

Quantas faces tem a fita de Moebius?

Material:

- Folhas de papel A4
- Tesoura, faca de cortar papel
- Fita cola
- Lápis e caneta de feltro

A matemática e a física sempre andaram de mãos dadas: a física serve-se da matemática para explicar a natureza e a matemática inspira-se na física para propor novos modelos. Em 2016, o prémio Nobel da física foi atribuído a três cientistas que utilizaram a topologia, uma área da matemática, para descrever novas formas da matéria. A topologia estuda as formas, em particular as propriedades de um objeto quando o esticamos, fletimos, engelhamos ou torcemos, mas sem o rasgar, cortar ou colar. Vamos descobrir alguns objetos com propriedades muito interessantes.



Fig. 1 - Fita com marcação ao meio preparada para ser usada



Fig. 2 - Preparação de uma fita de 60 cm

Começa por construir uma fita de Moebius. Pega numa folha A4, dobra-a ao meio ao longo do comprimento e corta-a em duas. Se tiveres vincado bem o papel consegues rasgá-lo pelo vinco obtendo duas tiras direitas, se não, usa um canivete ou uma tesoura. Volta a dobrar cada tira ao meio e a cortar pelo vinco, obtendo quatro tiras de cerca de 5 cm por 30 cm. Com um lápis, traça uma linha marcando o meio de

cada fita, de ambos os lados (Fig. 1). Vais precisar de fita cola para construir a tua fita de Moebius. Junta duas das fitas pela largura colando-as com dois pedaços de fita cola da largura da fita, um pela frente e outro por trás. Ficaste com uma tira com cerca de 60 cm por 5 cm (Fig. 2). Toma agora as duas extremidades da fita, torce a fita dando-lhe meia volta, e cola as duas extremidades com dois pedaços de fita cola, tendo o cuidado de manter a tira torcida (Fig. 3). A tua fita de Moebius está pronta!



Fig. 3 - Fita de Moebius

Vamos explorar as propriedades deste objeto. És capaz de dizer quantas faces tem a fita?

Antes de responderes, toma uma das fitas de papel que ainda não usaste: quantas faces tem esta fita? Se com uma caneta de feltro vermelha fores de uma extremidade à outra ao longo da linha marcada no centro da fita, ficas com um traço vermelho apenas numa das faces da fita. A fita tem duas faces, a de cima e a de baixo, e a tua caneta vermelha apenas marcou a face de cima.

Faz agora o mesmo na tua fita de Moebius: marca uma cruz no ponto onde começares a traçar o risco, e desenha com a caneta de feltro vermelha um risco ao longo da fita, seguindo o traço marcado a lápis. O que aconteceu de estranho? O risco vermelho termina na cruz onde começaste, depois de dares duas voltas! Toda a fita ficou marcada por um risco vermelho! A fita de Moebius apenas tem uma face.

Também na natureza, algumas partículas que entram na constituição da matéria têm uma propriedade semelhante: o *spin*. Só depois de o *spin* sofrer duas rotações completas é que a partícula volta ao estado inicial. Os eletrões, prótons e neutrões são algumas destas partículas.

A fita de Moebius tem outras propriedades interessantes. Com uma tesoura, corta-a ao meio ao longo da linha que traçaste. O que obténs? Uma única argola!



Fig. 4 - Argola simples sem torção

Se tivesses construído uma argola sem a torceres (Fig. 4) e a cortasses ao meio, quantas argolas obterias? Experimental! Ao contrário da fita de Moebius, neste caso terias duas argolas.

Vamos explorar outros objetos e ver que o número de meias voltas ou voltas inteiras com que torces as fitas dá origem a objetos diferentes. Corta novamente uma folha A4 em quatro fitas com cerca de 30 cm por 5 cm. Cola-as duas a duas, pelo lado menor, com fita cola. Forma com as duas tiras compridas uma cruz, como na Fig. 5, e com fita cola fixa-as. Agora, junta duas das pontas opostas, formando uma argola sem torção, e cola as pontas com fita cola. Une as outras duas extremidades, mas com o cuidado de dar uma meia volta numa das pontas antes de as colares (Fig. 6, painel da direita).

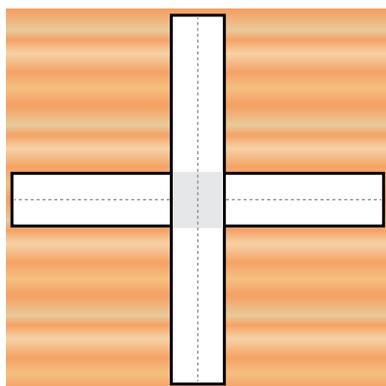


Fig. 5 - Duas fitas em cruz coladas uma à outra no centro

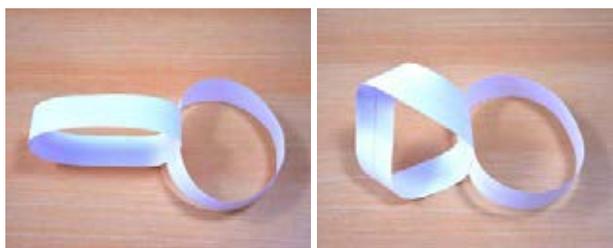


Fig. 6 - Superfície com duas argolas, ambas sem torção (esquerda), uma com meia volta e outra sem torção (direita)

Constrói mais duas cruzes com quatro fitas semelhantes às anteriores. Numa delas, junta as pontas opostas sem as torceres duas a duas: ficas com duas argolas unidas sem torção (Fig. 6 painel da esquerda). Na outra cruz, cola as pontas opostas duas a duas, mas tendo o cuidado de, em cada argola que formares, teres dado uma meia volta. Corta pela linha marcada no meio das fitas, tendo o cuidado de não sair fora da linha e, em especial, de não dar nenhum golpe na borda das argolas. O que é que obténs de cada uma das cruzes? O que é que as distingue? Qual delas deu origem a duas argolas ligadas? E a um quadrado?

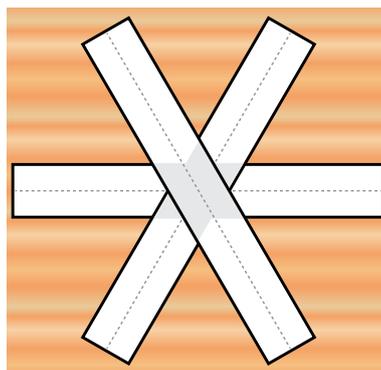


Fig. 7 - Preparação em estrela de três fitas coladas pelo centro. Todas as fitas têm marcação no centro.

Podes fazer outras experiências. Por exemplo, em vez de formares uma cruz com duas fitas, forma uma estrela com três fitas, fixando-as no centro com fita cola (Fig. 7). Agora cola as pontas opostas duas a duas de modo a teres duas argolas não torcidas e uma argola com uma meia volta. Corta ao longo do risco que passa pelo meio das fitas. O que obténs no final? E se tivesses dado uma volta completa em vez de meia volta? Em qual dos casos obténs um hexágono? E dois triângulos ligados?

Espero que tenhas gostado! A matemática pode ser muito divertida, mas também muito útil e ajuda-nos a perceber o mundo que nos rodeia!

Sugestões: Em vez de fitas com 60 cm por 5 cm podem-se utilizar outras dimensões, como 30 cm por 2,5 cm, obtidas cortando ao comprimento uma folha A4 em oito partes. Para crianças pequenas poderão ser demasiado pequenas.

Bibliografia

1. David Parker, *Hands-on Maths*, <http://www.davidparker.com/janine/mathpage/topology.html#LESSON1>
2. *MATH and SCIENCE with my KIDS*, <https://toomai.wordpress.com/2008/03/30/math-with-scissors/>
3. D. Castelvecchi, "The strange topology that is reshaping physics", *Scientific American* (artigo reproduzida da revista *Nature* de 20 de Julho de 2017) <https://www.scientificamerican.com/article/the-strange-topology-that-is-reshaping-physics>