

PORQUE SE CALCULA COM RADIANOS?

MÁRIO J. PINHEIRO

Departamento de Física e Centro de Electrodinâmica
do Instituto Superior Técnico, 1096 Lisboa Codex

Os alunos colocam frequentemente questões de grande perspicácia e que são fonte de reflexão para os professores. Uma delas e que não nos parece trivial é porque se deve calcular com os ângulos com radianos e não em graus? É a esta questão que procuramos responder. Os ângulos são grandezas geométricas adimensionais, perfeitamente determinados pela razão de dois comprimentos. Houve controvérsia em certa altura sobre se se deveria considerar o ângulo uma grandeza fundamental. Foi na 11.^a *Conférence Générale de Poids et Mesures* (CGPM), em 1960, que se estabeleceu o *Sistema Internacional de Unidades* (SI) que preconizou o ampere como unidade de intensidade de corrente, retirando ao ângulo a qualidade de grandeza com dimensões (Denis-Papin e Castellán, 1970; Almeida, 1988; Baptista, 1994).

A divisão do plano em 360 partes igualmente separadas deve-se à técnica de contagem inventada pelos Sumérios, que fundaram a primeira civilização conhecida. Contavam até 12 pelas falanges e, quando era necessário prolongar a contagem, dobravam um dedo da outra mão. Assim, podiam contar facilmente até 60 (Struik, 1989).

É igualmente interessante referir que na América pré-colombiana, a chave da mitologia e do simbolismo azteca encontra-se na *Pedra do Sol*, frequentemente designada por *calendário azteca*. O nome indígena é «Cuauhxicalli», o que significa «Receptáculo da Águia». Esta pedra apresenta-se dividida em 8 círculos concêntricos. No 3.^o círculo inscreve-se o ano civil, constituído por 18 meses e 20 dias, perfazendo no total 360 dias. A origem histórica da noção de ângulo definido em graus e a divisão do plano em 360 graus encontra-se provavelmente nessas civilizações.

Contudo, a referida origem histórica da noção de ângulo medido em graus pode escamotear a razão porque se deve calcular os ângulos em radianos. Com efeito, um ângulo infinitamente pequeno pode-se avaliar pela expressão $d\theta = |d\vec{s}|/|\vec{R}|$, onde o vector $d\vec{s}$ é perpendicular ao vector \vec{R} (Fig. 1).

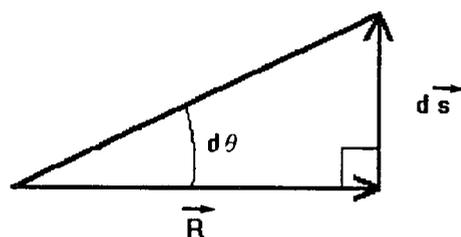


Fig. 1

O radiano é igualmente uma unidade de arco. É, com efeito, um arco de comprimento igual ao raio, de forma que há 2π radianos numa circunferência. Com todo o rigor, o radiano é o ângulo plano compreendido entre dois raios que, na circunferência de um círculo, intersectam um arco de comprimento igual ao raio desse círculo, $\theta = l/R$ (Fig. 2).

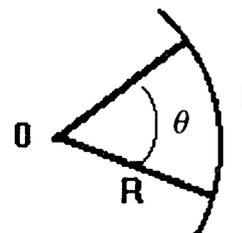


Fig. 2

Exprime-se o momento de uma força \vec{M} , pela expressão em módulo $M = Fd$ e o momento de um binário

Breve nota
pedagógica
sobre
o radiano

O radiano
e os sistemas
de Unidades

por $C = FR$ (onde R é o comprimento do braço) em unidades de trabalho ($N.m$) (Fig. 3). O momento de um binário ao rodar de um ângulo θ realiza o trabalho $W = C\theta$. Vemos neste exemplo, e antes da formulação do SI, que se o ângulo é avaliado em rad , o momento de um binário possui as dimensões de um trabalho por um ângulo ($J.rad^{-1}$). Da mesma forma, em electromagnetismo, definiria-se o ampere espira por metro, ou em língua francesa ampere-tour, (At) para unidade de campo magnético onde o «tour» definia uma unidade de ângulo correspondente a 2π radianos. Nesta perspectiva, parecia que o ângulo era uma grandeza com dimensões.

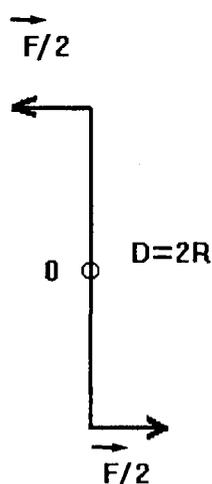


Fig. 3

Mas a CGPM retirou ao ângulo essa qualidade de grandeza com dimensões, fundando o SI, e definindo o ampere como a unidade de intensidade de corrente que, circulando em dois condutores paralelos rectilíneos de comprimento infinito, colocados a 1 m de distância um do outro no vácuo, exerce entre eles uma força de atracção a $2 \times 10^{-7} N$ por metro de comprimento.

Todas as outras unidades eléctricas são definidas a partir do ampere e de unidades mecânicas. As unidades magnéticas resultam de equações de definição independentes do ampere. Foram propostas duas fórmulas que dão origem ao sistema natural (ou não-racionalizado) e ao sistema racionalizado. No SI, com o objectivo de racionalizar as unidades, convencionou-se que a permeabilidade do vácuo é $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H.m^{-1} = 10^{-7} H.m^{-1}.sr^{-1}$, onde sr é a unidade de ângulo sólido.

O processo de racionalização ou não-racionalização só afecta as unidades pela utilização do *spat* (mais conhecido como ângulo sólido completo) ou do *esterradiano* como unidade de ângulo sólido ($1 spat = 4\pi sr$). Esse processo reflecte-se de igual modo nas fórmulas em que surge

ou desaparece o factor 4π ou $1/4\pi$. Por exemplo, no sistema racionalizado, introduz-se um coeficiente κ , definido de tal forma que $\epsilon_0\mu_0c^2 = \kappa$. Assim, no SI, temos $\kappa = 1$, $4\pi \epsilon_0 = \frac{1}{9 \times 10^9}$ e $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$. No sistema de Gauss (unidades eléctricas do sistema CGS electrostático e unidades magnéticas do sistema CGS electromagnético), $\kappa = c$, $4\pi \epsilon_0 = 1$ e $\frac{\mu_0}{4\pi} = 1$. As equações de Maxwell no vácuo passam a escrever-se (tendo os símbolos o significado habitual) na forma:

$$\text{rot}\vec{E} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\text{rot}\vec{B} - \frac{\epsilon_0\mu_0}{\kappa} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{\kappa} \vec{j} \quad (3)$$

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4)$$

A unidade racionalizada ampere-tour entra na definição do campo magnético H criado por uma solenóide de comprimento L contendo N espiras percorridas cada uma pela corrente eléctrica I : $H = NI/L$ (unidade: $At.m^{-1}$) = $4\pi NI/L$ (unidade: $A.sr.m^{-1}$). Mais uma vez, foi no CGPM que se desaconselhou o uso de unidades que contenham as expressões *esterradiano*, *tour* ou *spat*. Assim, a unidade do campo magnético será o $A.m^{-1}$ para H . A principal justificação para esta posição reside em que as palavras «tour» ou «spat», que designam a unidade de ângulo sólido, representam o espaço inteiro que se encontra naturalmente implícito e não precisa de ser nomeado sempre que se fala de uma grandeza física.

Ainda convém referir, *ex officio*, que os ângulos têm de ser medidos em radianos para que a aproximação $\text{sen}\theta \sim \theta$ seja válida para ângulos muito pequenos. Este facto é frequentemente objecto de confusão por parte dos alunos ao calcularem a precisão associada à determinação experimental do índice de refacção n de uma substância transparente (por meio de um prisma de dispersão de desvio constante, sendo neste caso $n = \frac{\text{sen}[(\delta_m + \alpha)/2]}{\text{sen } \alpha/2}$, onde α é o desvio constante do prisma e δ_m é o desvio mínimo).

Em resumo, a utilização do radiano resulta do facto de ser, na verdade, a única unidade de ângulo indispensável nas equações da mecânica com significado de energia por unidade de momento, quando se usa um sistema de unidades coerentes.

Um sistema de unidades coerentes é um conjunto de unidades interdependentes de tal forma que é possível definir o maior número possível de relações entre grandezas que podem ser escritas sem coeficientes numéricos (ou de tal forma que todos os coeficientes numéricos sejam iguais a 1). Devem-se escolher o menor número possível de unidades de base. A partir delas definem-se as unidades de outras grandezas, ditas derivadas.

REFERÊNCIAS

- STRIJK, D. J. — *História Concisa das Matemáticas*, Gradiva, Lisboa (1989).
- DENIS-PAPIN, M. e CASTELLAN, J. — *Métrologie Générale*. Vols. I e II, Dunod, Paris (1970).
- ALMEIDA, G. — *Sistema Internacional de Unidades (SI)*, Plátano, Lisboa (1988).
- BAPTISTA, A. M. — *O sistema internacional de unidades (SI)*, Gradiva, Lisboa (1994).

Novas Licenciaturas em Física na Universidade do Porto

Por proposta do Grupo de Física (FCUP), foram recentemente criadas duas novas licenciaturas em Física na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto: as licenciaturas em "Física e Tecnologia de Materiais" e "Optoelectrónica e Lasers". Embora com especializações científicas bem diferenciadas, as novas licenciaturas estão vocacionadas para a formação em áreas tecnológicas de grande relevância para a Indústria moderna.

A licenciatura em Física e Tecnologia de Materiais destina-se a dar formação especializada em Materiais, envolvendo os aspectos fundamentais e as aplicações. Destacam-se, entre outros, os materiais magnéticos, supercondutores, dieléctricos, semicondutores, ferroeléctricos e cristais líquidos, micro e nano-estruturados, e as estruturas artificiais. Apoiada por uma moderna infra-estrutura de técnicas avançadas em Ciência dos Materiais e um corpo docente com elevada experiência, a formação abrangerá vários domínios, desde a preparação, caracterização e optimização de propriedades, até à concepção e realização de dispositivos. Pretende-se fornecer uma qualificação adequada para a produção de trabalho de qualidade nesta área de rápido progresso e impacto tecnológico e industrial. Desde 1989 que está criado o Mestrado em Física do Estado Sólido e Ciência dos Materiais, propiciando a formação a nível pós-graduado nestas áreas avançadas.

A nova licenciatura em Optoelectrónica e Lasers nasceu da necessidade de formação, cada vez mais sentida, de investigadores e técnicos superiores nas áreas de lasers e optoelectrónica. Estas técnicas têm aplicações muito vastas, incluindo comunicação por fibra óptica, tecnologias médicas, caracterização e tratamento de materiais, computação óptica, etc. O Departamento de Física da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, pioneiro, em Portugal, dos estudos em fibras ópticas e lasers desde a década de setenta, tem desde então desenvolvido investigação, pura e aplicada, nestas áreas em estreita colaboração com prestigiados laboratórios internacionais. O Departamento de Física está encarregado do ensino nas áreas de optoelectrónica e lasers, mantendo laboratórios específicos dedicados à óptica e electrónica e estimulando o trabalho individual em projectos de fim de curso. Em 1992 foi criado o Mestrado em Optoelectrónica e Lasers, propiciando a formação a nível pós-graduado nestas áreas avançadas.

O Grupo de Física oferece, também, a licenciatura em Física, integrando uma sólida formação em Física Fundamental, dirigida quer para a formação de futuros professores (ramo educacional), quer para a formação de investigadores (ramo científico) com acesso a laboratórios de estudo ou industriais.

Finalmente, o Grupo de Física (FCUP) colabora com o Grupo de Matemática Aplicada (FCUP) na licenciatura interdisciplinar em Física/Matemática aplicada, dirigida à formação de Astrónomos e Astrofísicos, tendo recentemente sido criado um mestrado em Astronomia e aprovada a participação num outro mestrado internacional em Astronomia.