

Sobre a Radiação Cerenkov

M. JOÃO MARTINS

Centro de Electrodinâmica da UTL

1. Introdução

A radiação Cerenkov é geralmente falando a radiação que ocorre quando uma partícula se desloca num meio com velocidade superior à velocidade de fase da onda radiada.

Como não efectuámos qualquer restrição, haverá radiação Cerenkov em qualquer meio que consinta ondas. Um barco que se desloca com grande velocidade sobre a superfície calma de um lago, origina uma esteira que é radiação Cerenkov, um avião supersónico origina o chamado cone de Mach que é um fenómeno essencialmente da mesma natureza [2]. No entanto a radiação Cerenkov propriamente dita consiste no deslocamento de cargas eléctricas com velocidade superior à velocidade de fase nesse meio.

Este fenómeno foi revelado e estudado por via experimental por Cerenkov em 1934. Enquanto decorriam os trabalhos experimentais de Cerenkov, Frank e Tamm [3] publicaram a explicação teórica do fenómeno, que conduziu à atribuição de um prémio Nobel aos três cientistas em 1958.

É extraordinariamente interessante a afirmação que sobre este assunto faz Kong [5], considerando que a explicação de Frank e Tamm constituiu um triunfo da Electrodinâmica macroscópica.

Posteriormente Landau e Lifshitz [6] obtiveram, por outra via, a expressão formal da energia radiada como o caso limite das perdas de uma carga em movimento em meio material.

A radiação Cerenkov tem hoje inúmeras aplicações, nomeadamente no domínio da física experimental de altas energias. Contam-se entre estas os contadores e detectores de partículas [8], e até o controverso monopolo magnético [1] pode ser detectado por esta via, como provaremos neste artigo.

Começaremos por fazer uma breve introdução à teoria clássica do fenómeno e posteriormente generalizaremos esta análise a meios dispersivos e com perdas.

Como já dissemos a radiação Cerenkov pode revelar a existência de monopolos magnéticos o que é actualmente objecto de controversia, mas também de interesse. O assunto pode ser tratado recorrendo à dualidade das equações de Maxwell, o que em última análise se traduz por, uma vez que seja conhecida a solução eléctrica, obter a solução magnética correspondente. Com base nos resultados obtidos, propomos um método de detecção, que sendo simples nos parece eficaz para a detecção dessa partícula, caso ela exista.

2. Caracterização da Radiação Cerenkov

De início e numa análise simplificada que visa apenas levantar fenomenologia, consideraremos uma carga em movimento uniforme no vácuo. A ausência de matéria elimina a dispersão e permite uma análise simplificada. Como se infere da Fig. 1, entre o instante

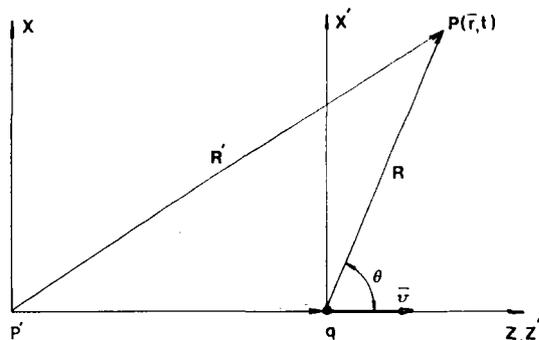


Fig. 1 — t' corresponde à posição retardada da carga, t ao instante de observação, e R' ao vector de posição.

correspondente à posição retardada da carga (t') e o instante de observação t existe a relação

$$t = t' + \frac{R'}{c} \quad (1)$$

em que

$$R' = [(vt' - z)^2 + (x^2 + y^2)]^{1/2}.$$

Da expressão anterior resulta

$$c^2 (t - t')^2 - (vt' - z)^2 = x^2 + y^2 \quad (2)$$

Esta expressão representa uma esfera com centro em $(z, 0, 0)$ e cujo raio é $c(t - t')$.

Se for t o parâmetro variável, esta equação representa uma família de esferas concêntricas que são as sucessivas localizações das ondas emitidas no instante t' .

Se por outro lado for t' que é variável, isso determina a existência de uma família de esferas cujos centros existem ao longo da trajectória da partícula e que representam a posição num dado instante t de todas as ondas emitidas até esse instante.

Se a velocidade da partícula for inferior a c , a primeira frente de onda radiada contém as que lhe são subsequentes. Assim, em cada ponto do espaço existe apenas uma onda num dado instante (Fig. 2).

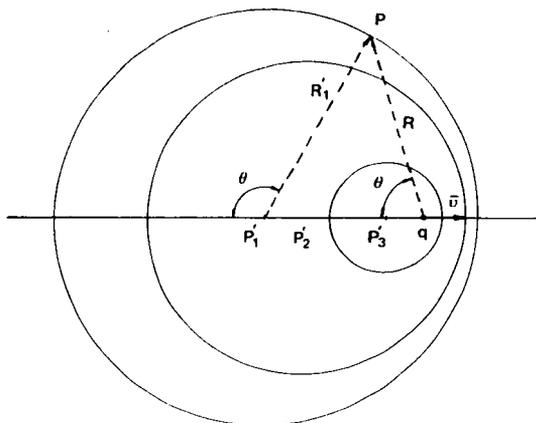


Fig. 2

Se, no entanto a velocidade da partícula exceder a velocidade de propagação das ondas

no vácuo, a própria partícula ultrapassa a frente de onda radiada, deixando para trás uma sucessão de ondas esféricas que interferem construtivamente.

Esta circunstância dá origem à existência de uma envolvente cônica, cujo vértice é a posição ocupada pela carga no instante de observação. Em todos os pontos do interior dessa envolvente verifica-se a sobreposição de duas ondas emitidas em instantes distintos. Na superfície da envolvente as duas ondas tocam-se e os seus centros coalescem. Fora da envolvente o campo anula-se (Fig. 3).

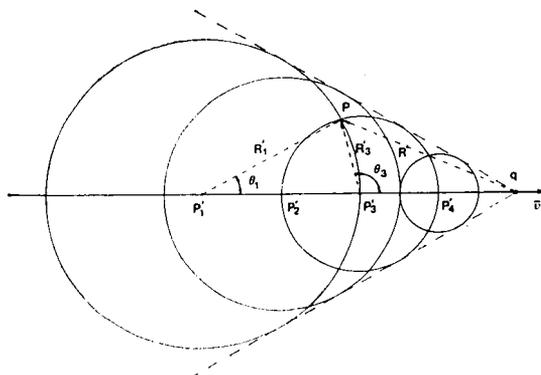


Fig. 3

Esta introdução muito genérica do fenómeno permitiu-nos apresentar os processos em causa. Vamos proceder seguidamente a uma explicação teórica do fenómeno, que nos permite analisar quantitativamente este tipo de radiação.

3. Teoria Clássica da Radiação Cerenkov

Quando se pretende analisar quantitativamente o fenómeno e dado que a radiação se processa em meio material, há que ter em conta a dependência dos parâmetros constitutivos da frequência.

Como é bem conhecido um método frutuoso de abordar estes problemas é o que consiste em recorrer à análise de Fourier, partindo de uma outra sinusoidal de frequência ω , elemento genérico integrante de uma função do espaço e do tempo. Em meios materiais as relações constitutivas que macroscopicamente se definem

são função da frequência, o que constitui mais uma razão da escolha do método apresentado. Com efeito para um meio sem perdas verifica-se

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega) &= \varepsilon(-\omega) \\ \mu(\omega) &= \mu(-\omega)\end{aligned}\quad (3)$$

A densidade de corrente associada a uma carga que se desloca com velocidade constante ao longo do eixo dos z é dada por

$$J_z(\mathbf{r}, t) = e \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt) \quad (4)$$

Como se pretende uma análise espectral do fenómeno em causa é conveniente usar a transformada de Fourier das quantidades presentes

$$J(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} J(\mathbf{r}, t) \exp(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \, d\mathbf{r} \, dt \quad (5)$$

Das equações de Maxwell, obtém-se:

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} \\ = - \frac{j\omega\mu e}{4\pi\rho^2} \delta(\rho) \exp(j\omega z/v) \mathbf{z}\end{aligned}\quad (6)$$

O campo eléctrico pode ser expresso em termos de uma função de Green

$$\mathbf{E} = \left(\mathbf{I} + \frac{\nabla\nabla}{k^2} \right) \mathbf{G} \quad (7)$$

em que \mathbf{I} designa a diádica unidade, $k = \omega/c$ e a função de Green \mathbf{G} depende da relação existente entre a velocidade de fase das ondas no meio e a velocidade da partícula.

Quando a velocidade da partícula não excede a velocidade de fase $v < u$

$$\mathbf{G} = \frac{j\omega\mu e}{4\pi^2} K_0(s\rho) \exp(j\omega z/v) \quad (8)$$

em que

$$s = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - [n(\omega)\beta]^2} \quad (9)$$

e K_0 designa a função de Bessel modificada de argumento $(s\rho)$.

Para velocidades superiores a u , obtém-se

$$\mathbf{G} = - \frac{8\pi}{\pi\mu e} H_0^{(1)}(s'\rho) \exp(j\omega z/v) \quad (10)$$

em que $H_0^{(1)}(s'\rho)$, designa a função de Hankel de primeira ordem, e argumento $(s'\rho)$, sendo agora s' dado por

$$s' = \frac{\omega}{v} \sqrt{[n(\omega)\beta]^2 - 1} \quad (11)$$

A partir da equação (6), obtém-se as expressões dos campos.

$v < u$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{j e}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{\omega\varepsilon} \left[k^2 z + j \frac{\omega}{v} \nabla \right] \\ K_0(s\rho) \exp \left[j\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] d\omega\end{aligned}\quad (12)$$

$v > u$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\omega\varepsilon} \left[k^2 z + j \frac{\omega}{v} \nabla \right] \\ H_0^{(1)}(s'\rho) \exp \left[j\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] d\omega\end{aligned}\quad (13)$$

Uma vez que o nosso objectivo é a determinação dos campos de radiação substituiremos a função de Hankel pela sua expressão assintótica, obtendo:

$v > u$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{e}{8\pi} \int \frac{1}{\omega c} \sqrt{\frac{2s}{\pi\rho}} \left[\frac{\omega}{v} \rho - s \right] \\ \exp[-j\xi - \pi/4]\end{aligned}\quad (14)$$

em que

$$\xi = \omega \left[t - \frac{(z \cos \theta + \rho \sin \theta)}{c} \right] \mathbf{n} \quad (15)$$

Esta expressão é análoga à que se verifica para uma onda plana propagando-se segundo

uma direcção $R = (z \cos \theta + \rho \sin \theta)$. Conclui-se assim que a solução obtida consiste na sobreposição de ondas planas que se propagam segundo R , estando o campo confinado por uma superfície cónica cuja semi-abertura é $\cos \theta = 1/n(\omega) \beta$.

Para $v > u$, a partícula está em avanço relativamente aos campos radiados. Pelo princípio de causalidade isso implica que cada componente de frequência ω do campo deve tender para zero fora do cone de Cerenkov respectivo.

Efectuando a medição do ângulo é possível determinar a velocidade da partícula, sendo este um dos métodos usados na determinação de partículas de altas energias [8].

Dada a condição limiar para o efeito, $\epsilon(\omega) \mu(\omega) \beta^2 > 1$, pode-se concluir que há bandas de frequência bem definidas para o efeito, a que corresponde um valor bem determinado para a frequência limite de cada banda.

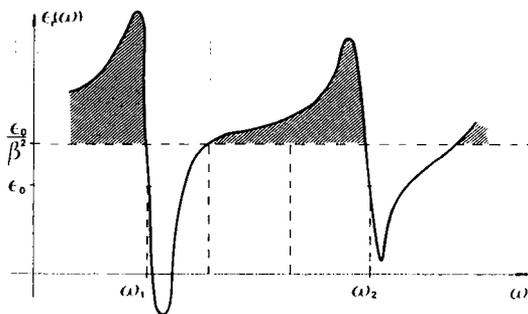


Fig. 4

Integrando no tempo o fluxo do vector de Poynting e admitindo que o intervalo de tempo no qual se processa a integração contém vários períodos de qualquer das harmónicas do sinal, só haverá contribuição para o integral em $\omega = \omega'$, o que conduz à fórmula clássica de Frank e Tamm para a densidade linear de energia radiada.

$$\frac{dW}{de} = \frac{e^2}{4\pi} \int_0^{+\infty} \mu(\omega) \omega \left[1 - \frac{1}{[n(\omega) \beta]^2} \right] d\omega \quad (16)$$

4. Radiação de Monopolos Magnéticos

A introdução do conceito de monopolo magnético deve-se a Dirac [1] (1931) e tem desde então sido objecto de investigação quer em raios cósmicos e aceleradores de partículas, sem resultado positivo. De acordo com o conceito de Dirac, a relação entre a carga magnética e_m e a carga eléctrica unitária é dada por

$$e_m = \frac{n h e}{2 e} \quad (17)$$

em que n é um número inteiro.

Não efectuaremos juízos de valor sobre esse facto, mas admitiremos que caso ele exista, então a fenomenologia associada à radiação Cerenkov é um meio possível de o detectar. Aplicando a dualidade das equações de Maxwell, que consistem em estabelecer determinadas equivalências entre a solução eléctrica e a solução magnética que permite que as referidas equações revistam a mesma expressão formal, o que se traduz pelas relações seguintes.

TABELA 1

E	\rightarrow	H
H	\rightarrow	$-E$
ρ_e	\rightarrow	ρ_m
J_e	\rightarrow	J_m
ϵ	\rightarrow	μ
μ	\rightarrow	ϵ

Aplicando estas relações à expressão que determinámos para a energia radiada por unidade de comprimento, obtém-se

$$\frac{dW}{dz} = \frac{e_m^2}{4\pi} \int_0^{\infty} \epsilon(\omega) \omega \left[1 - \frac{1}{[n(\omega) \beta]^2} \right] d\omega \quad (18)$$

Como a variação de $\epsilon(\omega)$ com a frequência é bastante mais acentuada do que aquela que se verifica para $\mu(\omega)$ para os dieléctricos usuais, o espectro da radiação emitida por um

monopolo magnético dependerá de modo mais acentuado e previsível da frequência, sendo ainda a sua intensidade superior à que se verifica para uma carga eléctrica.

Com o fim de obtermos indicações quantitativas quanto à diferença referida, vamos usar para caracterizar o dieléctrico o modelo de Lorentz.

5. Modelo de Lorentz

O modelo de Lorentz permite determinar de modo simples os parâmetros constitutivos de meios materiais. Neste modelo, admite-se que os electrões e iões que constituem a matéria se comportam como osciladores harmónicos, idênticos, independentes e isotrópicos, sujeitos a uma força de Lorentz devida ao campo electromagnético aplicado.

Cada oscilador é caracterizado pela sua massa m e carga $q=e$, sendo a sua densidade representada por N_e . A equação dinâmica de um destes osciladores é:

$$m \ddot{\mathbf{r}} + \zeta \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (19)$$

em que \mathbf{r} designa o deslocamento do oscilador da sua posição de equilíbrio, ζ a constante de atenuação e $-\omega_0^2 \mathbf{r}$ a força de restituição. Admite-se ainda que o campo electromagnético que actua sobre cada oscilador é harmónico de frequência ω e despreza-se a parte magnética da força de Lorentz.

Com estes pressupostos a polarização é dada por:

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - j\zeta \omega} \mathbf{E} \quad (20)$$

em que ω_p designa a frequência de plasma do meio, $\omega_p = \left[\frac{Ne e^2}{\varepsilon_0 m} \right]^{1/2}$.

A constante dieléctrica que define as propriedades do meio é pois dada por

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left[1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - j\zeta \omega} \right] \quad (21)$$

cujas partes reais e imaginárias são respectivamente

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_0 \left[1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \zeta^2 \omega^2} \right] \quad (22)$$

$$\varepsilon_i(\omega) = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2 \zeta \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \zeta^2 \omega^2} \quad (23)$$

A variação destas grandezas com a frequência indica que $\varepsilon_i(\omega)$ apresenta uma risca de absorção em $\omega = \omega_0$ cujo valor é $\frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\zeta \omega_0}$, sendo a largura de banda correspondente dada por ζ .

Verifica-se que $\varepsilon_r(\omega)$ apresenta um máximo em $\omega_0 - \frac{\zeta}{2}$, e um mínimo em $\omega_0 + \frac{\zeta}{2}$ cujo

valor é $\varepsilon_r = 1 - \frac{\varepsilon_i \max}{2}$.

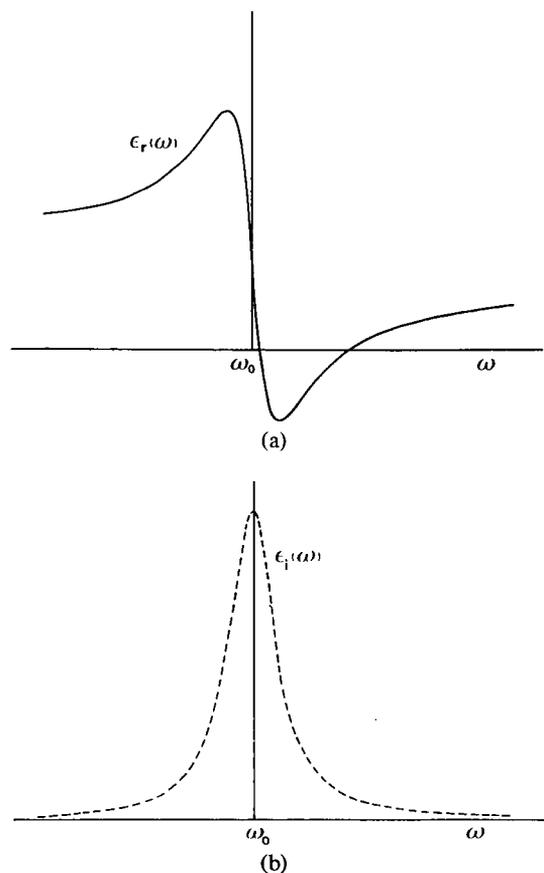


Fig. 5—Variação da parte real e imaginária de $\varepsilon(\omega)$ com a frequência. Verifica-se a existência de uma risca de absorção em $\omega = \omega_0$.

OLIMPIADAS DE FISICA SPF

PROVAS REGIONAIS — Del. Coimbra

PROVA PARA O 9.º ANO DE ESCOLARIDADE

1.ª parte (90 minutos)

I — (Sugestão: 30 minutos)

A — Têm à vossa disposição um copo com água e cubos de gelo. Mergulhem o gelo na água.

1 — O gelo não fica completamente mergulhado. Expliquem porquê.

2 — Que esperam que aconteça ao nível da água quando o gelo fundir completamente? Expliquem.

3 — Verifiquem se a experiência confirma, ou não, a vossa hipótese. Comentem.

B — Suponham que um grande bloco de gelo tem no seu interior um objecto metálico e se encontra a flutuar num recipiente com água.

1 — Que esperam que aconteça ao nível da água depois do gelo fundir completamente? Expliquem.

II — (Sugestão: 60 minutos)

A — Com a experiência que vos é proposta pretende-se verificar o princípio físico em que se basearam para explicar as questões anteriores.

B — Verifiquem se têm à vossa disposição o seguinte material:

1 suporte com 2 roldanas e 1 fio;

1 proveta de 250 ml;

1 proveta de 50 ml;

1 pipeta;

1 recipiente que pode suspender-se do fio;

1 recipiente grande com água;

1 cilindro cuja massa pode variar.

Nota: Poderão retirar a tampa do cilindro para introduzir ou retirar chumbos, fazendo

Introduzindo estas expressões na fórmula da energia radiada pelo monopolo magnético obtém-se

$$\frac{dW_m}{dz} = \frac{e_m^2}{4\pi} \int_0^1 \omega_0^2 \frac{\varepsilon_0 (1 - \eta^2 + \alpha^2 \beta^2)}{\gamma'^2 (1 - \eta^2)} d\eta \quad (24)$$

$$\text{em que } \eta = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \alpha = \left[\frac{\omega_p}{\omega_0} \right]^2$$

$$\text{e } \gamma' = (1 - \beta)^{-1/2}.$$

O integral referente à carga magnética é divergente em $\eta = 1$, o que é consequência de termos desprezado as perdas neste caso particular.

Na figura seguinte compara-se a energia radiada por um monopolo magnético (I_m) com a que corresponde à radiação Cerenkov de uma carga eléctrica (I_e):

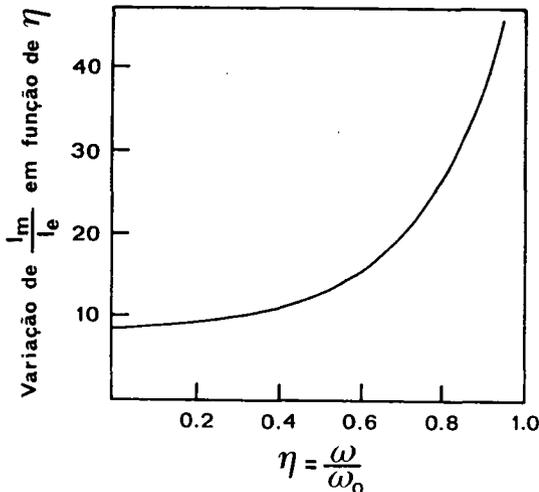


Fig. 6 — Comparação da energia radiada por efeito Cerenkov entre um monopolo magnético e um monopolo eléctrico em função do parâmetro ω .

REFERÊNCIAS

- [1] DIRAC, P. — *Proc. Roy. Soc.*, A 131, 60 (1931).
- [2] FEYNMAN, R. P. — *Lectures on Physics*, vol. 1, 511, Addison-Wesley Publishing Company (1971).
- [3] FRANK e TAMM — Nobel Prize Lecture, Nobel Lectures on Physics (1942-1962), 442, Elsevier Amsterdam (1964).
- [4] JACKSON, J. D. — *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York (1972).
- [5] KONG, J. A. — *Theory of Electromagnetic Waves*, Wiley Interscience (1975).
- [6] LANDAU, L., LIFSHITZ, E. — *Electrodynamique des Milieux Continues*, Ed. de la Paix, Moscou (1962).
- [7] MARTINS, M. João — Tese de Doutoramento (1988).
- [8] MEUNIER, R., LITT, J. — *Cerenkov Counter Technique in High Energy Physics CERN* (1973).