de 1932 e 1933, publicados no mesmo jornal, que aplicam a teoria das conexões a certas teorias unitárias da gravitação e do eletromagnetismo. Nestes trabalhos Mira Fernandes encontra uma aplicação do campo  $C$  como o campo físico eletromagnético na teoria unitária de Straneo. Isto é único. Aludimos também ao trabalho de 1934 da unificação da gravitação com campos de matéria. Comentámos sobre outros trabalhos interessantes de Mira. Mencionámos António Gião como tendo sido o primeiro físico, em oposição a matemático, a se interessar e trabalhar ativamente em relatividade geral, e citámos outros nomes interessados em relatividade como Ruy Luís Gomes.

### A sina das teorias unitárias

Na década de 1920 e início da década de 1930 os únicos campos conhecidos eram os campos gravitacional e eletromagnético, admitidos como campos clássicos nas teorias unitárias propostas. Desde então dois outros campos foram descobertos, os campos forte e fraco, e estes junto com o campo eletromagnético foram mostrados ser campos quânticos. A mera existência destes dois campos adicionais já põe em questão o programa de unificar somente os cam-

pos gravitacional e eletromagnético Além disso na década de 1930 a matéria na forma da equação de Dirac começou a ser encarada também como um campo, mas um campo quântico. O facto que todos os campos são fundamentalmente quânticos deixa cair todo o programa, baseado num fundo clássico. Contudo, existem ramificações importantes tiradas da ideia de unificação.

Primeiro, embora as teorias que mudam a geometria Riemanniana, como as usadas por Mira Fernandes, não estejam na moda atualmente como teorias de unificação e eletromagnetismo, algumas delas foram convertidas em teorias que incorporam gravitação, torsão, energia-momento e spin elementar, e são as teorias Einstein-Cartan, ou teorias Einstein-Cartan-Kibble-Sciama, os dois últimos nomes aparecem porque mostraram que a teoria Einstein-Cartan pode ser formulada como uma teoria de gauge com invariância local de Poincaré num espaço-tempo plano, ver [157] (ver também [105]). Teorias tele-paralelas, um caso particular de Einstein-Cartan, que tiveram o seu ponto alto no início da década de 1930, e pelas quais Straneo [120,121] e Mira Fernandes se interessaram [122] como vimos, ainda são estudadas [157].

Segundo, a ideia de unificação ainda persiste mas numa base quântica. O campo eletromagnético, e a sua partícula quântica sem massa associada, o fóton, já foram unidos com o campo fraco e suas partículas, dando origem ao campo eletrofraco. Existe a possibilidade que todos os três campos, eletromagnético, fraco e forte, com as suas partículas e em conjunto com a partícula Higgs, possam ser unificados numa teoria de grande unificação. Pode-se então esperar que o campo gravitacional com a sua partícula sem massa associada, o grávitão, possa ser unido numa teoria final de unificação, uma teoria de tudo, em que todos os campos quânticos, o gravitacional e os outros, são unificados. As teorias atuais com maior circulação fazem uso do campo gravitacional em dimensões extra para tentar obter, em quatro dimensões, o próprio campo gravitacional e o campo gran-unificado (o qual contém e generaliza o campo eletromagnético das tentativas iniciais). Isto é, em vez de se tentar unificar a gravidade com o campo eletromagnético (o campo extra conhecido na década de 1920) tenta-se agora unificar a gravidade com o campo gran-unificado. Estas teorias reminiscentes das ideias de Kaluza e Klein da década de 1920, que foram usadas por Einstein e outros numa forma por amadurecer, não foram essencialmente tocadas por Mira Fernandes, embora a teoria pentadimensional de Einstein e Mayer [158,159] seja sucintamente descrita por Mira Fernandes nas suas magistrais lições de 1933 [84]. Atualmente estas teorias são genericamente chamadas de teorias Kaluza-Klein. Foram incorporadas pelas teorias de supergravidade [90], e reaparece-

ram na teoria de cordas de uma forma proeminente, ver [160] para uma exposição didática.

O nome de tais teorias tem vindo a mudar, teorias unitárias inicialmente, teorias de unificação a seguir, e agora teorias de tudo. Será que o destino destas teorias será o mesmo que o da teoria de Mie?

### **A sina dos trabalhos de Mira Fernandes em conexões e teorias unitárias**

Claramente, Mira Fernandes ergueu-se como cientista acima do normal na comunidade portuguesa. Os seus trabalhos mostram clareza, concisão e domínio sobre o tema que se debruçou.

Quanto aos trabalhos sobre conexões e teorias unitárias é apropriado citar seu amigo Vicente Gonçalves [6]: “Merecem também especial citação as três notas sobre a teoria unitária do espaço físico (1932-34), onde Mira Fernandes concebe e estuda diversas conexões lineares compatíveis com a síntese geométrica gravitação-eletromagnetismo que P. Straneo andava então elaborando. Uma dessas conexões (invariante por incidência, contravariante simétrica e covariante métrica) mostrou-se igualmente compatível com as novas equações relativistas da mecânica ondulatória propostas por Levi-Civita. A despeito de suas possibilidades, a teoria unitária que Mira Fernandes então concebeu (e por vezes recordou) não fugiu ao destino das múltiplas tentativas congêneres que ao tempo se fizeram; mas é de assinalar a virtuosidade analítica do autor na sua investigação.”

Sobre os seus últimos trabalhos em extensores [134-138], elaborados ao que parece com o intuito futuro de unificar os campos e matéria, podemos mencionar que extensões geométricas de conceitos geométricos bem estabelecidos, com possibilidades de aplicação à física, surgem com recorrência. Por exemplo, os twistores de Penrose, objetos que de certa forma generalizam o conceito de spinores, são usados numa tentativa de quantizar a gravitação [161].

Os trabalhos de Mira Fernandes em conexões e teorias unitárias, embora presentemente de apenas interesse histórico, mostram criatividade e arrebatamento. Dá regozijo aos físicos relativistas atuais portugueses saberem que na década de 1930 havia alguém em Portugal que já se interessava de modo ativo por uma ciência que ainda é contemporânea. Preservar a memória do que mais caro existe na ciência portuguesa faz-se indispensável e é essencial. Torna-se por isso valioso analisar no contexto apropriado todos os artigos de Mira, dentro de cada área que trabalhou, nomeadamente teoria de grupos, análise, geometria diferencial, geometria Riemanniana, análise tensorial, teorias do campo unitárias e mecânica racional. À parte os trabalhos em teorias unitárias [110,111] (ver também [127]),

teoria de grupos [5], e o problema de Zermelo [35], em que algum trabalho já foi feito, os trabalhos em geometria diferencial e mecânica racional parecem merecer destaque maior.

### **Agradecimentos**

Fui apoiado por muitas pessoas às quais estou agradecido. Nuno Crato impeliu-me a dar uma palestra sobre teorias unitárias no trabalho de Mira Fernandes na conferência “Mira Fernandes e a sua época, uma conferência histórica em honra de Aureliano de Mira Fernandes (1884-1958)”, realizada no Instituto Superior Técnico em 2009. João Teixeira Pinto e Luís Saraiva tiveram a gentileza de formalizar o convite. O artigo [111] é parte das atas dessa conferência. Os trabalhos de Mira Fernandes em conexões e teorias unitárias, assim como todos os outros seus trabalhos, foram reimpressos pela Fundação Gulbenkian em três volumes [1]. Antes da publicação dos volumes 2 e 3, vários artigos, incluindo aqueles publicados nos Rendiconti nos anos 1931 a 1934, foram-me facilitados pelos órgãos do CEMAPRE (Centro de Matemática Aplicada à Previsão e Decisão Económica) do ISEG (Instituto Superior de Economia e Gestão), onde cópias de todos os trabalhos e artigos de Mira Fernandes estão guardados. ISEG é um dos lugares onde Mira Fernandes ensinou. Vera Lameiras, secretária do CEMAPRE-ISEG, ajudou-me a encontrar os artigos de Mira Fernandes nos arquivos da instituição. Embora não os conheça pessoalmente, aqueles que coligiram os artigos e contribuições de Mira Fernandes, nomeadamente, Vicente Gonçalves, Jaime Campos Ferreira, Luís Canto Loura, Joaquim Moura Ramos, Dulce Cabrita, e certamente outros, deram uma contribuição significativa para colocar em perspetiva real o trabalho de Mira Fernandes. Manuel Fiolhais enviou-me cópias de dois artigos de Straneo ([116] e [121]) da Biblioteca da Universidade de Coimbra que ajudaram muito na análise do contexto global. De facto, inicialmente, somente tive acesso a esses dois artigos de Straneo, sendo que atualmente muitos dos seus artigos estão na internet e podem também ser obtidos diretamente com Alessandro Romanello da biblioteca da Accademia dei Lincei. João Teixeira Pinto mostrou-me alguns dos artigos que citam Mira Fernandes. Amaro Rica da Silva, impulsionado a escrever sobre teoria de Galois nos trabalhos de Mira Fernandes [5], mostra sempre entusiasmo nas conversas sobre Mira Fernandes e sua obra.



**José Pizarro de Sando e Lemos** nasceu em 1957 em Lisboa, doutorou-se em Astrofísica em 1987 pela Universidade de Cambridge. Foi aluno do Colégio São João de Brito e do Liceu Camões em Lisboa e do Colégio São Vicente no Rio de Janeiro.

Formou-se em Engenharia Mecânica com especialização em Engenharia Nuclear em 1980 e fez o Mestrado em Física em 1982, ambos na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Foi investigador no Observatório Nacional do Rio de Janeiro de 1988 a 1996. Realizou a Agregação em Astrofísica e Gravitação em 1996 no Instituto Superior Técnico (IST), Universidade Técnica de Lisboa (UTL). Desde 1996 é docente no Departamento de Física do Instituto Superior Técnico, primeiro como Professor Convidado depois como Professor Auxiliar. É atualmente Professor Catedrático do Instituto Superior Técnico. Membro fundador do Centro Multidisciplinar de Astrofísica (CENTRA) do Instituto Superior Técnico é atualmente seu presidente. Tem mais de 120 trabalhos publicados em revistas internacionais na área de astrofísica relativista, gravitação, buracos negros e física fundamental com um total de citações de 3200 e com 10 dos seus artigos com mais de 100 citações cada. É membro da General Relativity and Gravitation Society. Obteve o prémio UTL/Santander de 2009, atribuído ao professor e investigador da Universidade Técnica de Lisboa que se distinguiu na respetiva área pelo número e pelo impacto dos trabalhos que publicou em revistas científicas de circulação internacional e obteve o prémio vitalício de "Outstanding Referee" da American Physical Society em 2010 pela qualidade dos pareceres sobre artigos submetidos às revistas *Physical Review Letters* e *Physical Review D*.

#### Referências

- [ 1 ] A. L. de Mira Fernandes, *Obras*, Volume I (1910-1927), editor N. Crato (Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2008). A. L. de Mira Fernandes, *Obras*, Volume II (1928- 1934), editores N. Crato et al (Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2009). A. L. de Mira Fernandes, *Obras*, Volume III (1935-1957), editores N. Crato et al (Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2010).
- [ 2 ] J. Vicente Gonçalves et al, *Obras Completas de Aureliano de Mira Fernandes: Volume I* (Centro de Estudos de Estatística do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, Lisboa, 1971).
- [ 3 ] J. Paes, "Testemunhos", Mesa redonda integrada na conferência Mira Fernandes e a sua época, Historical Conference in honour of Aureliano de Mira Fernandes (1884-1958), Instituto Superior Técnico, 17 Junho 2009.
- [ 4 ] A. L. de Mira Fernandes, "Theorias de Galois", (Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra, 1910); reimpresso em *Obras*, Volume I (1910-1927), p. 21, ver [1].
- [ 5 ] A. Rica da Silva, "Galois' groups in the work of Mira Fernandes", *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, (Número Especial - Aureliano Mira Fernandes), editores L. Saraiva e J. T. Pinto, (Sociedade Portuguesa de Matemática, Lisboa, 2010), p. 125, baseado na palestra convidada da conferência "Mira Fernandes and his age - An historical Conference in honour of Aureliano de Mira Fernandes (1884-1958)", Instituto Superior Técnico, Lisboa, Junho 2009.
- [ 6 ] J. Vicente Gonçalves, "Aureliano de Mira Fernandes: investigador e ensaísta", *Obras Completas de Aureliano de Mira Fernandes: Volume I* (Centro de Estudos de Estatística do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, Lisboa, 1971); reimpresso em *Obras*, Volume I (1910-1927), p. 1, ver [1,2].
- [ 7 ] Sobre João José Souto Rodrigues ver <http://www.familiasdeleiria.com>
- [ 8 ] Comissão do Centenário do Instituto Superior Técnico, Duarte Pacheco, do Técnico ao Terreiro do Paço (althum.com, Lisboa, 2011).
- [ 9 ] Natália Bebiano, "Bento de Jesus Caraça: esboço biográfico", *Gazeta de Matemática* 141, 9 (2001).
- [ 10 ] Engenheira Maragarida Lami, Engenheiro Eugénio Lisboa, Professor Jacinto Nunes, Engenheiro e Músico João Paes, Professor João Resina Rodrigues, Engenheiro Pulido Valente, Professor Manuel Alves Marques, "Testemunhos", Mesa redonda integrada na conferência Mira Fernandes e a sua época, Historical Conference in honour of Aureliano de Mira Fernandes (1884-1958), Instituto Superior Técnico, 17 Junho 2009.
- [ 11 ] João Resina Rodrigues, "Testemunhos", Mesa redonda integrada na conferência Mira Fernandes e a sua época, Historical Conference in honour of Aureliano de Mira Fernandes (1884-1958), Instituto Superior Técnico, 17 Junho 2009.
- [ 12 ] A. L. de Mira Fernandes, "Discurso de encerramento", Jubileu do Prof. Aureliano de Mira Fernandes (Reunião dos cinco primeiros cursos do IST), (Lisboa, 1954); reimpresso em *Obras*, Volume III (1935-1957), p. 477, ver [1].
- [ 13 ] M. J. Abreu Faro, "Aureliano de Mira Fernandes, professor do Instituto Superior Técnico", *Técnica* 449/450, 1 (1978).
- [ 14 ] M. J. Abreu Faro, "Discurso", em Sessão comemorativa do I Centenário do nascimento do Prof. Aureliano Lopes de Mira Fernandes (Academia de Ciências de Lisboa, Lisboa, 1984), textos de J. Pinto Peixoto, M. J. Abreu Faro, J. Campos Ferreira e A. M. Pinto Barbosa, p. 13.
- [ 15 ] A. M. Pinto Barbosa, "Discurso", em Sessão comemorativa do I Centenário do nascimento do Prof. Aureliano Lopes de Mira Fernandes (Academia de Ciências de Lisboa, Lisboa, 1984), textos de J. Pinto Peixoto, M. J. Abreu Faro, J. Campos Ferreira e A. M. Pinto Barbosa, p. 49.
- [ 16 ] J. Sebastião e Silva, "Mira Fernandes, o homem e o professor", (Minerva Comercial, Beja, 1969), encontra-se no espólio pertencente ao CEMAPRE (Centro de Matemática Aplicada à Previsão e Decisão Económica) do ISEG (Instituto Superior de Economia e Gestão) de Lisboa.
- [ 17 ] J. Campos Ferreira, "Discurso", em Sessão comemorativa do I Centenário do nascimento do Prof. Aureliano Lopes de Mira Fernandes (Academia de Ciências de Lisboa, Lisboa, 1984), textos de J. Pinto Peixoto, M. J. Abreu Faro, J. Campos Ferreira e A. M. Pinto Barbosa, p. 35.

- [ 18] A. J. S. Fitas, "Mira Fernandes e a investigação científica em Portugal no período entre as duas guerras mundiais", *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, (Número Especial - Aureliano Mira Fernandes), editores L. Saraiva e J. T. Pinto, (Sociedade Portuguesa de Matemática, Lisboa, 2010), p. 21, baseado na palestra convidada da conferência "Mira Fernandes and his age - An historical Conference in honour of Aureliano de Mira Fernandes (1884-1958)", Instituto Superior Técnico, Lisboa, Junho 2009.
- [ 19] João Patrício, "Mira Fernandes", texto mimeografado (1984), encontra-se no espólio pertencente ao CEMAPRE (Centro de Matemática Aplicada à Previsão e Decisão Económica) do ISEG (Instituto Superior de Economia e Gestão) de Lisboa.
- [ 20] A. L. de Mira Fernandes, "Conceitos geométricos do espaço", Oração Inaugural da secção de ciências matemáticas do congresso mixto das associações espanhola e portuguesa para o progresso das ciências, realizado em Cadiz de 1 a 8 de Maio de 1927, *Anais do Congresso*; reimpresso em *Obras*, Volume I (1910-1927), p. 455, ver [1].
- [ 21] J. F. Ramos Costa, "Elogio histórico de Aureliano Lopes de Mira Fernandes", em *Memórias da Academia das Ciências de Lisboa*, Classe de Ciências IX, 113 (1966).
- [ 22] J. Vicente Gonçalves et al (editores e colaboradores), *Curso de Matemáticas Superiores Professor Mira Fernandes: Estudos de matemática, estatística e econometria*, Volumes I-VIII (Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, - ISCEF, Lisboa, 1956-1964).
- [ 23] M. J. Abreu Faro, A. Aniceto Monteiro, F. E. Rebelo Simões, A. Brotas, *Técnica 449/450* (1978), edição dedicada a A. Mira Fernandes.
- [ 24] Serviço de Documentação da Universidade Técnica de Lisboa, *Catálogo da Exposição: Mira Fernandes, exposição bio-bibliográfica comemorativa do I centenário do seu nascimento (1884-1984)*.
- [ 25] Sessão comemorativa do I Centenário do nascimento do Prof. Aureliano Lopes de Mira Fernandes (Academia de Ciências de Lisboa, Lisboa, 1984), textos de J. Pinto Peixoto, M. J. Abreu Faro, J. Campos Ferreira e A. M. Pinto Barbosa, ver também [14].
- [ 26] L. Saraiva, J. T. Pinto (editores), *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, (Número Especial - Aureliano Mira Fernandes), (Sociedade Portuguesa de Matemática, Lisboa, 2010), baseado nas palestras convidadas da conferência "Mira Fernandes and his age - An historical Conference in honour of Aureliano de Mira Fernandes (1884-1958)", Instituto Superior Técnico, Lisboa, Junho 2009.
- [ 27] R. Tazzioli, "Mira Fernandes and Levi-Civita's school", *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, (Número Especial - Aureliano Mira Fernandes), editores L. Saraiva e J. T. Pinto, (Sociedade Portuguesa de Matemática, Lisboa, 2010), p. 67, baseado na palestra convidada da conferência "Mira Fernandes and his age - An historical Conference in honour of Aureliano de Mira Fernandes (1884-1958)", Instituto Superior Técnico, Lisboa, Junho 2009.
- [ 28] A. L. de Mira Fernandes, "Levi-Civita", *Gazeta de Matemática* 10, 145 (1942); reimpresso em *Obras*, Volume III (1935-1957), p. 145, ver [1].
- [ 29] E. Cartan, "Les espaces de Finsler", *Actualités Scientifiques et Industrielles* 79 (Hermann, Paris, 1934); reimpresso em *Oeuvres Complètes Part III*, Volume 2, (Gauthier-Villars, Paris, 1955), p. 1392.
- [ 30] C. Costa, "About the correspondence of A. Mira Fernandes to Portuguese mathematicians", *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, (Número Especial - Aureliano Mira Fernandes), editores L. Saraiva e J. T. Pinto, (Sociedade Portuguesa de Matemática, Lisboa, 2010), p. 67, baseado na palestra convidada da conferência "Mira Fernandes and his age - An historical Conference in honour of Aureliano de Mira Fernandes (1884-1958)", Instituto Superior Técnico, Lisboa, Junho 2009.
- [ 31] A. L. de Mira Fernandes, "Notas do Prof. Doutor Aureliano de Mira Fernandes, publicados nos Rendiconti della Accademia dei Lincei, de 1928 a 1937", *Portugaliae Mathematica*, Vol. I, 2ª Parte, Fasc. 4, editor A. A. Monteiro (contém 16 artigos reimpressos em *Obras*, Volume II (1928-1934) e Volume III (1935-1957), ver [1]. Mira Fernandes ainda publicaria outro artigo nos Rendiconti, "Equazioni di struttura dei gruppi di Lie", Rendiconti della Accademia dei Lincei 27, 631 (1938); reimpresso em *Obras*, Volume III (1935-1957), p. 59, ver [1].
- [ 32] K. Yano, K. Takano, Y. Tomonaga, "On the infinitesimal deformations of curves in the spaces with linear connections", *Proceedings of the Japan Academy* 22, 294 (1946).
- [ 33] A. L. de Mira Fernandes, "Sur l'écart géodésique, la courbure riemannienne et la courbure associée de Bianchi", *Rendiconti della Accademia dei Lincei* 7, 482 (1928); reimpresso em *Obras*, Volume II (1928-1934), p. 15, ver [1].
- [ 34] K. Arrow, "On the use of winds in flight planning", *Journal of Meteorology* 6, 150 (1947).
- [ 35] A. L. de Mira Fernandes, "Sul problema brachistocrono di Zermelo", *Rendiconti della Accademia dei Lincei* 15, 47 (1932); reimpresso em *Obras*, Volume II (1928-1934), p. 357, ver [1].
- [ 36] E. Zermelo, "Über das Navigationsproblem bei ruhender oder veränderlicher Windverteilung", *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 11, 114 (1931).
- [ 37] T. Levi-Civita, "Über Zermelo's Luftfahrtproblem", *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 11, 314 (1931).
- [ 38] C. A. R. Herdeiro, "Mira Fernandes and a generalised Zermelo problem: purely geometric formulations", *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, (Número Especial - Aureliano Mira Fernandes), editores L. Saraiva e J. T. Pinto, (Sociedade Portuguesa de Matemática, Lisboa, 2010), p. 179, baseado na palestra convidada da conferência "Mira Fernandes and his age - An historical Conference in honour of Aureliano de Mira Fernandes (1884-1958)", Instituto Superior Técnico, Lisboa, Junho 2009.
- [ 39] A. L. de Mira Fernandes, "Le geodetiche degli spazi unitari", *Revista da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa* 173, 5 (1950); reimpresso em *Português (segundo a versão publicada na Técnicaem 1950)* em *Obras*, Volume III (1934-1957), p. 311, ver [1].
- [ 40] J. A. Schouten, *Ricci calculus (second edition)*, Springer, Berlin, 1954).
- [ 41] M. A. Tonnelat, *La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements* (Gauthier-Villars, Paris, 1955).
- [ 42] J. L. Synge, *Relativity: The general theory* (North-Holland, Amsterdam, 1960).
- [ 43] B. Baritomba, R. Löwen, B. Polster, M. Ross, "Mathematical table turning revisited" arXiv:math/0511490 (2005).
- [ 44] A. L. de Mira Fernandes, "Funzioni continue sopra una superficie sferica", *Portugaliae Mathematica* 4, 69 (1943); apareceu também em português como "Funções contínuas sobre uma superfície esférica", *Técnica* 142, 563 (1943); reimpresso em *Obras*, Volume III (1935-1957), p. 187, ver [1].
- [ 45] A. Einstein, "Zur Elektrodynamik bewegter Körper", *Annalen der Physik* 17, 891 (1905); para uma tradução inglesa ver, A. Einstein, "On the electrodynamics of moving bodies", em *The principle of relativity: A collection of original memoirs on the special and general theory of relativity*, (Dover, New York, 1923), p. 35; para uma tradução portuguesa ver, A. Einstein, "Sobre a electrodinâmica dos corpos em movimento", em *O princípio da relatividade (Textos fundamentais da Física moderna Volume I)*, (Gulbenkian, Lisboa, 1978), p. 47.
- [ 46] H. Minkowski, "Raum und Zeit", *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* (Teubner, Leipzig, 1909); para uma tradução inglesa ver, H. Minkowski, "Space and time", em *The principle of relativity: A collection of original memoirs on the special and general theory of relativity*, (Dover, New York, 1923), p. 73; para uma tradução portuguesa ver, H. Minkowski, "Espaço e tempo", em *O princípio da relatividade (Textos fundamentais da física moderna Volume I)*, (Gulbenkian, Lisboa, 1978), p. 91.
- [ 47] M. von Laue, *Das Relativitätsprinzip* (Braunschweig, Vieweg, 1911).
- [ 48] P. Langevin, *Le principe de relativité* (Etienne Chiron, Paris, 1922).
- [ 49] A. Einstein, "Die Feldgleichungen der Gravitation", *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* zu Berlin, 844 (1915); para uma tradução inglesa ver, A. Einstein, "The field equations of gravitation", em *The collected papers of Albert Einstein*, Volume 6, (Princeton University Press, Princeton, 1997), p. 117.
- [ 50] T. Levi-Civita, "Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana", *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 42, 173 (1917); para uma tradução inglesa ver, T. Levi-Civita, "Notion of parallelism on a general manifold and consequent geometrical specification of the Riemannian curvature" (excerpts), em *The genesis of general relativity*, Volume 4, editores J. Renn, M. Schemmel, (Springer, Dordrecht, 2007), p. 1081, ver [51].
- [ 51] J. Renn, M. Schemmel (editores.), *The genesis of general relativity*, Volumes 1-4, (Springer, Dordrecht, 2007).
- [ 52] J. Dias de Deus, T. Peña, *Einstein... Albert Einstein: homem, cidadão, cientista* (Editora Gradiva, Lisboa, 2005).

- [ 53] A. S. Eddington, *The mathematical theory of relativity*, (Cambridge University Press, 2nd edition, Cambridge, 1924).
- [ 54] R. Adler, M. Bazin, M. Schiffer, *Introduction to general relativity*, (McGraw-Hill, New York, 1965).
- [ 55] E. F. Taylor, J. A. Wheeler, *Exploring black holes: Introduction to general relativity* (Addison Wesley Longman, New York, 2000).
- [ 56] D. L. Gagean, M. Costa Leite, "General relativity and Portugal: a few pointers towards peripheral reception studies", em *Studies in the History of General Relativity*, editores J. Einsentaedt and J. Kox, (Birkhauser, Boston, 1992), p. 3.
- [ 57] D. L. Gagean, M. Costa Leite, "Cultura científica em Portugal: a universidade e o ensino científico da relatividade e da quântica na 1ª metade do século XX", em *Universidade(s), história, memória, perspectivas, actas 1*, Congresso História da Universidade, 7º centenário, editores L. R. Torgal e comissão organizadora (Gráfica Ediliber, Coimbra, 1991).
- [ 58] A. J. S. Fitas, "A teoria da relatividade em Portugal no período entre guerras", *Gazeta de Física* 27 (2), 4 (2004).
- [ 59] A. J. S. Fitas, "A teoria da relatividade em Portugal (1910-1940)", em *Einstein entre nós, a recepção de Einstein em Portugal de 1905 a 1955*, editor C. Fiolhais (Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra, 2005), p. 15.
- [ 60] A. J. S. Fitas, "The Portuguese academic community and the theory of relativity", e-*Journal of Portuguese History* 3, 2 (2005).
- [ 61] F. M. da Costa Lobo, "Explicação física da atracção universal", *O Instituto* 64, 611 (1917).
- [ 62] S. Aronson, "The gravitational theory of Georges-Louis Le Sage", *The Natural Philosopher* 3, 51 (1964).
- [ 63] R. Feynman, "O que é uma lei física" (Editora Gradiva, Lisboa, 1989); para o original em inglês, ver R. Feynman, *The character of physical law* (MIT press, Cambridge, Massachusetts, 1965).
- [ 64] E. Mota, A. Simões, P. Crawford, "Einstein em Portugal: o primeiro teste da teoria da relatividade geral e o seu impacto na comunidade científica nacional", em *Einstein entre nós, a recepção de Einstein em Portugal de 1905 a 1955*, editor C. Fiolhais (Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra, 2005), p. 43.
- [ 65] P. Crawford, A. Simões, "O eclipse de 29 de Maio de 1919. A. S. Eddington e os astrónomos do Observatório da Tapada", *Gazeta de Física* 32 (2,3), 22 (2009).
- [ 66] E. Mota, A. Simões, P. Crawford, "Einstein in Portugal: Eddington's expedition to Principe and the reactions of Portuguese astronomers (1917-25)", *British Journal for the History of Science* 42, 245 (2009).
- [ 67] I. C. Moreira, A. A. P. Videira (editores), *Einstein e o Brasil*, (Editora da UFRJ, Rio de Janeiro, 1995).
- [ 68] J. M. Plans y Freire, *Nociones fundamentales de mecánica relativista* (Gráficas Reunidas, Madrid, 1921).
- [ 69] J. M. Plans y Freire, "Proceso histórico del cálculo diferencial absoluto y su importancia actual", em *Actas do 1º Congresso Luso-Espanhol para o Progreso das Ciências* (Madrid, 1921).
- [ 70] M. A. da Cunha Mora, *Teorias de Einstein, o princípio da relatividade restrita* (Oficinas da LVMEN, Coimbra, 1922).
- [ 71] M. J. Becquerel, *Le principe de relativité et la théorie de la gravitation* (Gauthiers-Villars, Paris, 1922).
- [ 72] A. Santos Lucas, *Lições sobre a teoria da relatividade*, apontamentos de físico-matemática de António dos Santos Lucas compilados por Francisco de Paula Leite Pinto (Edição manuscrita do autor, Lisboa, 1922-1923).
- [ 73] F. Bragança Gil, "A física em Portugal à volta do annus mirabilis", *Gazeta de Matemática* 150, 4 (2006).
- [ 74] A. Ramos da Costa, *Espaço, matéria, Tempo ou a trilogia Einsteiniana* (Imprensa Lucas e Cª, Lisboa, 1923).
- [ 75] A. Ramos da Costa, *A teoria da relatividade* (Biblioteca Nacional, Lisboa, 1921).
- [ 76] T. F. Glick, *Einstein in Spain: Relativity and the recovery of science* (Princeton University Press, Princeton, 1988).
- [ 77] C. Fiolhais, "Einstein em Lisboa", em *Nova física divertida* (Gradiva, Lisboa, 2007); ver também <http://dererumundi.blogspot.com/2007/09/einstein-em-lisboa.html>.
- [ 78] A. T. Tolmasquim, *Einstein - O viajante da relatividade na América do Sul*, (Vieira & Lent, Rio de Janeiro, 2004).
- [ 79] J. V. Gonçalves, *Lições de Cálculo e Geometria Vol. I* (Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra, 1930).
- [ 80] M. Reis, *O problema da gravitação universal* (Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra, 1933).
- [ 81] D. R. Martins, "Dissertações Einsteinianas em Portugal (1911-1930)", em *Einstein entre nós, a recepção de Einstein em Portugal de 1905 a 1955*, editor C. Fiolhais (Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra, 2005), p. 59.
- [ 82] C. Fiolhais, Sandra Costa, "Livros de divulgação científica publicados em Portugal sobre Einstein e relatividade", em *Einstein entre nós, a recepção de Einstein em Portugal de 1905 a 1955*, editor C. Fiolhais (Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra, 2005), p. 113.
- [ 83] A. Einstein, H. Minkowski, H. Weyl, *O princípio da relatividade* (Textos fundamentais da Física moderna Volume 1), (Gulbenkian, Lisboa, 1978), prefácio de Manuel dos Reis, tradução do alemão de Mário José Saraiva.
- [ 84] A. L. de Mira Fernandes, "Modernas concepções da mecânica", Parte 1, *Técnica* 50, 74 (1933); Parte 2, *Técnica* 51, 113 (1933); Parte 3, *Técnica* 52, 153 (1933); Parte 4, *Técnica* 53, 186 (1933); reimpresso em *Obras*, Volume II (1928-1934), p. 395, p. 403, p. 411, p. 423, ver [1].
- [ 85] A. L. de Mira Fernandes, *Mecânica Racional* (2ª edição, Secção de Fôlhas da Associação de Estudantes do IST, Lisboa, 1943-1944), notas de aula coligidas por Olivio Bento, José de Lucena e Laginha Serafim, 2ª edição revista e aumentada por Henrique Marques Pereira; 1ª Parte - Complementos de análise, 2ª Parte - Complementos de cálculo vectorial, 3ª Parte - Cálculo tensorial ou cálculo absoluto, 4ª Parte - Geometria das massas, 5ª Parte - Complementos de cálculo integral das funções de mais de uma variável, 6ª Parte - Mecânica clássica e mecânica dos fluidos, 7ª Parte - Mecânica relativista, 8ª Parte - Mecânica quântica, Aditamentos (sistemas canónicos, séries trigonométricas, valores próprios e espectro, equações integrais); estas Partes estão distribuídas por quatro livros, o Livro I engloba a 1ª parte, o Livro II as 2ª, 3ª, 4ª, e 5ª partes mais uma fração da 6ª parte, o Livro III o resto da 6ª parte, e o Livro IV as 7ª e 8ª Partes e os Aditamentos. Este curso de mecânica racional encontra-se na biblioteca do Instituto Superior Técnico, Coleção Ferreira de Macedo.
- [ 86] J. Rezende, "O que há para além das mensagens", *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, (Número Especial - Aureliano Mira Fernandes), editores L. Saraiva e J. T. Pinto, (Sociedade Portuguesa de Matemática, Lisboa, 2010), p. 7.
- [ 87] G. Mie, "Grundlagen einer Theorie der Materie", *Annalen der Physik* 37, 511 (1912); para uma tradução inglesa ver, G. Mie, "Foundations of a theory of matter" (excerpts), em *The genesis of general relativity*, Volume 4, editores J. Renn, M. Schemmel, (Springer, Dordrecht, 2007), p. 633, ver [51].
- [ 88] M. Born, L. Infeld, "Foundations of the new field theory", *Proceedings of the Royal Society of London A* 144, 425 (1934).
- [ 89] G. Nordström, "Über die Möglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld zu vereinen", *Physikalische Zeitschrift* 15, 504 (1914); para uma tradução inglesa ver, G. Nordström, "On the possibility of a unification of the electromagnetic and gravitational fields", em *Modern Kaluza-Klein theories*, editores T. Appelquist, A. Chodos, P. G. O. Freund, (Addison-Wesley, USA, 1987), p. 50.
- [ 90] T. Appelquist, A. Chodos, P. G. O. Freund (editores), *Modern Kaluza-Klein Theories* (Addison Wesley, New York, 1987).
- [ 91] D. Hilbert, "Die Grundlagen der Physik (Erste Mitteilung)", *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 395 (1915); para uma tradução inglesa ver, D. Hilbert, "The foundations of physics (first communication)", em *The genesis of general relativity*, Volume 4, editores J. Renn, M. Schemmel, (Springer, Dordrecht, 2007), p. 1017.
- [ 92] G. Y. Rainich, "Electrodynamics in the general relativity theory", *Transactions of the American Mathematical Society* 17, 106 (1925).
- [ 93] C. W. Misner, J. A. Wheeler, "Classical physics as geometry: Gravitation, electromagnetism, unquantized charge and mass as properties of curved empty space", *Annals of Physics* 2, 525 (1957).
- [ 94] H. Weyl, "Gravitation und Elektrizität", *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 465 (1918); para uma tradução inglesa ver, H. Weyl, "Gravitation and electricity", em *The principle of relativity: A collection of original me-*

- moirs on the special and general theory of relativity, (Dover, New York, 1923), p. 200; para uma tradução portuguesa ver, H. Weyl, "Gravitação e electricidade", em O princípio da relatividade (Textos fundamentais da física moderna Volume I), (Gulbenkian, Lisboa, 1978), p. 257.
- [ 95] H. Weyl, Raum, Zeit, Materie: Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie (Springer, Berlin, 1918); para uma tradução inglesa da 4ª edição alemã ver, H. Weyl, Space, time and matter (Dover, New York, 1952), p. 282.
- [ 96] A. Einstein, carta a H. Weyl (1918); reproduzida no original em The collected papers of (Gesammelte Schriften) Albert Einstein, Volume 8 Part B (Band 8 Teil B), The Berlin Years (Die Berliner Jahre), Correspondence (Briefwechsel) 1918, editores R. Schulmann, A. J. Kox, M. Janssen, J. Illy (Princeton University Press, Princeton, 1998), Brief 512 (zu Hermann Weyl) Berlin, 19.IV.1918, p. 726; para uma tradução inglesa ver The collected papers of Albert Einstein, Volume 8, The Berlin Years: Correspondence 1914-1918, English translation, A. M. Hentschell (translator), K. Hentschell (consultant), (Princeton University Press, Princeton, 1998), letter 512 (to Hermann Weyl) Berlin, 19 April 1918, p. 532.
- [ 97] F. London, "Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl", Zeitschrift für Physik 42, 375 (1927); para uma tradução inglesa ver, F. London, "Quantum mechanical interpretation of Weyl's theory", em The dawning of gauge theory, editor L. O'Raifeartaigh, (Princeton University Press, Princeton, 1997), p. 94.
- [ 98] H. Weyl, "Elektron und Gravitation", Zeitschrift für Physik 56, 330 (1929); para uma tradução inglesa ver, H. Weyl, "Electron and gravitation", em The dawning of gauge theory, editor L. O'Raifeartaigh, (Princeton University Press, Princeton, 1997), p. 121.
- [ 99] L. O'Raifeartaigh (editor), The dawning of gauge theory, (Princeton University Press, Princeton, 1997).
- [100] A. S. Eddington, "A generalization of Weyl's theory of the electromagnetic and gravitational fields", Proceedings of the Royal Society of London A 99, 404 (1921).
- [101] A. Pais, Subtle is the Lord, The science and the life of Albert Einstein (Oxford University Press, Oxford, 1982).
- [102] J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül, (Springer, Berlin, 1924).
- [103] E. Cartan, "Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion", Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 174, 593 (1922); reimpresso em Oeuvres Complètes Part III, Volume 1 (Gauthier-Villars, Paris, 1955), p. 616.
- [104] E. Cartan, "Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée", Annales Scientifiques de l'École Normal Supérieur 40, 325 (1923); reimpresso em Oeuvres Complètes Part III, Volume 1 (Gauthier-Villars, Paris, 1955), p. 659. E. Cartan, "Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (suite)", Annales Scientifiques de l'École Normal Supérieur 41, 1 (1923); reimpresso em Oeuvres Complètes Part III, Volume 1 (Gauthier-Villars, Paris, 1955), p. 799.
- [105] V. de Sabbata, M. Gasperini, Introduction to Gravitation (World Scientific, Singapore, 1986).
- [106] M. A. Tonnelat, Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation (Gauthier-Villars, Paris, 1965), p. 287.
- [107] V. P. Vizgin, Unified field theories in the first third of the 20th century (Birkhäuser, Basel, 1994).
- [108] H. F. M. Goenner, "On the history of unified field theories", Living Reviews in Relativity 7, 2 (2004).
- [109] P. A. M. Dirac, "The quantum theory of the electron". Proceedings of the Royal Society of London A 117, 610 (1928).
- [110] J. P. S. Lemos, "General relativity, differential geometry, and unitary theories in the work of Mira Fernandes", Proceedings of the 12th Marcel Grossman Meeting (Paris 2009), editores T. Damour et al (World Scientific, Singapore, 2011); arXiv:1011.6269 [physics.hist-ph] (2010).
- [111] J. P. S. Lemos, "Unitary theories in the work of Mira Fernandes (beyond general relativity and differential geometry)", Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, (Número Especial - Aureliano Mira Fernandes), editores L. Saraiva e J. T. Pinto, (Sociedade Portuguesa de Matemática, Lisboa, 2010), p. 147, baseado na palestra convidada da conferência "Mira Fernandes and his age - An historical Conference in honour of Aureliano de Mira Fernandes (1884-1958)", Instituto Superior Técnico, Lisboa, Junho 2009; arXiv:1012.5093 [physics.hist-ph] (2010).
- [112] A. L. de Mira Fernandes, Fundamentos da geometria diferencial dos espaços lineares (Gráfica do Museu Comercial, Lisboa, 1926); reimpresso em Obras, Volume I (1910-1927), p. 299, ver [1].
- [113] A. L. de Mira Fernandes, "Proprietà di alcune connessioni lineari", Rendiconti della Accademia dei Lincei 13, 179 (1931); reimpresso em Obras, Volume II (1928-1934), p. 221, ver [1].
- [114] P. Straneo, "Intorno alla teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità", Rendiconti della Accademia dei Lincei 13, 364 (1931).
- [115] P. Straneo, "Intorno alla teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità", Rendiconti della Accademia dei Lincei 13, 695 (1931).
- [116] P. Straneo, "Intorno alla teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità", Rendiconti della Accademia dei Lincei 13, 770 (1931).
- [117] P. Straneo, "Teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità", La Rivista del Nuovo Cimento 8, 125 (1931).
- [118] L. Infeld, "Remarques sur le problème de la théorie unitaire des champs", Rendiconti della Accademia dei Lincei 15, 157 (1932).
- [119] A. L. de Mira Fernandes, "Sulla teoria unitaria dello spazio fisico", Rendiconti della Accademia dei Lincei 15, 797 (1932); reimpresso em Obras, Volume II (1928-1934), p. 363, ver [1].
- [120] P. Straneo, "Intorno alla teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità IV - Discussione e perfezionamento della teoria precedente", Rendiconti della Accademia dei Lincei 13, 770 (1932).
- [121] P. Straneo, "Einheitliche Feldtheorie der Gravitation und Elektrizität", Zeitschrift für Physik 77, 829 (1932).
- [122] A. L. de Mira Fernandes, "Sulla teoria unitaria dello spazio fisico", Rendiconti Acc. dei Lincei 17, 227 (1933); reimpresso em Obras, Volume II (1928-1934), p. 387, ver [1].
- [123] T. Levi-Civita, "Diracsche und Schrödingersche Gleichungen", Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin V, 240 (1933).
- [124] A. L. de Mira Fernandes, "La teoria unitaria dello spazio fisico e le equazioni relativiste della meccanica atomica", Rendiconti Acc. dei Lincei 19, 314 (1933); reimpresso em Obras, Volume II (1928-1934), p. 447, ver [1].
- [125] W. Pauli, "Über die Formulierung der Naturgesetze mit fünf homogen Koordinaten, Teil II: Die Diracschen Gleichungen für die Materiewellen", Annalen der Physik 18, 233 (1933).
- [126] C. P. Enz, No time to be brief, a scientific biography of Wolfgang Pauli (Oxford University Press, Oxford, 2002).
- [127] J. P. S. Lemos, "Mira Fernandes on the unification of fields and matter", em preparação (2011).
- [128] A. L. de Mira Fernandes, Elementos da teoria das formas quadráticas, (Gráfica do Museu Comercial, Lisboa, 1924); reimpresso em Obras, Volume I (1910-1927), p. 189, ver [1].
- [129] L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale Volumes 1-3 (E. Spoerri, Pisa, 1894-1902).
- [130] A. Einstein, V. Bargmann, "Bivector fields", Annals of Mathematics 45, 1 (1944).
- [131] A. Einstein, "Bivector fields II", Annals of Mathematics 45, 15 (1944).
- [132] A. L. de Mira Fernandes, "Connessioni finite", Portugaliae Mathematica 4, 205 (1945); reimpresso em Português (segundo a versão publicada na Técnica em 1945) em Obras, Volume III (1934-1957), p. 207, ver [1].
- [133] A. L. de Mira Fernandes, "Transporti finiti", Revista da Faculdade de Ciências 1, 5 (1950); reimpresso em Português (segundo a versão publicada na Técnica em 1950) em Obras, Volume III (1934-1957), p. 301, ver [1].
- [134] A. L. de Mira Fernandes, "Pseudo-estensori", Portugaliae Mathematica 4(1-2), 41 (1943); reimpresso em Obras, Volume III (1935-1957), p. 171, ver [1].
- [135] A. L. de Mira Fernandes, "Grandezze pseudo-estensoriali nella geometria differenziale d'ordine superiore", Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa 2ª série A Vol. II Fase 2ª, 249 (1953); reimpresso em Obras, Volume III (1935-1957), p. 345, ver [1].
- [136] A. L. de Mira Fernandes, "Di alcune proprietà dei pseudo-estensori", Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa 2ª série A Vol. III Fasc 2, 317 (1954-1955); reimpresso em Obras, Volume III (1935-1957), p. 413, ver [1].
- [137] A. L. de Mira Fernandes, "Sugli pseudo-estensori jacobiani", Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa 2ª série A Vol. V Fasc 2, 249 (1956); reimpresso em Obras, Volume III (1935-1957), p. 431, ver [1].
- [138] A. L. de Mira Fernandes, "Estensori jacobiani parziali e derivati", Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa 2ª série A Vol. VI Fasc. 1, 147 (1957); reimpresso em Obras, Volume III (1935-1957), p. 465, ver [1].

- [139] H. V. Craig, Vector and tensor analysis (McGraw-Hill, New York, 1943).
- [140] A. Gião, "The equations of Codazzi and the relations between electromagnetism and gravitation", *Physical Review* 76, 764 (1949).
- [141] R. P. Feynman, "Space-time approach to quantum electrodynamics", *Physical Review* 76, 769 (1949).
- [142] A. Gião, "On the general motion of matter at the cosmological scale", *Physical Review* 80, 755 (1950).
- [143] A. Gião (editor), *Cosmological models* (Centro de Cálculo Científico, Instituto Gulbenkian de Ciência, Lisboa, 1964).
- [144] C. Fiolhais, "António Gião, um eremita científico", *Gazeta da Física* 31(3), 22 (2008).
- [145] A. Mota de Aguiar, "António Gião, apontamento biográfico", *Rerum Natura* (2010), <http://dererummundi.blogspot.com/2010/12/antonio-giao-apontamentos-biograficos.html>
- [146] R. Luís Gomes, *Teoria da relatividade restrita* (Publicações do Núcleo de Matemática, Física e Química, Livraria Sá da Costa, Lisboa, 1938).
- [147] R. Luís Gomes, *A relatividade: origem, evolução e tendências actuais* (Seara Nova, Lisboa, 1938).
- [148] G. Beck, "Zur Theorie binärer Gravitationsfelder", *Zeitschrift für Physik* 33, 713
- [149] G. Beck, "Allgemeine Relativitätstheorie", in *Handbuch der Physik* Volume 4, editor H. Thirring (Springer, Berlin, 1929), p. 299.
- [150] A. J. S. Fitas, A. A. P. Videira, *Cartas entre Guido Beck e cientistas portugueses* (Instituto Piaget, Lisboa, 2004).
- [151] J. Morgado, "Ruy Luís Gomes, professor, e companheiro", *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* 8, 5 (1985).
- [152] J. Morgado, "Para a história da Sociedade Portuguesa de Matemática", *Textos de História e Metodologia da Matemática do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra (CMUC)* 4 (1995).
- [153] D. R. Martins, "As ciências físicas em Coimbra de 1850 a 1900", <http://cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/e48.html> (2000).
- [154] A. J. S. Fitas, "A ciência em Portugal ao longo do séc. XX (cenas exemplares de um percurso incompleto)", *Prelo* 3, 52 (2006).
- [155] A. L. de Mira Fernandes, "Prémio Nobel da Física", *Técnica* 56, 297 (1934); reimpresso em *Obras*, Volume II (1928-1934), p. 445, ver [1].
- [156] A. L. de Mira Fernandes, "Valores médios em mecânica ondulatória", *Técnica* 34, 66 (1931).
- [157] F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielkea, Y. Ne'eman, "Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance", *Physics Reports* 258, 1 (1995).
- [158] A. Einstein, G. Mayer, "Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität. 1" *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften ten zu Berlin*, 541 (1931).
- [159] A. Einstein, G. Mayer, "Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität. 2" *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 130 (1932).
- [160] B. Greene, *O universo elegante: supercordas, dimensões ocultas e a busca da teoria final* (Editora Gradiva, Lisboa, 2000); para o original em inglês, ver B. Greene, *The elegant universe: superstrings, hidden dimensions, and the quest for the ultimate theory* (Vintage books, New York, 2000).
- [161] R. Penrose, *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws*

*(As fotografias que ilustram este artigo foram digitalizadas em casa de Adelaide Mira Fernandes, e gentilmente cedidas por Jorge Rezende, que fez a pesquisa)*