

Medir $g = (9,83 \pm 0,02) \text{ m/s}^2$ na queda de uma esfera

Rui Agostinho¹, Ana Tavares Sousa²

1. Departamento de Física da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
rui.agostinho@ciencias.ulisboa.pt

2. Escola Secundária Stuart Carvalhais - Agrupamento de Escolas de Massamá
anatsousa@hotmail.com

Resumo

Do programa de Física e Química A do Ensino Secundário consta a atividade laboratorial *Queda livre*, com o objetivo de determinar o valor da aceleração gravítica e verificar que o mesmo não depende da massa. Construiu-se uma montagem que permite obter resultados consistentes, reproduzíveis, com ótima exatidão: $g=(9,83\pm 0,02) \text{ m/s}^2$. Destacam-se pormenores experimentais, muitas vezes descurados, mas que originam resultados de baixa exatidão. É discutido o seu impacto na degradação do resultado de g , que facilmente atinge 12 m/s^2 .

1. Introdução

A atividade laboratorial *Queda livre* integra o programa de Física e Química A do 11.º ano [1]; tem como objetivo determinar o valor da aceleração gravítica terrestre g por medição indireta e verificar que esta grandeza é independente da massa do corpo em queda.

As montagens habitualmente usadas nesta atividade têm limitações que afetam grandemente a exatidão do resultado. Na maioria dos protocolos, são utilizadas fotocélulas que medem o tempo de passagem do corpo pelo feixe de luz e daí calcula-se a sua velocidade nessa posição. A precisão na medição deste tempo é determinante para a exatidão no valor do g .

Construiu-se uma montagem de fácil manuseamento que permite obter resultados consistentes e reproduzíveis, de forma rápida. Para averiguar o impacto das condições experimentais na determinação de g , variou-se a altura entre a posição de largada do corpo e a primeira fotocélula e a sua distância à segunda fotocélula. Averiguou-se o impacto destas alturas nos dados de tempo adquiridos, de

forma a obter o valor de g com uma incerteza nas centésimas, para ter uma exatidão no mínimo às décimas, isto é $9,8 \text{ m/s}^2$.

Outros fatores importantes são as oscilações sofridas pelo corpo na largada, que o desviam da trajetória vertical e o alinhamento desta com as fotocélulas, de modo a que seja exatamente o diâmetro da esfera a interromper o feixe de luz. Estes desalinhamentos conduzem a erros sistemáticos que são discutidos.

2. A montagem experimental

A montagem experimental utilizada consiste em duas fotocélulas colocadas num suporte vertical e em um eletroímã, controlado por uma fonte de tensão variável. O eletroímã segura as esferas de aço usadas como corpo em queda. As fotocélulas encontram-se ligadas a uma interface *ScienceWorkshop 500*, sendo a aquisição de dados feita com o programa *DataStudio*, tudo material da PASCO. A montagem é ilustrada na figura 1. O eletroímã tem um orifício no eixo central que permite a passagem de um fio-de-prumo e a colocação da esfera centrada no eletroímã, de modo a não sofrer desvios à verticalidade da trajetória,



Fig. 1 - Montagem experimental

quando largada (figura 2). A fonte de tensão ligada cria um campo magnético através da bobina, que segura a esfera. Desligando a fonte de tensão, o campo magnético deixa de existir e a esfera cai.



Fig. 2 - Orifício do eletroiman que segura a esfera.

As fotocélulas são posicionadas de modo a que o feixe de luz seja horizontal, isto é perpendicular à trajetória da esfera. É medido o tempo de passagem t_D , do diâmetro D da esfera por cada um dos feixes luminosos e o tempo da trajetória da esfera entre as duas células, t_{12} . Calcula-se a velocidade de passagem da esfera pelo feixe luminoso e a aceleração gravítica, pelas equações (1) e (2), respetivamente, em que $v_2 - v_1$ é a diferença de velocidades de passagem da esfera nas duas fotocélulas.

$$v = \frac{D}{t_D} \quad (1)$$

$$g = \frac{v_2 - v_1}{t_{12}} \quad (2)$$

3. Cuidados experimentais e os erros sistemáticos

3.1. Horizontalidade das fotocélulas

Se o feixe de luz não estiver horizontal, o espaço percorrido pela esfera ao atravessar o feixe será maior do que o seu diâmetro D , medindo-se por isso um tempo de passagem maior que o correto (equação 6). Tal conduz a um valor de

velocidade por defeito (equação 1). Esta horizontalidade é verificada colocando um nível de bolha em cima das fotocélulas (figura 3).

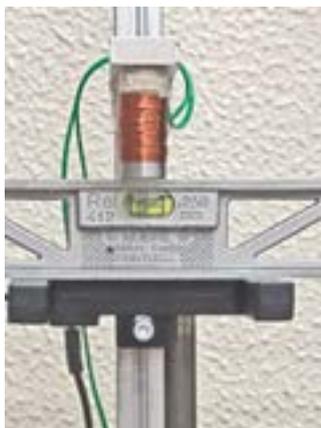


Fig. 3 - Horizontalidade das fotocélulas

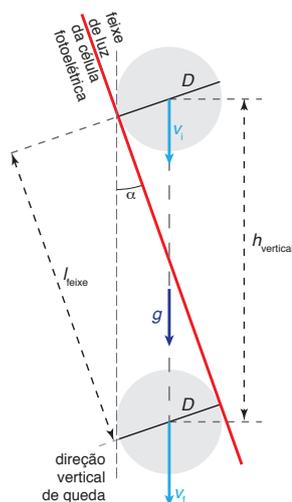


Fig. 4 - Queda vertical de uma esfera que interrompe um feixe de luz inclinado

A figura 4 mostra um esquema da queda vertical da esfera, onde se colocou o feixe de luz inclinado de um ângulo α (exagerado) em relação à vertical. A esfera cai duma altura $h_{vertical}$ enquanto atravessa o feixe de luz, mas percorre uma distância l_{feixe} sobre o mesmo. Porém é sempre o diâmetro D da esfera que atravessa perpendicularmente o feixe (figura 4). A relação entre D e estas distâncias é:

$$l_{feixe} = \frac{D}{\text{tg } \alpha} \quad \text{e} \quad h_{vertical} = \frac{D}{\text{sen } \alpha} \quad (3) \text{ e } (4)$$

Como o movimento é acelerado (velocidade final $v_f > v_i$, velocidade inicial), durante o tempo t_D em que a esfera corta o feixe de luz, as componentes paralelas ao feixe levam a que

$$l_{feixe} = v_{0//} t_D + \frac{1}{2} a_{//} t_D^2 \quad (5)$$

com $v_{0//} = v_i \cos \alpha$ e $a_{//} = g \cos \alpha$. Deduz-se que o tempo t_D em que a esfera interrompe o feixe de luz é:

$$t_D = \frac{1}{g} \left(\sqrt{v_i^2 + 2g \frac{D}{\text{sen } \alpha}} - v_i \right) = \frac{1}{g} (v_f - v_i) = \frac{1}{g} \Delta v \quad (6)$$

O termo entre parêntesis representa o aumento de velocidade da esfera, Δv , enquanto atravessa o feixe de luz. Como a boa horizontalidade do feixe faz $\text{sen } \alpha \approx 1$, Δv é relativamente maior para um v_i pequeno, pois o termo $2gD$ torna-se importante face a v_i . Assim, o maior aumento percentual em v_i acontece na primeira fotocélula, quando a velocidade da esfera é menor (figura 5). Nesta situação e para diâmetros de 35 mm, Δv pode atingir valores de 0,5 m/s (quase 100 % de aumento). Para esferas de 20 mm e na fotocélula inferior Δv pode ser inferior a 0,1 m/s ($\leq 5\%$). Estes valores não são desprezáveis.

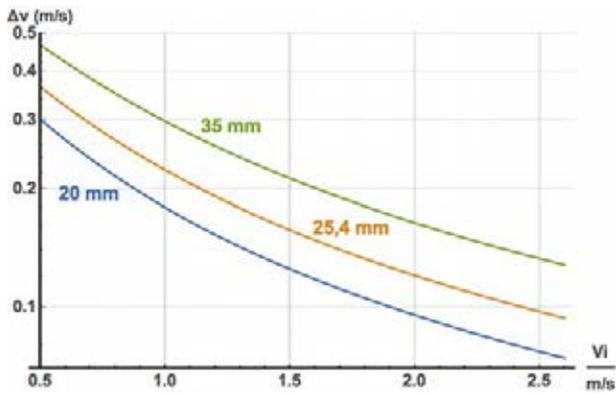


Fig. 5 - Aumento da velocidade Δv da esfera, na passagem na fotocélula, em função da velocidade inicial v_i , para três diâmetros: 35 mm, 25,4 mm e 20 mm (de cima para baixo)

Sendo o movimento uniformemente acelerado, demonstra-se que a velocidade v de passagem na fotocélula, calculada pela equação (1) e usando a equação (6), é dada por

$$v = \frac{D}{t_D} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha (v_f + v_i) = \operatorname{sen} \alpha \left(v_i + \frac{1}{2} \Delta v \right) \quad (7)$$

Por outro lado, uma pequena inclinação do feixe à horizontalidade produz tempo t_D ligeiramente maiores (0,02 %, para $\alpha = 85^\circ$) obtendo-se por isso uma velocidade v menor (0,24 %). Como se vê este fator não é predominante (equação 7).

3.2. Garantir o corte do feixe de luz pelo diâmetro da esfera

No início da queda, a velocidade da esfera não pode ter uma componente horizontal. A largada com o eletroímã resolve esta questão (figura 2). Para tal, torna-se também necessário garantir a verticalidade do eletroímã, para que a esfera não resvale ao longo deste (figura 6a).

Esta verticalidade é também fundamental para que o feixe de luz das fotocélulas seja interrompido pelo diâmetro da esfera. Se o feixe de luz estiver desviado da trajetória de queda (distância d na figura 6b) então será cortado por uma corda $D' < D$, sendo D o diâmetro da esfera. Demonstra-se que a relação entre D e D' é (note-se que $\beta \ll 1$):

$$D' = \sqrt{D^2 - 4d^2} = \sqrt{D^2 - 4(\beta h_{queda})^2} \quad (8)$$

Como D' é usado para medir o tempo de passagem da esfera no feixe, obtêm-se tempos t_D inferiores aos corretos e pela equação (1) calculam-se sempre velocidades por excesso. Note-se que este erro diminui para desvios d e alturas h_{queda} menores. Além disso, a altura de queda até ao feixe aumenta ligeiramente de $\Delta h_{queda} = (D - D')/2$. A partir das equações do movimento uniformemente acelerado deduz-se que a velocidade inicial aumenta de

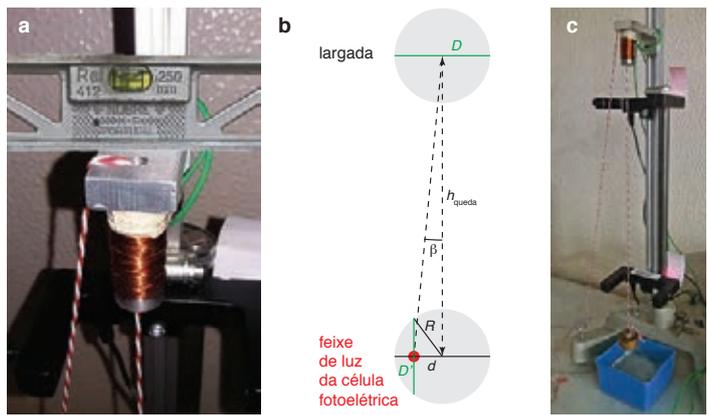


Fig. 6 - Posicionamento das fotocélulas na trajetória de queda da esfera: a) Verticalidade do eletroímã; b) Esquema do corte do feixe de luz numa corda da esfera; c) Interrupção do feixe de luz.

$\Delta v_{D'} \approx \frac{1}{2} g \frac{D-D'}{v_i}$ se $\Delta h_{queda} \ll \frac{1}{2} \frac{v_i^2}{g}$. Estas equações foram sempre usadas nos cálculos e geraram os gráficos das figuras 7 a 9.

Para garantir este alinhamento, utilizou-se um fio-de-prumo, que passa pelo centro do eletroímã e colocou-se papel por detrás dos LED das fotocélulas (figura 6c), que permite visualizar a interrupção do feixe de luz pelo fio-de-prumo, indicando que será o diâmetro da esfera a interrompê-lo.

3.3. Efeito da massa, do diâmetro da esfera e do atrito aerodinâmico

Considerando os sensores alinhados e que a força de atrito aerodinâmico aumenta com o diâmetro e a velocidade, em $(vD)^2$, e a massa é proporcional a ρR^3 , deduz-se que a aceleração causada pelo atrito aerodinâmico é dada por $\frac{3}{4} C_D v^2 \rho_{ar} / (\rho_{esfera} D)$, com o coeficiente de atrito aerodinâmico $C_D = 0,45$. Assim, esta aceleração diminui com o diâmetro e a densidade da esfera, mas aumenta com a sua velocidade. Além deste atrito, existe também a impulsão do ar. A aceleração devida à impulsão subtrai-se à gravítica, resultando numa aceleração efetiva $g_{ef} = g(1 - \rho_{ar}/\rho_{esfera})$.

Em todos os cálculos subsequentes, foram sempre considerados o atrito aerodinâmico e a impulsão do ar. O instante de passagem da esfera por cada feixe foi calculado do mesmo modo que o *DataStudio* o faz: o valor médio entre os instantes de bloqueio e desbloqueio da luz, isto é $t = 1/2(t_i + t_f)$. Com estes dados, obtiveram-se os valores de t_D e v (equação 7). Note-se que v calculado pela equação 7 é diferente da velocidade correspondente ao instante t , alterando ligeiramente o valor de g obtido pela equação 2.

A figura 7 mostra os resultados teóricos para esferas de plástico ($\rho = 1,51 \text{ g/cm}^3$) e aço ($\rho = 7,86 \text{ g/cm}^3$), que caem duma altura de 30 cm. As linhas a tracejado indicam as posições das fotocélulas. Os valores $\Delta v/\Delta t$ são calculados usando as velocidades medidas na passagem por cada fotocélula. A diferença de g a $9,80 \text{ m/s}^2$ na largada da esfera, deve-se à impulsão do ar. Como se pode observar, para a esfera de plástico esta força não é desprezável. A figura 8 mostra a variação de g em função do diâmetro da esfera. Verifica-se que quanto maior o diâmetro,

melhor a exatidão no valor de g . O uso de esferas de aço em vez de borracha ou plástico e com diâmetros entre 30 mm a 40 mm minimiza estes efeitos.

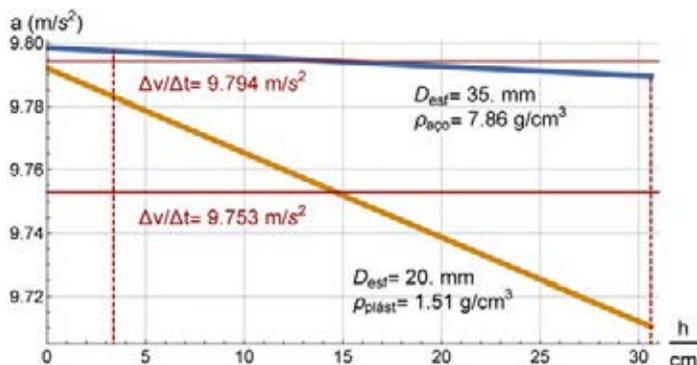


Fig. 7 - Aceleração de esferas de plástico e de aço

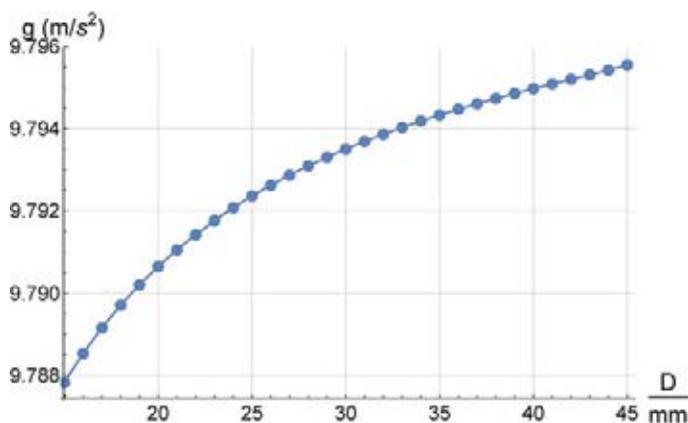


Fig. 8 - g em função do diâmetro da esfera

3.4. Os alinhamentos da montagem na determinação de g

Calcularam-se os tempos de passagem duma esfera de diâmetro D por duas fotocélulas espaçadas de 28,0 cm, estando a primeira afastada de 4,5 cm do eletroímã. Com recurso a todas as equações anteriores determinaram-se valores de g , para diferentes desvios d dos feixes de luz à trajetória vertical de queda, para um ângulo de horizontalidade do feixe $\alpha = 90^\circ$ do feixe. Na figura 8 apresentam-se

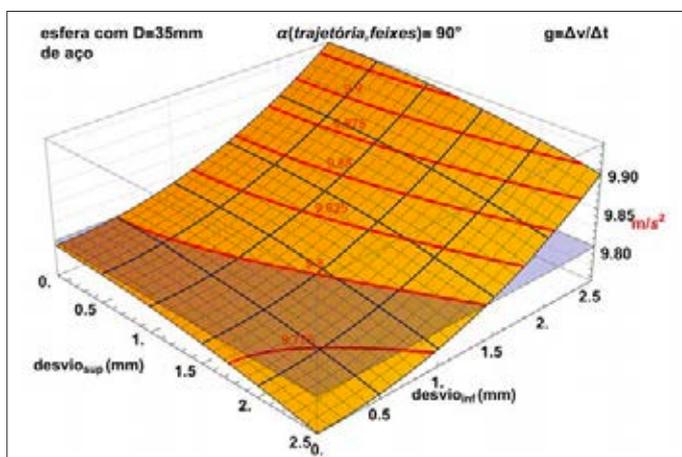
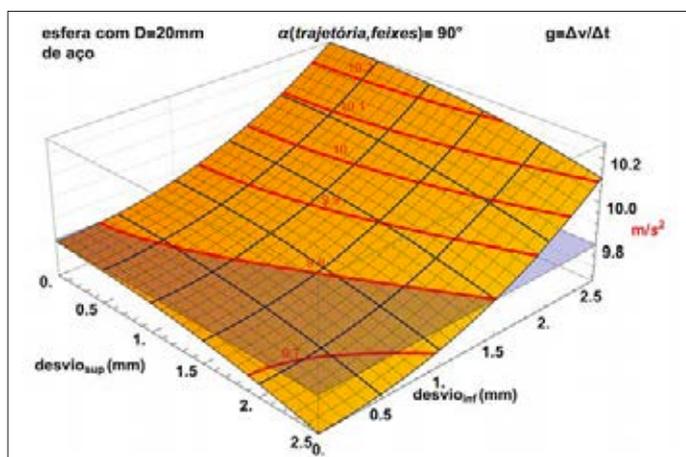


Fig. 9 - Valores de g em função do desvio d (mm) dos feixes superior e inferior ao centro da esfera.

os resultados destes cálculos para as esferas de menor e maior diâmetro. Fazendo $\alpha = 87^\circ$ o valor de g diminui de $\approx 0,02 \text{ m/s}^2$, em todas as situações.

4. Resultados experimentais

Fizeram-se medições de tempos de passagem nas fotocélulas de duas esferas de aço com massas $m_1 = (67,13 \pm 0,01) \text{ g}$ e $m_2 = (174,90 \pm 0,01) \text{ g}$, diâmetros $D_1 = (25,40 \pm 0,01) \text{ mm}$ e $D_2 = (34,95 \pm 0,01) \text{ mm}$. Fizeram-se 40 lançamentos para cada esfera.

4.1. A incerteza na medição do tempo

Grande parte das interfaces acopladas aos sensores estão limitadas a uma precisão de 10^{-4} s . Quanto maior for a velocidade com que a esfera interrompe o feixe de luz, menor será o número de Algarismos significativos registados e, conseqüentemente, menor a precisão no g calculado. Por exemplo: quando a esfera D_1 cai de uma altura de 10 cm, passa na célula mais alta (c1) em 0,0181 s (valor registado pelo *DataStudio*); para a célula inferior (c2), a 50 cm de distância da largada, o programa regista um tempo de passagem $t_{D_2} = 0,0081 \text{ s}$. Tal produz uma incerteza em g da ordem de 0,01 m/s^2 . A mesma situação para a esfera D_2 conduz a $t_{D_1} = 0,0249 \text{ s}$ e $t_{D_2} = 0,0111 \text{ s}$, obtendo-se uma incerteza de 0,001 m/s^2 em g .

Destes dados, verifica-se que é importante usar esferas de diâmetros grandes, distâncias curtas ao ponto de largada e pequenas distâncias entre as fotocélulas. Pelas leis do movimento, a velocidade inicial depende da altura de queda, conduzindo à escrita da equação (6) como

$$t_D = v_i \left(\sqrt{1 + \frac{D}{h \sin \alpha}} - 1 \right) \quad (9)$$

	t_{D1} (s)	v_{1i} (m/s)	t_{D2} (s)	v_{2i} (m/s)	Δt (s)	g (m/s ²)	erro g (m/s ²)	% erro
$m_1 = 67,13$ g $D_1 = 25,40$ cm	0,03007	0,84475	0,01015	2,5028	0,16926	9,796	-0,005	0,05
	0,03112	0,81629	0,01014	2,5051	0,17103	9,875	0,074	0,76
	0,03110	0,81672	0,01017	2,4988	0,17103	9,835	0,034	0,35
$m_2 = 174,90$ g $D_2 = 34,95$ cm	0,04653	0,75113	0,01416	2,4688	0,17548	9,788	-0,013	0,13
	0,04832	0,72332	0,01414	2,4710	0,17768	9,836	0,035	0,36

Tabela1 - Valores experimentais médios para a queda de duas esferas de aço

Para uma altura h menor e um diâmetro D maior, obtêm-se maiores tempos de passagem no feixe de luz, isto é, com mais algarismos significativos. Tendo em conta os fatores descritos e experiências realizadas, escolheram-se distâncias $h_1 \approx 4,7$ cm entre o ponto de largada e a primeira célula, e $h_{12} \approx 28$ cm entre as duas células.

4.2. Resultados obtidos

A velocidade de passagem das esferas em cada célula foi calculada pela equação (1), vulgarmente usada, mas também utilizando a equação (6), que requer uma solução numérica do valor de v_i em cada caso, usando $\alpha = 90^\circ$. Os resultados finais entre os dois tratamentos pouco diferem. Optámos por apresentar aqui os resultados referentes ao uso das equações (1) e (2) por serem os trabalhados na prática – Tabela 1.

O valor médio de g obtido nestas cinco medições é de $(9,83 \pm 0,02)$ m/s², verificando-se também que é independente da massa das esferas. Este valor é coerente com o obtido com um gravímetro [2] ($g = (9,800\ 71 \pm 0,000\ 02)$ m/s²) na sala do 4.º piso do edifício C8 da FCUL no Campo Grande, em Lisboa.

5. Conclusão

Mostrou-se que para a obtenção de valores de g com uma precisão às centésimas e uma exatidão média superior a 99,5 % devem-se ter os cuidados experimentais descritos: usar corpos esféricos, de massa volúmica superior a pelo menos 5 g cm⁻³, fazer os alinhamentos horizontais e verticais em toda a montagem experimental, escolher alturas entre a posição de largada e a primeira fotocélula de cerca de 5 cm e entre fotocélulas até 30 cm; a montagem deve estar sobre uma base robusta e estável, para evitar oscilações e flutuações nas medições. Os cuidados experimentais requeridos minimizam os erros sistemáticos mas não os eliminam. A figura 8 evidencia que mesmo com a montagem perfeitamente alinhada o valor de g está sempre afetado de um desvio ao valor de referência. Tal deve-se ao próprio processo de medição e cálculo das velocidades de passagem da esfera pelos feixes de luz.

Referências

1. C. Fiolhais *et al*, *Programa de Física e Química A, 10.º e 11.º anos - Componente de Física*, Ministério da Educação e Ciência (2014).
2. Carlos M. Antunes (FCUL, comunicação privada, 2013) com dados do Instituto Geográfico Português, Direção de Serviços de Geodesia (2004)
3. Kurt Wick e Keith Ruddick: *An accurate measurement of g using falling balls*, Am. J. Phys. 67, 11 (nov. 1999)
4. R. Agostinho, A. T. Sousa, *Como medir sempre $9,81 \pm 0,05$ m/s² na queda duma esfera*, 26.º Encontro Ibérico para o Ensino da Física, 20.ª Conferência Nacional de Física, Univ. Minho, Braga, (set. 2016)



Ana Tavares Sousa é doutorada em Química pela FCUL, tendo feito investigação experimental na área da Química-Física, num grupo de Termodinâmica e Propriedades de Transporte. Há bastantes anos que leciona Física e Química A no Ensino Secundário.

Atualmente interessa-se pela didática da Física e da Química experimental e pela sua divulgação.



Rui Agostinho é doutorado em Astronomia e Astrofísica pela Universidade da Carolina do Norte em Chapel Hill, EUA, É Professor Auxiliar na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, onde se licenciou em Física. É investigador do Instituto de Astrofísica e Ciências do Espaço na área da astronomia

galáctica. Há muito tempo que desenvolve atividades ligadas com a didática e as metodologias de ensino da Física e Astrofísica.