Modelando a poluição luminosa:
a equação de Walker e as suas consequências

Guilherme de Almeida

g.almeida@vizzavi.pt

A poluição luminosa é um efeito conhecido de todos os que se dedicam, com maior ou menor aprofundamento, às observações astronómicas. O seu efeito perturbador da qualidade do céu acaba por se repercutir a quilómetros de distância das povoações. A poluição luminosa pode ser quantificada de diversas formas e neste artigo analisaremos algumas conclusões práticas interessantes, e até surpreendentes, que se podem extrair da equação acima referida.

A equação de Walker

Esta equação pretende quantificar o impacto da poluição luminosa, em termos de degradação do céu num dado local em função da proximidade de povoações de população P e à distância d do local de apreciação do céu. Foi estabelecida pelo astrónomo norte-americano Merle Walker, em 1977.

$$I = 0{,}01\, Pd^{-2{,}5} \Leftrightarrow I = 0{,}01\frac{P}{d^{2{,}5}} \qquad (1)$$

onde I indica o impacto poluidor (acréscimo) no brilho do céu, provocado pelo clarão da proximidade de uma cidade[1], em comparação com o brilho natural do céu, P é a população da cidade (em habitantes) e d a distância em quilómetros entre a cidade e o local de observação.

Os valores de I representam incrementos de brilho: por exemplo I = 0,1 indica um acréscimo de 10 % no brilho do céu, em relação ao que se teria sem poluição luminosa; I = 1 indica um acréscimo de 100 % (duplicação de brilho); I = 6 significa que o brilho foi multiplicado por 7. Se não existisse poluição luminosa seria I = 0 (podendo abreviar-se para I_0), por ser esse o valor de referência em ausência de poluição luminosa[2]. O valor I + 1 indica o factor multiplicador do brilho do céu, ou seja, o quociente brilho artificial/brilho natural. Por comodidade, designaremos esse factor por f e chamemos-lhe arbitrariamente “factor aclarador do céu”. O valor I = 0,1 (o que resulta em f = 1,1) marca o limite em que os efeitos da poluição luminosa começam a tornar-se sensíveis. Veremos seguidamente as razões desta escolha.

Implicações práticas da equação de Walker

Um factor multiplicador (I + 1) igual a 1,1 (ou seja I = 0,1) determina um aumento do brilho de uma

[1] A equação de Walker foi desenvolvida com base em observações realizadas na Califórnia e está optimizada para cidades ou povoações em que o fluxo luminoso utilizado por habitante se situa entre 500 lm e 1000 lm, o que é uma premissa realista. O impacto I poluidor é considerado no local de observação à distância d, no azimute da cidade e a cerca de 45º de altura.

[2] A indicação I = 0, referida como I_0, resulta imediatamente da equação de Walker considerando P = 0 ou uma distância d infinitamente grande. Veremos mais adiante que a partir de uma dada distância de segurança (que não é enorme) o impacto poluidor pode desprezar-se. Não deverá considerar-se que I = 0 significa um céu completamente negro, pois mesmo nos locais mais inóspitos existe sempre um brilho residual natural, muito fraco, proveniente de vários factores: excitação/desexcitação de átomos existentes na alta atmosfera terrestre, provocada pela radiação solar; reflexão e difusão da luz solar em poeiras existentes no plano do sistema solar; difusão, na nossa atmosfera, da luz das próprias estrelas. Os valores de I são acréscimos percentuais a essa referência residual natural. Nos arredores das cidades não é invulgar obter valores de I superiores a 6.

mesma pequena área aparente do céu traduzindo-se no *decréscimo* de magnitude Δm tal que $1{,}1 = 2{,}512^{-\Delta m} \Leftrightarrow -\Delta m \log 2{,}512 = \log 1{,}1$ (onde log designa o logaritmo de base 10), obtendo-se imediatamente $\Delta m = -0{,}04139/0{,}400 = -0{,}103 \approx -0{,}1$ magnitude.

Ou seja, esse aclaramento do céu vai impedir a visão das estrelas que estariam 0,1 magnitude abaixo do limiar de visão a olho nu, num céu livre de poluição luminosa. Por outras palavras, a magnitude limite a olho nu *piora* em 0,1. Isto significa que se num local ideal ela valia (hipoteticamente) 6,5, neste local valerá $6{,}5+\Delta m = 6{,}4$. Como uma variação de 0,1 magnitude é o limiar de detecção do olho humano treinado, justifica-se que $I = 0{,}1$ seja considerado o limite da poluição luminosa sensível. No cálculo acima, utilizámos a equação de Pogson, que já foi objecto de um artigo anterior, onde agora a razão dos "factores aclaradores do céu" já referidos $(I + 1)/(I_0 + 1)$ corresponde à razão entre os brilhos aparentes do céu com (2) e sem (1) impacto poluidor:

$$\frac{B_2}{B_1} = 2{,}512^{(m_1-m_2)} = 2{,}512^{-(m_2-m_1)} \qquad (2)$$

onde B designa brilho por unidade de área e m a magnitude aparente respectiva dessa pequena área de céu; considerou-se $B_2 > B_1$ (situação de aproximação gradual da cidade) e logo $m_2 < m_1$. Assim sendo, $m_1 - m_2 = -\Delta m$.

O mesmo tipo de cálculo aplicado para um factor multiplicador de 1,5 (ou seja $I = 0{,}5$) determinará a perda de 0,44 na magnitude limite[3]. E se for $I = 1{,}512$ (ou seja, $I + 1 = 2{,}512$), os mesmos cálculos anteriores mostram que $\Delta m = -1$: a magnitude limite *piora* 1 unidade e passa por exemplo de 6,5 para 5,5. O leitor pode agora calcular, por exemplo, os valores de I necessários para a perda de 2 ou 3 magnitudes.

Algumas conclusões e previsões utilizando a equação de Walker

1) Efeito da distância e da população

A equação de Walker mostra-nos que o efeito da distância é muito mais influente do que o tamanho (população) da cidade poluidora, como vamos mostrar.

Se uma cidade, a uma dada distância, duplicar de população, uma duplicação de P traduz-se directamente na duplicação de I, ou seja

Dado que $I = 0{,}01\,Pd^{-2,5}$, $P_2 = 2P_1 \Rightarrow I_2 = 2I_1$ (utilizando a equação 1)

Porém, se a mesma cidade, com população constante, estiver duas vezes mais próxima (metade da distância), o impacto poluidor não será o dobro, mas sim cerca de seis vezes, como se mostra seguidamente:

$$I_1 = 0{,}01\frac{P}{d_1^{2,5}} \quad , \; I_2 = 0{,}01\frac{P}{(0{,}5\,d_1)^{2,5}} \Leftrightarrow I_2 = 0{,}01\frac{P}{(0{,}5)^{2,5}\,d_1^{2,5}}$$

Ou ainda

$$I_2 = 0{,}01\frac{P}{0{,}1768\,d_1^{2,5}} \Leftrightarrow I_2 = 0{,}01\frac{5{,}66\,P}{d_1^{2,5}} \Leftrightarrow I_2 = 5{,}66\,I_1 \approx I_1$$

O efeito é ainda mais dramático se ampliarmos o factor de desproporção. Por exemplo, para um factor 5, ou seja, comparando um aumento de cinco vezes para a população

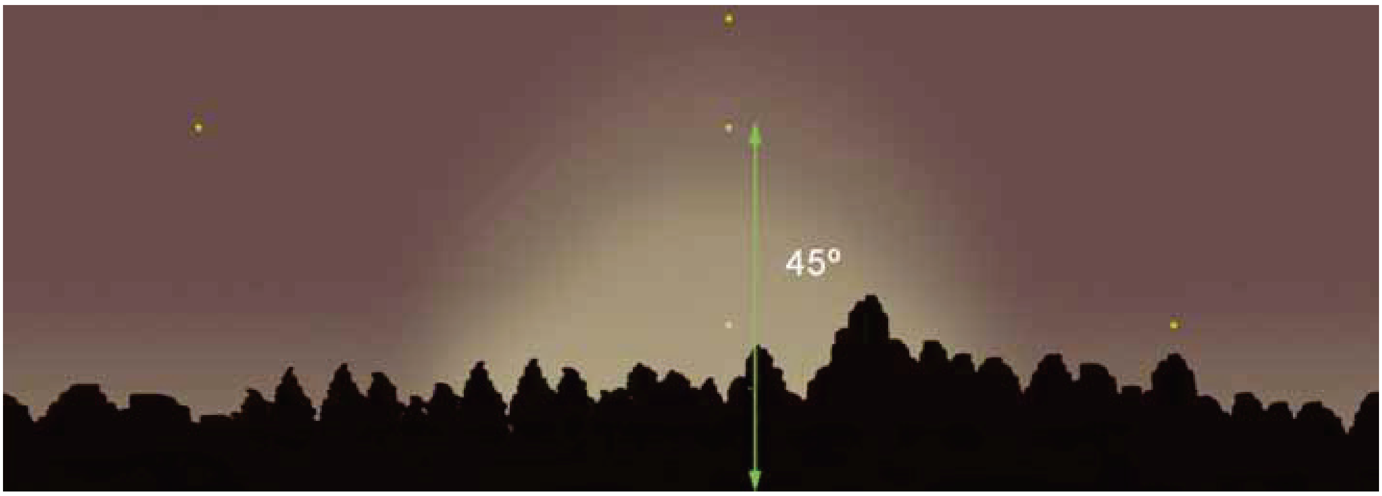

Fig. 1 - Simulação do clarão produzido por uma cidade distante. Uma dada estrela acima da direcção do clarão e a 45° de altura (topo da seta verde) é menos visível do que outra estrela de idêntico brilho, posicionada muito acima ou lateralmente desviada da direcção desse clarão. Se a estrela for pouco brilhante, já não será detectável, devido ao clarão. Na direcção do clarão, mas a menos de 45° de altura, o efeito poluidor é ainda maior.

[3] A magnitude limite é um conceito que traduz o brilho das estrelas mais fracas que ainda podem ser detectadas a olho nu, próximo do zénite, em noites de céu limpo e sem Lua. É um parâmetro utilizado frequentemente como um indicador da escuridão do céu e transparência do ar, no sentido em que as áreas com poluição luminosa e com ar húmido têm geralmente magnitudes limite mais baixas do que locais remotos e de ar seco, ou com altitudes elevadas. Há diferenças significativas de local para local, de acordo com a proximidade de cidades e povoações de dimensão considerável. Em alguns locais de Portugal, a magnitude limite (m_L) é superior a 6,3. Nos subúrbios de uma cidade como Lisboa, m_L será aproximadamente 5, o que significa que só se verão a olho nu cerca de 600 estrelas (menos de 1/4 das que se podem ver de um local sem poluição luminosa significativa). Nos arredores próximos, ter-se-á um valor de m_L próximo de 3,5 e na melhor das hipóteses podem avistar-se umas 120 estrelas. E no coração lisboeta, será normal encontrar valores de magnitude limite próximos de 2,5, permitindo detectar, com dificuldade, cerca de 25 estrelas a olho nu, num dado momento.

(à mesma distância) contra a redução da distância para 1/5 (para igual população). Nesse caso, o factor população determinará um impacto cinco vezes maior e a redução da distância produzirá um impacto 56 vezes maior. Para um factor 10, o incremento do impacto já será de 10 para a população e de 316 para a proximidade!

2) Condição para igual efeito poluidor

Podemos ver o problema segundo outra perspectiva, procurando a razão que deverá existir entre as distâncias comparativamente com a correspondente razão entre populações, para que o impacto poluidor de duas cidades seja igual. Consideremos duas cidades, designadas por A e B, sendo a cidade A com população P_A, distância do local de observação d_A e impacto I_A; a cidade B terá P_B e d_B e I_B. Considerando que elas produzem o mesmo impacto na poluição luminosa do local de observação (ou seja, $I_A = I_B$) verificamos as seguintes conclusões

$$I_A = I_B \text{ significa } \frac{P_A}{P_B} = \frac{d_B^{-2,5}}{d_A^{-2,5}} \text{ ou ainda } \frac{P_A}{P_B} = \frac{d_A^{2,5}}{d_B^{2,5}}$$

A tabela 1 resume e compara diversas situações, onde P_A/P_B é o quociente das populações das cidades referidas por A e B.

É interessante e talvez inesperado verificar que, por exemplo, uma cidade de cem mil habitantes a cerca de 40 km produz tanta poluição luminosa como uma cidade de 1 milhão de habitantes a 100 km. Para comparação, a tabela 2 indica a população de algumas cidades portuguesas.

3) Deterioração do céu expressa como perda de magnitude limite

A conclusão 1 pode ser retrabalhada para dar uma resposta mais adequada à sensibilidade e aos

Tabela 1 - Exemplos de pares distância e população, para igual impacto na poluição luminosa

P_A/P_B	Exemplos de P_A e P_B	d_A/d_B	Exemplos de d_A e d_B
100	1 000 000 e 10 00	6,29	100 km e 15,9 km
10	1 000 000 e 100 000	2,51	100 km e 39,8 km
2	1 000 000 e 500 000	1,32	100 km e 75,8 km

Tabela 2 - Exemplos das populações de algumas cidades portuguesas, para apreciação de situações concretas

Lisboa*	Porto	Braga	Coimbra	Évora	Faro	Beja	Viseu
600 000	443 000	176 000	155 000	56 000	50 000	24 000	22 000

* População apenas de Lisboa. População da Grande Lisboa ≈ 3 milhões de habitantes.

Tabela 3 - Impacto poluidor de uma cidade de 50 000 habitantes, a distâncias sucessivamente menores

Distância (km)	100	80	40	20	10	5
$f = (I + 1)/(I_0 + 1)$**	1,005	1,009	1,05	1,28	2,58	9,94
Perda de magnitude Δm	- 0,0054	- 0,0097	- 0,053	- 0,27	- 1,029	- 2,49

** I_0 designa o impacto artificial nulo, ou seja o céu natural, livre de poluição luminosa.

Tabela 4 - Impacto poluidor de uma cidade de um milhão de habitantes, a distâncias sucessivamente menores

Distância (km)	100	80	40	20	10	5
$f = (I + 1)/(I_0 + 1)$***	1,10	1,17	1,99	6,59	32,6	179***
Perda de magnitude Δm	- 0,10	- 0,17	- 0,75	- 2,05	- 3,78	- 5,63***

*** Estes valores seguidos não são confiáveis dado que já estaremos dentro da cidade, que nos envolve e rodeia, deixando de se situar primordialmente num dado azimute.

interesses e do observador típico: uma resposta em quebra de magnitude. Para calcular a quebra de magnitude, utilizaremos a equação de Pogson (a anterior equação 2).

Para esta pequena cidade, o efeito poluidor é insignificante a partir de cerca de 30 km de distância (para a qual se teria I = 0,10).

4) Determinação da distância de segurança em função da população

Por último, e dado que I = 0,1 é o impacto para o qual a poluição luminosa começa a ser significativa (f = 1+I = 1,1), dado que um Δm = –0,1 corresponde ao limiar de detecção visual de variação de brilho, calculemos de forma generalizada a distância de segurança d_S, para a qual se alcança esta condição, em função da população P de uma cidade.

A partir de $I = 0{,}01\frac{P}{d^{2,5}}$ obtemos $d_S^{2,5} = \frac{0{,}01P}{0{,}1}$ ou $d_S^{2,5} = 0{,}1P$. Aplicando logaritmos (de base 10) ao primeiro e segundo membros, virá $2{,}5\log d_s = -1+\log P \Leftrightarrow \log d_s = \frac{-1+\log P}{2{,}5}$, e por uma conhecida propriedade dos logaritmos $(\log x = a \Leftrightarrow x = 10^a)$, obtemos imediatamente

$$d_S = 10^{\left(\frac{-1+\log P}{2,5}\right)}$$

Utilizando esta expressão para a chamada Grande Lisboa, de população estimada em 3 milhões de habitantes, obtemos

$$d_S = 10^{\left(\frac{-1+\log 3000000}{2,5}\right)}$$

o que nos dará d_S = 155 km.

Seria esta a distância de segurança se a Grande Lisboa fosse a *única* fonte de poluição luminosa. O grande problema é que, em Portugal, quando nos afastamos muito de uma cidade já nos estaremos a aproximar de outra, eventualmente menor. Há que procurar os melhores compromissos.

Existem refinamentos da equação de Walker que levam em conta a curvatura da Terra, visto que uma cidade muito afastada estará abaixo do horizonte do observador, o que ocultará parte do seu clarão de luz. Mas não nos entusiasmemos demasiado: a uma distância de 150 km, uma cidade estará apenas 0,67º abaixo do horizonte do observador, e a diferença a 45º de altura será muito pequena.

Por decisão pessoal, o autor do texto não escreve segundo o novo Acordo Ortográfico.

Links de informação útil:

http://www.ayton.id.au/gary/Science/Astronomy/Ast_light_pollution.htm
http://www.bracrtf.com/documents/LightPollutionStudy.pdf
http://homepages.uwp.edu/frien001/nwlight.pdf

Referências

Para informação sobre a equação de Pogson e cálculos comparativos de magnitudes e brilhos, veja-se:

Guilherme de Almeida— *Introdução à Astronomia e às Observações Astronómicas*, 7.ª Ed., Plátano Editora, Lisboa, 2004.

Para informação sobre a génese quantitativa do conceito de magnitude estelar,veja-se:

Guilherme de Almeida, "Norman Robert Pogson e a escala de magnitudes estelares", *Gazeta de Física*, Vol. 34, Fasc. 3 & 4, 52-57 (2011), acessível na própria Gazeta ou em http://gazetadefisica.spf.pt/magazine/108/pdf

Guilherme de Almeida foi professor de Física e Química (até 2010) em cinco escolas secundárias e no Colégio Militar. Ensinou alunos de todos os níveis (8.º ao 12.º ano), principalmente 12.º ano. É autor de sete livros, entre os quais Sistema Internacional de Unidades (SI), Roteiro do Céu, Telescópios, Galileu Galilei e O Céu nas Pontas dos Dedos, além de mais de 90 artigos. Interessa-se pela divulgação das observações astronómicas e da Física.
www.platanoeditora.pt/?q=N/AUTHORSHOW/92&maid=292