

Efeito de Aharonov-Bohm

Augusto Barroso

É praticamente impossível não iniciar o estudo do electromagnetismo pela electrostática.

Após o estudo da lei de Coulomb é usual definir o campo eléctrico \vec{E} como uma força por unidade de carga. Como nesta altura os alunos já sabem identificar o que são forças conservativas é fácil, invocando este conceito, introduzir o potencial V , tal que:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (1)$$

Infelizmente por vezes não se dá o devido relevo ao facto desta equação ser aproximada. De facto, o campo eléctrico não é conservativo. Com efeito, a equação correcta é:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2)$$

em que \vec{A} é o potencial vector. O rotacional deste vector é o campo magnético \vec{B} , i. e.,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}. \quad (3)$$

As equações (2) e (3) dão-nos os campos eléctrico e magnético como derivadas dos potenciais, V e \vec{A} . Apesar disso, é usual sublinhar o papel dos campos \vec{E} e \vec{B} em detrimento dos potenciais. Alguns livros vão mesmo ao ponto de atribuírem natureza física aos primeiros e relegarem os potenciais para a categoria de grandezas matemáticas auxiliares. Dada uma função $\chi(t, \vec{r})$, as transformações

$$\begin{aligned} \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \\ V &\rightarrow V' = V - \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{aligned} \quad (4)$$

introduzem novos potenciais V' e \vec{A}' . Contudo, a simples substituição destas equações nas equações (2) e (3) mostra que o campo eléctrico e o campo magnético permanecem os mesmos. Esta liberdade na escolha dos potenciais designa-se por liberdade de gauge. O electromagnetismo é pois uma teoria em que existe esta **liberdade de escolha da gauge**. Outras teorias que explicam as interacções forte e fraca gozam também desta propriedade.

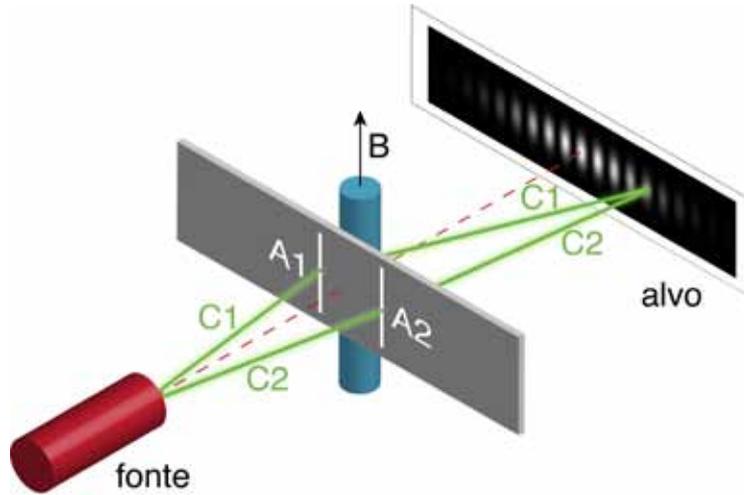
A dinâmica de uma partícula de carga eléctrica e colocada num campo electromagnético é dada pela equação:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (5)$$

onde \vec{p} é o momento linear da partícula e \vec{v} a sua velocidade. Mais uma vez, os potenciais não aparecem. É este facto que justifica a ideia de que os potenciais **não têm significado físico!**

Para verificarmos que esta ideia é errada, consideremos a partícula de carga e descrita por uma equação quântica. Em vez da eq. (5) teremos agora:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \left[\frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + eV \right] |\psi\rangle \quad (6)$$



Neste caso, a dinâmica da carga colocada num campo electromagnético depende directamente dos potenciais. Mesmo o leitor menos familiarizado com a mecânica quântica não deixará de reconhecer em (6) a equação de Schrödinger. Apenas lhe recordo que \vec{p} é agora o operador quântico momento linear, $\vec{p} = -i\hbar\nabla$. Se nesta equação usar para V o potencial devido ao núcleo, $V = -Ze/r$ e desprezar o termo em \vec{A} , obtemos a equação na forma em aparece como ponto de partida para o estudo dos átomos. Esse não será o nosso caminho aqui. O nosso objectivo é mostrar que o aparecimento directo dos potenciais na eq. (6) origina um efeito mensurável.

Consideremos então a célebre experiência da dupla fenda realizada com um feixe de electrões. A figura acima ilustra a montagem. Entre as duas fendas A_1 e A_2 existe um solenóide B , cujo campo magnético no seu interior é perpendicular ao papel. Como sabemos, este campo é nulo no exterior. Na ausência de corrente eléctrica no solenóide, teremos a experiência clássica da dupla fenda. No alvo fluorescente P aparecem riscas alternadamente claras e escuras, cuja explicação em termos de ondas é muito simples. As ondas que seguem os dois caminhos A_1 ou A_2 chegam ao alvo com uma diferença de fase e interferem. Quando esta diferença é de π existe interferência destrutiva e a amplitude da onda resultante é nula. Pelo contrário, nos pontos onde as duas ondas chegam em fase existe reforço e a amplitude é máxima.

Imaginemos então que estamos a realizar esta experiência e que, para uma dada energia do feixe, determinámos as posições das riscas. Podemos perguntar: o que acontecerá se no solenóide passar corrente eléctrica? À primeira vista poderíamos pensar que tudo ficava na mesma. Com efeito, o solenóide está escondido de trás da parede onde estão as fendas de modo que os electrões não passam no seu interior. Poderemos até reforçar a blindagem do solenóide e fazê-lo suficientemente comprido para que as suas extremidades estejam muito para além da zona da parede atingida pelo feixe incidente. Assim, na zona onde passam os electrões (exterior do solenóide) o campo magnético é nulo. Na verdade o que se observa é que a figura de interferência se altera. Continuamos a ter riscas mas a sua posição não é a mesma. Porquê? Porque para o mesmo ponto do alvo, a diferença de fase já não é a mesma.

A mecânica quântica permite mostrar que existe uma fase adicional ϕ dada por

$$\phi = \frac{ie}{\hbar c} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS \quad (7)$$

O integral é um integral de superfície calculado sobre a superfície S limitada pelos caminhos c_1 e c_2 . O valor deste integral é o fluxo do campo magnético através da superfície. É a existência desta fase adicional que altera o espectro de riscas. Este efeito foi previsto em 1959 por Aharonov e Bohm [1] e a primeira experiência foi feita no ano seguinte por Chambers [2].

Comemoramos este ano o cinquentenário desta experiência. Talvez seja tempo dela ser descrita de forma simples nos livros do ensino secundário.

1. Y. Aharonov, D. Bohm, "Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory", *Phys. Rev.* 115, 485 (1959)
2. R. G. Chambers, "Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux", *Phys. Rev. Lett.* 5, 3 (1960)