O CIRCUITO ELÉCTRICO MÍNIMO ANÁLOGO DA MOLA PESADA

J. MIGUEL NUNES DA SILVA

Laboratório de Física da Universidade do Porto
Pr. Gomes Teixeira, 4000 Porto

A bem conhecida e fecunda analogia electromecânica é aplicada ao caso da mola de massa não desprezável.

É mostrado que, pelo menos em teoria, esta pode ser representada por uma única malha LC sendo facilmente calculadas as frequências de ressonância do sistema mecânico original.

Este tratamento revela-se uma forma natural de fazer uma primeira abordagem à técnica de renormalização.

Uma abordagem elementar à técnica de renormalização

1. Introdução

São bem conhecidas as vantagens de representarmos um sistema mecânico pelo seu análogo eléctrico. De entre elas contam-se: fácil montagem de forma a evidenciar um aspecto particular da física do sistema; fácil identificação de efeitos de ressonância; e fácil acesso a uma diversidade de medidas. Um exemplo simples disto é o circuito LC usado como análogo de uma idealização do sistema massa/mola (fig. 1). Esta analogia é formal e expressa com base na equação diferencial

$$R\frac{d^2}{dt^2}X + TX = U\,cos\,\omega t \qquad (1)$$

através da correspondência (R, T, U, X) $\Leftrightarrow$ (M, K, F_0, x) $\Leftrightarrow$ (L, 1/C, ωV_0, i), onde

M ≡ massa suspensa na mola
K ≡ rigidez da mola
F_0 ≡ amplitude da força excitadora
x ≡ elongação da mola em relação ao equilíbrio
L ≡ inductância da bobina
C ≡ capacidade do condensador
V_0 ≡ amplitude da tensão excitadora
i ≡ corrente eléctrica na malha
ω ≡ 2p vezes a frequência da força ou tensão excitadoras, supostas sinusoidais.

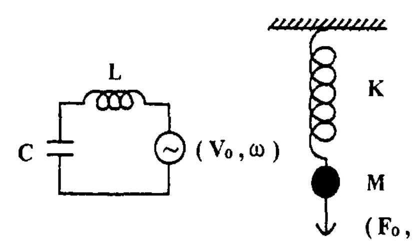

Fig. 1 — Circuito LC e sistema massa-mola análoga com as correspondentes tensão excitadora $V(t) = V_0 \cos \omega t$ e força excitadora $F(t) = F_0 \cos \omega t$.

O problema das oscilações de uma massa M suspensa numa mola pesada ou massiva (em que a sua própria massa «m» não é desprezada) é um velho problema [1], fonte de muitos pontos de vista: veja-se J. T. Cushing [2], e as primeiras doze referências aí citadas; e, ainda, J.T. Cushing [3] e J. M. Nunes da Silva [4]. Como é bem conhecido [1] este sistema tem um número infinito, mas discreto, de frequências de ressonância (ou modos próprios de oscilação) expressos pelas soluções da equação

$$\frac{m}{M} = \left(\omega\sqrt{\frac{m}{M}}\right) tg\left(\omega\sqrt{\frac{m}{M}}\right). \qquad (2)$$

No limite m « M, a mola comporta-se como se a sua massa m contribui-se para uma massa efectiva de M + m/3.

O circuito eléctrico análogo à mola massiva poderia ser um sistema contínuo — um cabo coaxial — como indica a Fig. 8 de [2], exigindo a operação frequências na região dos megahertz. Contudo [4], por exemplo, sugere uma representação discreta de uma série de N » 1 pequenas molas, de rigidez S = K N, acoplando outras tantas pequenas massas de valor r = m/N. Essa representação, que é ilustrada na Fig. 2a, tem, do ponto de vista macroscópico, os ingredientes necessários de elasticidade e de distribuição uniforme de massa [4]. Ela exprime-se em três tipos de equações para os deslocamentos x_n em relação às posições de equilíbrio:

- para a ponta fixa

$$X_n = 0 \,; \tag{3.a}$$

- para as massas intermédias n = 1, 2, ..., N − 1:

$$\rho\, \ddot{x} = S\,(x_{n-1} - 2\,X_n + X_{n+1}) \,; \tag{3.b}$$

- e para a massa M acoplada à mola massiva:

$$M\, \ddot{x}_n = S\,(x_{N-1} - x_N) + F_0 \cos \omega t \,. \tag{3.c}$$

Do que foi dito em torno da eq. (1), e da aplicação das leis de Kirchoff, facilmente se conclui que o circuito da Fig. 2b é o análogo da referida representação discreta. Com efeito, se a corrente i_n atravessar a inductância à esquerda do nodo n, temos:

- para a inductância da esquerda:

$$i_0 = 0 \,; \tag{4.a}$$

- para uma inductância intermédia:

$$L_0 \frac{d^2}{dt^2}\, i_n = \frac{1}{C_0}\,(i_{n-1} - 2\, i_{n+1}) \,; \tag{4.b}$$

- e para a inductância L_F da ponta direita:

$$L_F \frac{d^2}{dt^2}\, i_N = \frac{1}{C_0}\,(i_{N-1} - i_N) + \omega V_0 \cos \omega t \,. \tag{4.c}$$

(a diferença de fase em (4.c) foi esquecida por irrelevante). É pois patente entre (3) e (4) uma analogia caso se faça corresponder M a L_F e se defina

$$L_0 \equiv L/N \tag{5.a}$$

e

$$C_0 \equiv C/N \,, \tag{5.b}$$

correspondendo estas definições (num sentido fácil de precisar) à inductância e capacidade por unidade de comprimento do cabo coaxial descrito em [2].

Neste artigo procuraremos responder à questão do número mínimo de elementos para o circuito eléctrico análogo. Como veremos estes «contam-se pelos dedos de uma mão», o que constitui uma vantagem (pelo menos no

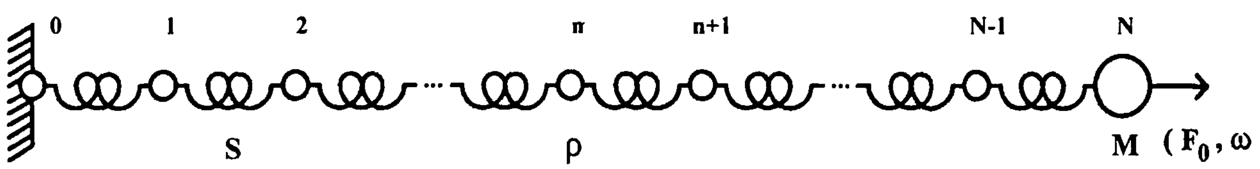

Fig. 2a — Representação discretizada para a mola pesada com uma massa M acoplada no extremo oposto à ponta fixa.

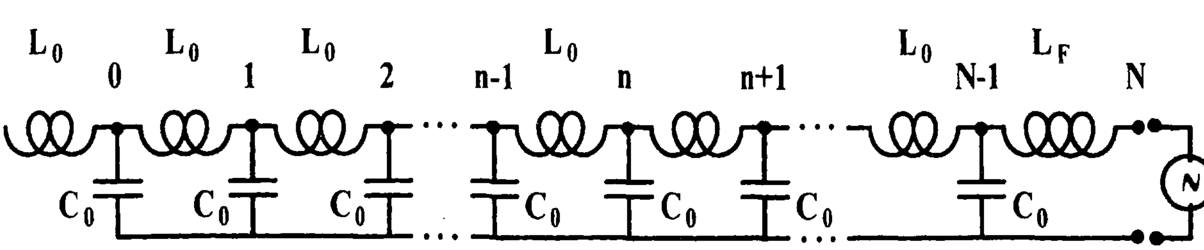

Fig. 2b — Circuito eléctrico equivalente. A tensão aplicada é sinusoidal de amplitude V_0 e frequência ω.

ponto de vista da teoria) a acrescentar às enunciadas no início desta introdução.

Uma primeira redução a um circuito equivalente ao da Fig. 2b, mas com apenas N/2 elementos LC, é conseguido na Secção 2 por aplicação da bem conhecida transformação $\Pi \rightarrow$ **T** para circuitos quadrupolares. Fazendo uso da notação da Fig. 3, das leis de associação de impedâncias, e considerada a simetria, basta estabelecer a igualdade de impedâncias:

i) entre os nodos 1 e 3:

$$\left(2\,j\omega\,\Delta L\right)^{-1} = \left(\frac{2}{j\omega\,C_0}\right)^{-1} + \frac{1}{j\omega\,L_0}$$

(com $j^2 = -1$), i. e.,

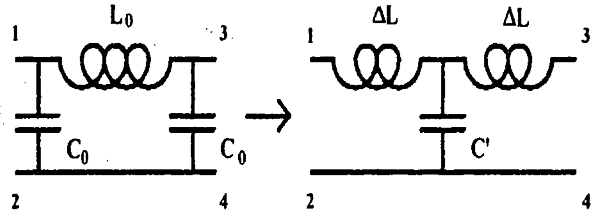

Fig. 3 — Transformação $\Pi \rightarrow$ **T** para o caso simétrico.

$$\Delta L = \frac{L_0}{2 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \qquad (6.a)$$

e

$$\omega_0 \equiv 1/\sqrt{L_0 C_0} = N/\sqrt{L\,C} \qquad (7)$$

ii) entre os nodos 1 e 2:

$$\left[j\omega\,\Delta L + \frac{1}{j\omega C'}\right]^{-1} = \left[j\omega\,L_0 + \frac{1}{j\omega\,C_0}\right]^{-1} + j\omega\,C_0\ ,$$

i.e.,

$$C' = C_0\left[2 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] \qquad (6.b)$$

Na Secção 3 aplicaremos sucessivamente as relações de passagem (6.a,b) reduzindo repetidamente a metade o número de elementos LC do circuito equivalente: por isso escolhemos N = 2p, com p inteiro. Na Secção 4 faremos a sua redução máxima a uma simples malha LC.

2. Redução do circuito

Comecemos por realçar dois factos importantes sobre o nosso circuito da Fig. 2b. No lado esquerdo do nodo «0» a inductância aí residente, e mantida apenas para tornar mais clara a analogia, é irrelevante do ponto de vista eléctrico. Ela constitui, digamos assim, uma «ponta morta». Não sendo atravessada por qualquer corrente é indiferente a alteração do seu valor pela aplicação da transformação $\Pi \rightarrow$ **T** ao quadrupolo inserido entre os nodos «0» e «1». No outro lado, notemos que a fonte de tensão não é afectada pelo processo de redução mantendo as suas características: em particular ω é fixo.

Para reduzir o circuito da Fig. 2b fez—se a aplicação, em malhas alternadas, da transformação $\Pi \rightarrow$ **T** formalizada em (6.a,b). Cada quadrupolo ' compreendido entre o nodo «2n» e «2n + 1», com n = 0, 1, 2, ..., N/2 – 1, é transformado num quadrupolo **T** (veja-se a Fig. 4a).

Resulta, assim, o aparecimento de novos condensadores de capacidades C' dadas directamente por (6.b). De forma idêntica, surge uma nova inductância L', resultado de duas contribuições adicionais dadas por (6.a):

$$L' = L_0 + 2\,\Delta L = L_0\frac{4 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{2 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \qquad (8)$$

O caso da inductância da ponta direita é diferente, havendo só uma contribuição adicional DL, pelo que se define

$$L'_F = L_F + 2\,\Delta L\,. \qquad (9)$$

Temos, se atentarmos na Fig. 4a, que o nosso circuito eléctrico se simplificou drásticamente. De facto, obtemos,

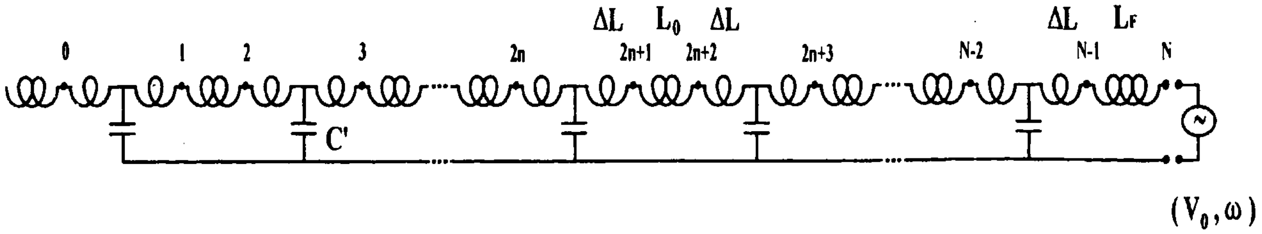

Fig. 4a — Circuito reduzido por aplicação da transformação $\Pi \rightarrow$ **T** de forma alternada.

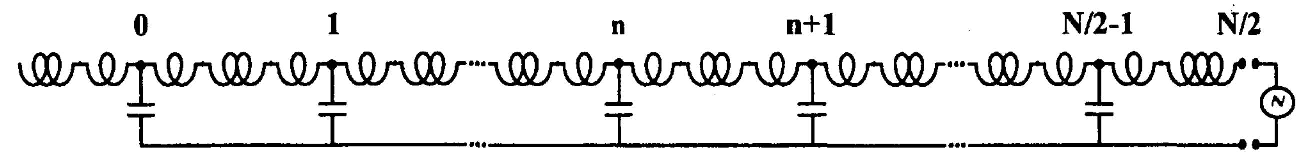

Fig. 4b — Redefinição dos índices identificadores dos nodos para o circuito da Fig. 4a.

por redefinição dos nodos segundo indica a Fig. 4b, uma representação idêntica à inicial, expressa na Fig. 2b, mas com apenas metade dos elementos. Notemos ainda, partindo de (6.b) e (8), que, para este novo circuito, o equivalente da frequência característica ω_0, definida em (7), vem dado por

$$\omega_0'^2 = \omega_0^2 \left[4 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^{-1} \tag{10}$$

3. Redução sucessiva

Esta última expressão (10) pode adquirir uma forma muito simples (veja-se por exemplo [4]) se fizermos

$$\frac{\omega}{\omega_0} \equiv 2\, sen\, \chi\, , \tag{11}$$

o que é reminiscente da relação de dispersão para ondas numa cadeia linear infinita de massas e molas. De facto (10) toma a forma

$$\chi' = 2\chi \tag{12}$$

e as relações (6.b) e (8.b) ficam:

$$C' = 2\, C_0 \cos 2\chi \tag{13.a}$$

$$L' = 2\, L_0 \frac{\cos^2 \chi}{\cos 2\chi}\, . \tag{13.b}$$

Quanto à inductância terminal L_F basta notar, para o que segue, que de (8.a) e (9) se conclui

$$2\, L'_F - L' = 2\, L_F - L_0\, . \tag{14}$$

Vimos, no final da secção anterior, que o circuito obtido por redução era idêntico ao inicial, mas com apenas metade dos elementos. Por isso estamos autorizados a repetir o mesmo procedimento de redução, digamos k vezes. O circuito resultante passa, em consequência de (12) e (13.b), a ser constituído por inductâncias de valor

$$L^{(k)} = L_0 \frac{\cos\chi}{\cos 2^k \chi} \prod_{i=0}^{k-1} 2 \cos 2^i \chi$$

$$= L_0 \frac{tg\, 2^k \chi}{tg\, \chi}\, , \tag{15}$$

onde se usa o resultado em apêndice. Os novos condensadores terão um valor resultante da iteração de (13.a):

$$C^{(k)} = C_0 \prod_{i=0}^{k-1} 2 \cos 2^{i+1} \chi$$

$$= C_0 \frac{sen\, 2^{k+1} \chi}{sen\, 2\chi}\, . \tag{16}$$

Quanto à inductância terminal, a invariância do binómio $2\, L_F^{(i)} - L^{(i)}$, expressa por (14),

$$L_F^{(k)} = \frac{1}{2} L^{(k)} + L_F - \frac{1}{2} L_0$$

$$= L_F + \frac{1}{2} L_0 \left[\frac{tg\, 2^k \chi}{tg\, \chi} - 1 \right]\, , \tag{17}$$

fazendo uso de (15).

As equações (15), (16) e (17) exprimem os valores das inductâncias, condensadores e inductância terminal de um circuito com a forma do da Fig. 4a com 2^{p-k} nodos.

4. Redução máxima

Somos, assim, levados a concluir que existe um limite máximo para o número de reduções. De facto, no caso k = p o circuito reduzido é mínimo, sendo constituído apenas por uma malha LC (tal como a fig. 1) com componentes de valores $C^{(p)}$ e $L_F^{(p)}$ dados por (16) e (17). A correspondente frequência de ressonância vem então dada por

$$\omega = 1 \Big/ \sqrt{C^{(p)}\, L_F^{(p)}}\, . \tag{18}$$

Esta equação pode ser escrita de forma explícita se notarmos que w_0 é, devido a (7), proporcional a $N \gg 1$. Então resulta de (11)

$$\chi \approx \omega \frac{\sqrt{LC}}{2N} \,, \tag{19}$$

que, substituído em (16) e (17), torna

$$C^{(p)} = C \frac{sen\,\omega\sqrt{LC}}{\omega\sqrt{LC}} \tag{20}$$

e

$$L_F^{(p)} = L_F + L \frac{tg\frac{\omega}{2}\sqrt{LC}}{\omega\sqrt{LC}} \,. \tag{21}$$

Assim, a eq. (18) toma a forma já nossa familiar

$$\frac{L}{L_F} = \left(\omega\sqrt{LC}\right) tg\left(\omega\sqrt{LC}\right) \,. \tag{22}$$

De facto, fazendo uso da analogia electromecânica enunciada na Introdução ($L_F \to M$, $L \to m$, $C \to 1/K$) recuperamos, a partir de (22), a muito celebrada expressão (2).

5. Conclusão

A mola massiva com massa acoplada é um sistema surpreendente, quer pela diversidade da Física que revela quer pela quantidade de métodos que permite aplicar [2-4].

O processo de redução do análogo eléctrico surge como o primeiro ponto de contacto com um conhecido método. Este estende os conceitos da análise dimensional e a noção de similaridade (patente entre os modelos ou circuitos representados nas Figs. 2b e 4a) [4]. De facto esse método, conhecido por renormalização e que valeu em 1982 o prémio Nobel ao físico americano Kenneth G. Wilson, apenas necessita de um outro ingrediente, o da mudança de escala de comprimentos [4], que, no nosso caso, se traduz na redefinição de índices (coordenadas) operada na Fig. 4b e que pode ser interpretada como uma duplicação do espaçamento entre os elementos do circuito.

A linguagem da analogia electromecânica apresenta-se, pois, como uma forma natural de introduzir técnicas e conceitos que tiveram a sua génese na electrodinâmica quântica (Gell-Mann e Low, 1954). Estes levaram um grande impulso durante a aplicação às transições de fase (Kadanoff, 1967), e estabeleceram-se como método de aplicação sistemática com os trabalhos de Wilson (1971). Em [5] podem ser encontrados alguns desenvolvimentos e aplicações recentes.

Apêndice

Neste pequeno apêndice explicitaremos a transformação trigonométrica mais elaborada empregue neste artigo:

$$\prod_{i=0}^{n-1} 2\cos 2^i\chi = \frac{sen\,2^n\chi}{sen\,\chi} \,.$$

Para tal basta notar que

$$\begin{aligned}
sen\,\chi \;\; 2\cos\chi \;\; 2\cos 2\chi \;\cdots\; 2\cos 2^{n-1}\chi &= \\
&= sen\,2\chi \;\; 2\cos 2\chi \;\cdots\; 2\cos 2^{n-1}\chi \\
&= sen\,2^2\chi \;\; 2\cos 2^2\chi \;\cdots\; 2\cos 2^{n-1}\chi \\
&= sen\,2^{n-1}\chi \;\; 2\cos 2^{n-1}\chi \\
&= sen\,2^n\chi \,.
\end{aligned}$$

Referências

[1] COULSON, C. A. e Jeffrey, A. I. — *Waves* (Longman, Londres, § 43. (1977).

[2] CUSHING, J. T. — *The spring-mass system revisited.* Am. J. Phys. **52**, 925-933. (1984).

[3] CUSHING, J. T. — *The method of characteristics applied to the massive spring problem.* Am. J. Phys. **52**, 933-937. (1984).

[4] NUNES DA SILVA, J. M. — *Renormalized vibrations of a loaded spring.* Am. J. Phys. (aceite para publicação)

[5] CLERC, J. P.; GIRAUD G.; LAUGIER, J. M. e LUCK, J. M. — *The electrical conductivity of binary disordered systems, percolation clusters, fractals and related models.* Adv. Phys. **39**, 191-309. (1990).