Gaz. Fís., Vol. 14, Fasc. 4, 1991

Cosmologia Quântica. I — Uma Introdução Básica (*)

P. V. Moniz (¹)

Departamento de Física, Faculdade de Ciências de Lisboa
Universidade de Lisboa, Ed. C1, piso 4, Campo Grande, 1700 Lisboa, Portugal

Neste trabalho são descritas motivações e algum conteúdo da investigação actual em Cosmologia Quântica. Começando por recordar o formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano da mecânica clássica e a correspondente quantificação canónica, aplicamos estes conceitos à teoria da Relatividade Geral. Descrevemos então a quantificação canónica da gravitação de onde resulta a equação de Wheeler-De Witt. De seguida debatemos o problema das condições iniciais e por fim apresentamos algumas considerações sobre a função de onda do (nosso) Universo.

1. Introdução

Este artigo tem como objectivo transmitir ao leitor o que pretende a investigação em Cosmologia Quântica, procurando elucidá-lo e, simultaneamente, motivá-lo a reflectir sobre este importante tema. Se se pretender uma apreciação mais ampla sobre Cosmologia Quântica, as referências [1] e [2] descrevem o formalismo da teoria. Para bons artigos de revisão, pode-se consultar as ref. [3, 4, 5], enquanto que a ref. [6] constitui uma excelente colecção de artigos cruciais no desenvolvimento da Cosmologia Quântica. As ref. [7]-[13] contêm alguns exemplos de aplicação e a ref. [14] é um inventário bibliográfico sobre trabalhos recentes em Cosmologia Quântica.

Comecemos por referir que apesar do modelo standard do Big-Bang esclarecer muitas das características e propriedades do Universo que observamos (um Universo *muito aproximadamente* homogéneo e isotrópico), existem muitas outras que não conseguem ser explicadas de uma forma adequada. Entre estas últimas podemos salientar a isotropia do Universo, o facto do Universo ser, *muito aproximadamente,* espacialmente plano e a origem de flutuações na densidade de matéria, necessárias para a origem e formação de galáxias, estrelas e ...de nós próprios!

Os modelos inflacionários (cf. ref. [7, 15, 16]) poderão explicar de uma forma apropriada as propriedades atrás indicadas. Segundo estes modelos, o Universo teve um período de evolução durante o qual se expandiu exponencialmente, aumentando enormemente de tamanho num intervalo de tempo muito pequeno. Desse modo, o *Universo que hoje observamos* representaria apenas uma pequena parte de todo o Universo, na qual as suas propriedades e características (como isotropia e homogeneidade em grandes escalas, planaridade, etc.) seriam consistentes com as fornecidas pela observação. As irregularidades ou perturbações dessas propriedades só existiriam a uma escala maior que a do Universo observável. Esse período inflacionário é causado por um campo escalar Φ que transita de um extremo para um mínimo (i.e., um estado de vácuo estável) de um potencial efectivo $v(\Phi)$, dando origem a uma transição de fase. É importante referir que na generalidade dos modelos inflacionários os campos de matéria podem estar quantificados mas são definidos num cenário onde o espaço-tempo é ainda encarado de um ponto de vista clássico; por outras palavras, a matéria pode ser quantificada mas a interacção gravitacional é sempre descrita pelas equações de Einstein da Relatividade Geral.

(*) Investigação parcialmente subsidiada pelo D.F.F.C.U.L.—J.N.I.C.T./C.E.R.N. (Projecto FAE//13-90). Palestra apresentada no curso «Uma Introdução às Cosmologias Modernas», Departamento de Física da F.C.L., Lisboa — Maio-Julho/1991.

(¹) Parcialmente subsidiado pela bolsa BD//138/90-RM da J.N.I.C.T.

E-MAIL: FPVMONIZ@PTEARN.BITNET *ou* FPVMONIZ@FCVAX1.FCL.RCCN.PT

A capacidade explicativa dos modelos inflacionários não é, contudo, inteiramente satisfatória. De facto, nem todas as condições iniciais para os modelos cosmológicos e classes de campos materiais permitem que um período inflacionário ocorra e, mesmo que este ocorra, conduza à necessária isotropização, homogeneização, produção de entropia, etc. Por outras palavras, se por um lado existem condições iniciais que conduzem a uma fase inflacionária (e assim obter um universo homogéneo e isotrópico como o nosso), por outro, existem também condições iniciais que dão origem a modelos do universo totalmente *diferentes* daquele onde vivemos! A questão das condições iniciais surge assim em Cosmologia de um modo natural, como algo importante para entendermos melhor a evolução do nosso Universo. Essa questão constitui também o motivo principal para a investigação actual em Cosmologia Quântica

De facto, ao recuarmos no tempo em direcção à *criação* ou *início* do Universo, percorremos várias épocas onde as diferentes interacções existentes na natureza vão sendo sucessivamente unificadas no contexto de uma teoria quântica: a unificação da interacção electromagnética com a interacção fraca (o modelo de Glashow-Weinberg-Salam), a unificação da interacção forte nuclear com as interacções electro-fracas (as Teorias de Grande Unificação), e por fim (espera-se...) a unificação de todas as interacções não gravitacionais com a gravitação. Isso poderá ocorrer no contexto de uma teoria quântica da gravitação, que não está ainda formulada de uma forma completa e consistente. Por sua vez, a aplicação da gravitação quântica a modelos cosmológicos traduz-se na *Cosmologia Quântica.* A Cosmologia Quântica é pois a estrutura adequada para se estudar a questão das condições iniciais e da *criação* do Universo, permitindo simultaneamente testar as várias propostas de teorias de quantificação da gravitação, uma vez que estas têm que ser consistentes com o Universo observado actualmente.

O trabalho aqui exposto está organizado do seguinte modo. Na secção 2 começamos por apresentar um breve resumo sobre o que é a quantificação canónica de um sistema físico (cf. ref. [17, 18]), tendo como objectivo a sua aplicação à teoria da Relatividade Geral. Nesse sentido, introduz-se o formalismo de *A D M* (*A*rnowitt-*D*eser-*M*isner) a partir do qual é possível construir uma formulação hamiltoniana da Relatividade Geral (cf. ref. [15, 19, 20]). Em seguida, e de forma semelhante à quantificação canónica de sistema físicos mais simples, descrevemos a quantificação canónica da gravitação na qual a equação de Wheeler-De Witt desempenha um papel análogo à equação de Schrödinger da mecânica quântica. Esta parte é tecnicamente muito ingrata pelo que se optou por descrever apenas o essencial. Para mais detalhe devem-se consultar as referências indicadas na bibliografia final. Na secção 3 apresentamos a formulação do problema das condições iniciais e a proposta de Hartle-Hawking (cf. ref. [3]-[10]) para a função de onda do Universo. Também são mencionados alguns pormenores respeitantes à resolução da equação de Wheeler-De Witt e análise das suas soluções. Na secção 4 são apresentadas algumas considerações finais sobre este trabalho.

É importante referir que este trabalho não constitui um inventário enciclopédico nem contém nada de original que não esteja referido na bibliografia final. É um trabalho de divulgação sobre um aspecto particular da investigação cientifica actual. Usa-se dimensões em que $c = \hbar = 8\pi G = 1$, sendo c a velocidade da luz, $\hbar = h/2\pi$ (h é a constante de Planck), e G é a constante gravitacional. Este procedimento é usual em trabalhos sobre Relatividade Geral e Teoria Quântica de Campos (ver ref. [19] para uma melhor compreensão).

2. Quantificação Canónica da Gravitação:

2.1. Formalismo Usual de Mecânica Quântica

Como quantificar a Gravitação? Apesar de esta ser uma pergunta ainda sem uma resposta definitiva, existem já algumas tentativas para a obter de um modo consistente. Talvez a maneira mais directa (e mais acessível para se compreender as dificuldades existentes) seja a quantificação canónica.

Para melhor entender em que consiste e como é feita a quantificação canónica da gravitação (no contexto da teoria da Relatividade Geral), é conveniente recordar, muito resumidamente, como se obtém a quantificação canónica de um sistema físico simples no contexto usual da Mecânica Quântica. Começamos por determinar os graus de liberdade de um sistema descrito classicamente, identificando-os como coordenadas generalizadas, q^j, (j = 1,2, ...). Com as coordenadas generalizadas e as suas derivadas em relação à variável temporal construímos um objecto que designamos por Lagrangiano e que representamos formalmente por

$$L\left(q^j, \frac{dq^j}{dt}, t\right) \equiv \tau\left(\frac{dq^j}{dt}, t\right) - \nu\,(q^j, t)\,,$$

onde τ e ν são, respectivamente, a energia cinética e potencial do sistema. A importância deste formalismo reside no facto de que as equações que determinam a dinâmica do sistema físico coincidem com as equações para os extremos do integral no tempo do Lagrangiano, usualmente designado de *Acção*:

$$\int_{t_{in}}^{t_f} dt\, L\left(q^j, \frac{dq^j}{dt}, t\right).$$

Analogamente ao formalismo Lagrangiano, a dinâmica do sistema pode também ser analisada através de outro formalismo, designado de formalismo Hamiltoniano. Neste formalismo a dinâmica é descrita, não pelas variáveis $q^j, \frac{dq^j}{dt}$, mas sim em termos das variáveis q^j e π_j, onde as variáveis π_j são designadas de momentos canonicamente conjugados das variáveis q^j e são definidos por

$$\pi_j \equiv \frac{\partial L\left(q^j, \frac{dq^j}{dt}, t\right)}{\partial(dq^j/dt)}\,. \tag{1}$$

Neste novo formalismo define-se um objecto designado por Hamiltoniano através da relação:

$$H[q^j, \pi_j, t] = \sum_k \pi_k \frac{dq^k}{dt} - L\left(q^j, \frac{dq^j}{dt}, t\right), \tag{2}$$

sendo as equações dinâmicas obtidas no formalismo Hamiltoniano equivalentes às que são obtidas através do formalismo Lagrangiano.

O processo de quantificação canónica requere então a introdução dos seguintes postulados:

- O estado de um sistema físico é descrito por uma função Ψ (usualmente chamada de *função de onda*), que depende das coordenadas generalizadas do sistema e do tempo.
- Toda a grandeza física mensurável é descrita por um operador *hermítico* (cf. ref. [17]) que actua em Ψ.
- A evolução no tempo da função de onda é dada pela equação de Schrödinger

$$\widehat{H}(t)\,\Psi(q^j, t) = i\,\frac{\partial\Psi(q^j, t)}{\partial t} \tag{3}$$

onde $\widehat{H}(t)$ representa o *operador* Hamiltoneano e $i \equiv \sqrt{-1}$.

Em termos axiomáticos, procedemos à identificação

observáveis físicos $\longleftrightarrow$ operadores

$$q^j \longleftrightarrow \hat{\pi}_j = -\,i\,\frac{\partial}{\partial q^j} \tag{4}$$

$$\pi_j \longleftrightarrow \hat{q}^j = q^j$$

Ao substituírmos as grandezas físicas pelos respectivos operadores, o Hamiltoniano do sistema transforma-se no operador Hamiltoniano $\widehat{H}$. Aplicando este operador Hamiltoniano à função de estado Ψ e igualando a expressão obtida a $i\partial\Psi/\partial t$ obtemos a equação de Schrödinger (3). As soluções da equação de Schrödinger são funções que descrevem a evolução do estado físico do sistema.

2.2. Geometria do Espaço-Tempo e o Tensor da Métrica

Consideremos o sistema físico que descreve a interacção gravitacional. Do ponto de vista clássico, a teoria que melhor descreve e explica a gravitação é a teoria da Relatividade Geral, formulada por Albert Einstein e que consiste numa formulação geométrica da interacção gravitacional. Essa geometria é respeitante não ao espaço tridimensional de que nos apercebemos no dia a dia mas ao contínuo quadridimensional do espaço *e* de tempo em que vivemos. O objecto que descreve, basicamente, essa geometria é o *tensor da métrica*, o qual caracteriza as «distâncias» no espaço-tempo.

Estas noções podem ser facilmente introduzidas por meio do espaço Euclidiano a duas dimensões. A distância espacial ds entre dois pontos P_1 e P_2 de coordenadas, respectivamente, $[x(1), y(1)]$ e $[x(2), y(2)]$, é dada por

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2,$$

onde $dx = x(2) - x(1)$ e $dy = y(2) - y(1)$. Ora isto não é mais que o teorema de Pitágoras no espaço plano bidimensional. A expressão anterior também pode ser reescrita como

$$(ds)^2 = \sum_{j,\,k=1}^{2} h_{jk}\, dx^j\, dx^k \equiv h_{jk}\, dx^j\, dx^k$$

onde se definiu que $h_{11} = h_{22} = 1$, $h_{12} = h_{21} = 0$ e $dx \equiv dx^1$ e $dy \equiv dx^2$. O termo h_{jk} é designado de *tensor da métrica* e descreve a geometria do espaço Euclidiano a duas dimensões. Note-se que a partir daqui adopta-se a *convenção de Einstein*, segundo a qual a repetição de um índice no mesmo monómio subentende uma soma de parcelas, em que esse índice varia de 1 a n, sendo n a dimensão do espaço. A convenção exige assim que o índice repetido apareça em cada monómio apenas duas vezes. A geometria do espaço-tempo é descrita em termos semelhantes mas *não* iguais. Em particular, a distância (também designada por intervalo entre dois pontos do espaço-tempo) pode ser positiva, negativa ou nula, e o espaço-tempo pode possuir *curvatura*. Para grande parte dos modelos

$$(ds)^2 = -\,(dt)^2 + h_{jk}\,(x^m, t)\, dx^j\, dx^k,$$
$$(j, k, m = 1, 2, 3),$$

e no caso mais geral escrevemos

$$(ds)^2 \equiv g_{\mu\nu}\,(x^\alpha)\, dx^\mu\, dx^\nu, \qquad (\alpha, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3).$$

Aqui $h_{ij}\,(x^m)$ representa o tensor da métrica espacial, $g_{\mu\nu}\,(x^\alpha)$ é o tensor da métrica do espaço-tempo quadridimensional e $dt \equiv dx^0$.

2.3. Formalismo de *A D M*

A seguir ao que foi exposto, avancemos para a quantificação canónica da gravitação, a qual pressupõe uma formulação Hamiltoniana da teoria da Relatividade Geral. No entanto, esta formulação levanta algumas questões importantes. Noutras teorias da física clássica, o objectivo do formalismo Hamiltoniano (ou Lagrangiano) consiste em determinar a evolução no tempo de variáveis que caracterizam o sistema físico, a partir dos seus valores iniciais. Contudo, em Relatividade Geral o nosso sistema físico é o próprio espaço-tempo, isto é, inclui o próprio tempo! Quais devem então ser as variáveis que permitirão, num formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral, determinar a *estrutura* do espaço-tempo? O formalismo de *A D M* fornece uma resposta.

O formalismo de *A D M* corresponde a uma decomposição da geometria do espaço-tempo que permite determinar os graus de liberdade referentes à interacção gravitacional. Consideremos a figura 1. As duas *hipersuperfícies* espaciais Σ_{t_0} e Σ_{t_0+dt}, que consideramos muito próximas uma da outra, permitem formar uma «*sandwich*» de geometria quadridimensional; isto é, temos uma geometria tridimensional em cada uma das duas faces de um pedaço de espaço-tempo quadridimensional. As linhas (t, x_0^j) e $(t, x_0^j + dx^j)$ representam as trajectórias no espaço-tempo de dois observadores em

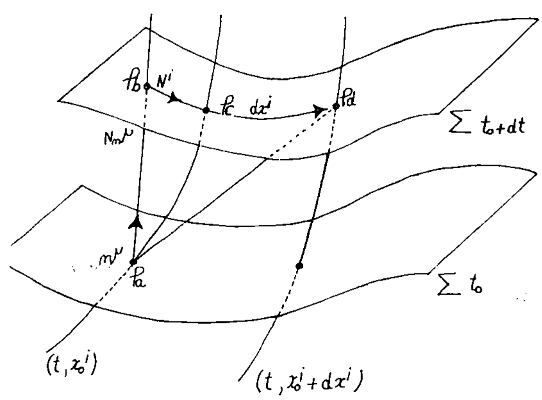

Fig. 1—Representação da geometria do espaço-tempo através do formalismo de *A D M*. Uma dimensão espacial não está representada.

repouso relativo (isto é, as suas separações espaciais relativas dx^j não se alteram). Mas como caracterizar o intervalo de espaço-tempo invariante entre os pontos $P_a(t_0, x^j)$ e $P_d(t_0 + dt, x^j + dx^j)$ no contexto atrás descrito? Um modo de o fazer é explicado a seguir. Considere-se o ponto $P_a(t_0; x^j)$ pertencente a Σ_{t_0} e defina-se um quadrivector, n^μ, ortonormal a Σ_{t_0} e $P_a(t_0, x^j)$. Existe então um valor N tal que o quadrivector $N\, n^\mu\, dt$ intersecta Σ_{t_0+dt}. Seja $P_b(t_0 + dt, x')$ o ponto de intersecção. Então N dá-nos uma medida da separação entre $P_a(t_0\ x^j)$ e $P_L(t_0 + dt, x')$. A função N designa-se de *função de lapso*. Mas em geral, o ponto $P_b(t_0 + dt, x')$ possui coordenadas espaciais diferentes das de $P_a(t_0, x^j)$. Seja $P_c(t_0 + dt, x^j)$ o ponto de Σ_{t_0+dt} com as mesmas coordenadas espaciais que o ponto $P_a(t_0, x^j)$ em Σ_{t_0}. Então o vector que liga $P_b(t_0 + dt, x')$ a $P_c(t_0 + dt, x^j)$ define o *vector de deslocamento* N^j. Fisicamente, N^j pode ser interpretado como o desvio ou distorção das linhas x^j=constante relatiamente à normal n^μ.

Após o parágrafo anterior, a interpretação da figura 1 deve estar mais clara. Vemos assim que a geometria quadridimensional pode ser expressa em termos da *função de lapso*, N, do *vector de deslocamento*, N^j, e da *geometria tridimensional*, através da métrica espacial, h_{jk}. Ou dito de outro modo, a geometria do espaço-tempo quadridimensional pode ser vista como representando uma *evolução* das geometrias das hipersuperfícies tridimensionais. Isso significa que as métricas espaciais, h_{ij}, podem ser usadas como *graus de liberdade* (ou *variáveis dinâmicas*) do sistema. Em consequência, a função de lapso, N, e o vector de deslocamento, N^j, constituirão *apenas* um modo de descrever a evolução no tempo e não devem ser vistos como variáveis dinâmicas. São portanto funções arbitrárias. Assim, o intervalo de espaço-tempo invariante entre os pontos $P_a(t_0, x^j)$ e $P_a(t_0 + dt, x^j + dx^j)$ que pertencem a duas hipersuperfícies muito próximas, é dada por

$$(ds)^2 = \left(\begin{array}{c}\text{distância}\\ \text{espacial}\\ \text{na geometria}\\ \text{tridimensional}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{intervalo de}\\ \text{tempo entre as}\\ \text{duas geometrias}\\ \text{tridimensionais}\end{array}\right)^2,$$

que em termos mais formais se escreve

$$ds^2 = -(N\,dt)^2 + h_{jk}(dx^j + N^j\,dt) \times \times (dx^k + N^k\,dt). \quad (5)$$

Comparando com a expressão geral $ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu$, podemos obter

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(N^2 - N_k N_l h^{kl}) & N_j \\ N_j & h_{jk} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

2.4. Formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral

O formalismo *A D M* indica então que as variáveis dinâmicas em Relatividade Geral que permitirão, num formalismo Hamiltoniano, determinar a *estrutura* do espaço-tempo são o tensor da métrica espacial, h_{jl}. Para melhor compreendermos como o formalismo *A D M* nos permite estabelecer uma estrutura adequada, é preciso salientar que as equações de Einstein na ausência de matéria (equações com derivadas parciais de segunda ordem não lineares e acopladas) podem ser obtidas de uma *densidade Lagrangiana*, dada por

$$L_{gr}(g_{\mu\nu}) = \frac{\sqrt{-g}}{2} R, \quad (7)$$

onde R é a curvatura escalar de Ricci. A expressão *densidade Lagrangiana* significa que os graus de liberdade já não formam um conjunto discreto e em número finito mas que são descritas por funções, o que é equivalente a dizer que se tem um conjunto com um número infinito de graus de liberdade. A curvatura escalar de Ricci é uma grandeza escalar matemática que permite avaliar a curvatura de um espaço. Sucede que R possui derivadas de *segunda ordem* do tensor da métrica. Contudo, se usarmos a expressão (6) para o tensor da métrica $g_{\mu\nu}$ podemos reescrever a expressão (7) na forma equivalente

$$L_{gr}(N, N^j, h_{jk}) = \frac{\sqrt{h}\,N}{2}[K^2 - K_{jk}K^{jk} - {}^{(3)}R], \quad (8)$$

onde $g = \sqrt{h}N$ é o determinante de $g_{\mu\nu}$, com $\sqrt{h} = \det(h_{jk})$, ${}^{(3)}R$ é a curvatura das hipersuperfícies espaciais tridimensionais Σ_t calculada a partir de h_{jk}, à semelhança de R, e K_{jk} é designada de curvatura *extrínseca* (mede a curvatura das hipersuperfícies espaciais Σ_t *relativamente* à geometria quadridimensional onde estão imersas). Sobre o cálculo de (8) consulte-se as ref. [2, 19, 20]. O importante a referir aqui é que a expressão (8) só depende de N, N^i, h_{ij} e *primeiras* derivadas destas quantidades. Isso é fundamental para se passar sem problemas ao formalismo Hamiltoniano.

Os momentos canonicamente conjugados de N, N^i, h_{jk} são, respectivamente,

$$\pi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{N}} = 0, \tag{9}$$

$$\pi_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{N}^j} = 0, \tag{10}$$

$$\pi^{jk} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{h}_{jk}} = \frac{\sqrt{h}}{2} (h^{jk} K - K^{jk}), \tag{11}$$

onde o ponto « · » sobre as variáveis representa a derivação destas relativamente ao tempo. Uma vez que $\pi = \pi^j = 0$, concluímos que N e N^j não são variáveis dinâmicas e as equações (9), (10) constituem assim ligações — designadas de ligações primárias — a que devem satisfazer as variáveis do nosso sistema. No caso da Relatividade Geral, a utilização do formalismo ADM permite escrever como Hamiltoniano para o campo gravitacional

$$\begin{aligned} H_{gr} &\equiv \int d^3x(\pi^{jk}\dot{h}_{jk} + \pi^j \dot{N}_j + \pi \dot{N} - L_{gr}(N, N^j, h_{jk})) \\ &\equiv \int d^3x(N H_G + N_j H^j)\,, \end{aligned} \tag{12}$$

onde H_G é dado por

$$H_G = G_{ijkl}\, \pi^{ij} \pi^{kl} - \frac{{}^{(3)}R\sqrt{h}}{2}\,, \tag{13}$$

e G_{ijkl} é definido por

$$G_{ijkl} = \frac{1}{\sqrt{h}} (h_{ik} h_{jl} + h_{il} h_{jk} - h_{ij} h_{kl}). \tag{14}$$

A forma particular do termo H^j não é importante no contexto deste trabalho. Adiante, apenas referiremos quais as consequências físicas da presença do termo H^j. Uma vez que $\dot{\pi} = \dot{\pi}^i = 0$ constituem condições que devem ser sempre satisfeitas para qualquer instante de tempo, devemos também escrever que $\dot{\pi} = \dot{\pi}^i = 0$. Por outro lado, das equações dinâmicas do formalismo Hamiltoniano, obtemos que

$$\dot{\pi}^j = - \frac{\delta H_{gr}}{\delta N} = 0, \tag{15}$$

$$\dot{\pi} = - \frac{\delta H_{gr}}{\delta N^j} = 0, \tag{16}$$

pelo que é então possível concluir da expressão (12) que

$$H_G = H^j = 0. \tag{17}$$

Os resultados (17) constituem condições ou ligações *secundárias*. A condição $H^j = 0$ representa, em termos simples, a invariância do formalismo ADM da Relatividade Geral relativamente a transformações gerais de coordenadas nas hipersuperfícies Σ_t. Por outras palavras, a formulação assim construída depende apenas da geometria tridimensional e não de uma escolha particular do tensor h_{jk} ou da escolha de coordenadas; a teoria é a mesma para a classe de variáveis $\{h_{jk}\}$ relacionadas por transformações gerais de coordenadas definidas nas hipersuperfícies espaciais tridimensionais. Por seu lado, a ligação $H_G = 0$ está relacionada com a invariância relativamente a reparametrizações no tempo que a teoria assim formulada possui. Se incluirmos campos materiais, a ligação $H_G = 0$ é generalizada por

$$\begin{aligned} H[h_{jk}, \pi_{jk}, \Phi, \pi_\Phi] &= H_G[h_{jk}, \pi_{jk}] + \\ &+ H_{matéria}[\Phi, \pi_\Phi] = 0, \end{aligned} \tag{18}$$

onde π_Φ são os momentos canonicamente conjugados dos campos materiais Φ.

2.5. Equação de Wheeler-De Witt

A partir das equações (13), (14) e (18) prossigamos na direcção da quantificação canónica da gravitação. Recordemos que o estado quântico de um sistema físico é representado por uma função Φ que depende das variáveis que descrevem os graus de liberdade desse sistema físico. Aqui, no caso da gravitação descrita pela teoria da Relatividade Geral, fazemos algo semelhante. Contudo, é importante salientar o seguinte aspecto. Na descrição Hamiltoniana a Relatividade Geral é uma teoria com constrangimentos (ou ligações). Ao pretender-se quantificar a gravitação de uma forma canónica, há que respeitar essas ligações. Isto quer dizer que aos constrangimentos clássicos têm que corresponder equações quânticas. Concretamente, e de acordo com o processo de quantificação canónica, procedemos à identificação

$$\pi^{jk} \longleftrightarrow - i \frac{\delta}{\delta h_{jk}} , \qquad (19)$$

$$\pi_{\Phi} \longleftrightarrow - i \frac{\delta}{\delta \Phi} . \qquad (20)$$

Substituindo (19) e (20) na equação (18) obtemos então

$$\widehat{H}\Psi[h_{ij}, \Phi] = 0. \qquad (21)$$

A equação (21) é uma equação diferencial *funcional* de segunda ordem designada de equação de Wheeler-De Witt. A função de onda do Universo, $\Psi[h_{ij}, \Phi]$, é definida num espaço designado de *Super-Espaço*: o conjunto de todas as geometrias espaciais tridimensionais e dos campos materiais definidos nas hipersuperfícies espaciais tridimensionais. A equação de Wheeler-De Witt fornece a informação relativa à dinâmica quântica da função de onda do Universo.

Sucede contudo que a equação de Wheeler-De Witt é uma equação diferencial funcional de segunda ordem definida no *Super-Espaço*, o qual tem dimensão infinita! A sua resolução torna-se pois impraticável. Uma alternativa consiste em reduzir os graus de liberdade do sistema, isto é, procurar sistemas mais simples e com mais simetrias que possam ser descritos com um número *finito* de graus de liberdade. Este procedimento é designado de *aproximação do Mini-Super-Espaço*, através do qual é possível obter várias soluções da equação de Wheeler-De Witt para esses sistemas, isto é, funções de onda do Universo. Nas referências [3]-[11], [12, 13] pode-se encontrar uma análise detalhada sobre a aproximação do *Mini-Super-Espaço* e das funções de onda do Universo resultantes dessa aproximação.

Contudo, deve ser salientado que possuir uma equação para a função de onda do Universo dá tanta informação relativamente ao estado quântico do Universo como a equação de *Schrödinger* fornece a evolução quântica de um sistema físico. De facto, a equação de *Schrödinger* admite muitas soluções. Identificar qual delas é a que descreve o nosso sistema físico requer a especificação de um estado inicial do sistema. Para a equação de Wheeler-De Witt a situação é semelhante. O próximo tópico será pois a introdução das «condições iniciais» do formalismo atrás descrito.

3. Problema das condições iniciais

A equação de Wheeler-De Witt possui inúmeras soluções. Qualquer função de onda Ψ que satisfaça a equação de Wheeler-De Witt descreve um *possível* estado quântico do Universo. Em qualquer tentativa de aplicar a mecânica quântica a todo o Universo há que especificar as condições iniciais e testar algumas das suas soluções. Isto é muito importante pois possibilita determinar o comportamento quântico do Universo. Um estado de particular importância em todo este contexto é o estado *fundamental* ou de *excitação mínima.*

O estado fundamental de uma teoria quântica pode ser também construído a partir de um formalismo equivalente à quantificação canónica: o formalismo do *integral de caminho* (do inglês *«path integral»)*. A importância desse método consiste em que as condições iniciais impostas às soluções da equação de Wheeler-De Witt são traduzidas em restrições à classe de variáveis que compõe o integral de caminho.

O leitor, contudo, ter-se-á sentido confuso após estes últimos parágrafos: referiu-se a necessidade de resolver a equação de Wheeler-De Witt como um problema de condições iniciais (no quadro da quantificação canónica) mas, ao invés, a função de onda do Universo pode ser obtida através do formalismo de integral de caminho. Os dois formalismos são, no entanto, equivalentes e a função de onda do Universo obtida através do formalismo de integral de caminho é solução da equação de Wheeler-De Witt (21). O que sucede é que equação de Wheeler-De Witt é muito difícil de resolver de forma exacta, pelo que se recorre ao formalismo do integral de caminho para obter a função de onda do Universo. Em muitos casos práticos os dois métodos (resolução da equação de Wheeler-De Witt e integral de caminho) são utilizados em conjunto, pois só assim se obtém uma informação mais detalhada sobre o comportamento quântico do Universo.

A formulação da Mecânica Quântica através do método de integral de caminho é baseada na noção de *propagador*: se $\varphi(q_{in}, t_{in})$ é a função de onda de uma partícula na posição q_{in}, no instante t_{in}, então a função de onda da partícula na posição q_f, no instante t_f, é dada por

$$\varphi(q_f, t_f) = \int G(q_f, t_f\ q_{in}, t_{in})\varphi(q_{in}, t_{in})\, dq_{in}.$$

O objecto $G(q_f, t_f; q_{in}, t_{in})$ é designado de *propagador* e fornece a amplitude de probabilidade de que ocorra uma transição da partícula no estado caracterizado pela posição q_{in}, no instante t_{in}, para o estado com posição final q_f, no instante t_f.

A informação quântica está contida no propagador $G(q_f\ t_f; q_{in}, t_{in})$. Na formulação canónica, dada uma função de onda inicial, encontramos a função de onda final resolvendo a equação de *Schrödinger*. Na formulação do integral de caminho, o propagador dá a solução directamente. O passo seguinte (que aqui é apenas mencionado e não descrito pois isso equivaleria a um outro artigo) consiste em escrever o propagador como um integral, calculado ao longo de todas as trajectórias possíveis que liguem o estado inicial ao estado final do sistema: o integral de caminho. Para uma melhor compreensão deste assunto pode-se consultar as ref. [2, 3, 21].

No que diz respeito ao nosso caso (a Cosmologia Quântica) comecemos por representar a amplitude de probabilidade de transição (propagador) de um estado do Universo, $|h'_{ij}, \Phi'>$, caracterizado por um tênsor da métrica espacial h'_{ij} e por campos materiais Φ', correspondentes a uma hipersuperfície espacial Σ_i, para outro estado $|h''_{ij}, \Phi''>$ caracterizado por um tensor da métrica espacial h''_{ij} e por campos materiais Φ'', correspondente a uma outra hipersuperfície Σ_2, como

$$G(h''_{ij}, \Phi''; h'_{ij}, \Phi'). \qquad (22)$$

A função de onda do Universo do estado de excitação mínima pode então ser escrita a partir do formalismo de integral de caminho atrás mencionado (ver ref. [3]) como

$$\Psi[h^{(f)}, \Phi^{(f)}] = \int \delta[g_{\mu\nu}]\delta[\Phi]G(g_{\mu\nu}, \Phi). \qquad (23)$$

A soma é tomada na classe de trajectórias do *Super-Espaço* que consistem em métricas quadridimensionais $g_{\mu\nu}$ e campos de matéria Φ limitadas pelo argumento da função de onda Ψ, isto é, as trajectórias são limitadas pelos valores dos respectivos campos nas duas hipersuperfícies, uma inicial Σ_i e uma final Σ_f. Na hipersuperfície inicial Σ_i, os campos $g_{\mu\nu}$ e Φ devem satisfazer certas condições iniciais, designadas de C, e devem também coincidir com os campos $h^{(f)}_{ij}$, $\Phi^{(f)}$ definidos na hipersuperfície final Σ_f. O termo $G(g_{\mu\nu}, \Phi)$ representa o propagador, i.e., a amplitude de probabilidade para uma transição até ao estado caracterizado por $\{h^{(f)}_{ij}, \Phi^{(f)}\}$.

Função de onda do (nosso) Universo

Especificar os estados cosmológicos que compõem a classe C corresponde a especificar «condições iniciais» (mais exactamente, condições de fronteira) para a equação de Wheeler-De Witt, a partir da qual se determina uma solução particular. Uma questão que surge naturalmente é a de como especificar a classe C de modo a $\Psi[h^{(f)}_{ij}, \Phi^{(f)}]$ representar o estado fundamental do nosso Universo, descrito por uma solução da equação de Wheeler-De Witt.

Muitas propostas têm sido feitas mas vamos aqui destacar apenas uma, a proposta de

Hartle-Hawking (cf. ref.]3, 8[), uma vez que é a que tem sido mais estudada e (por isso) mais divulgada. Quanto a outras propostas, consulte-se também a ref. [9]. A proposta de Hartle-Hawking refere-se a universos fechados, onde se assume que o estado fundamental (estado de excitação mínima) corresponde à noção clássica de uma geometria de elevada simetria, como é o Universo em que vivemos. Nessa proposta as condições iniciais C correspondem a assumir que a única fronteira existente é a hipersuperfície Σ_f o que implica que no integral de caminho a soma seja feita sobre todas as geometrias em espaço-tempos quadridimensionais compactos; um exemplo de um espaço compacto é a superfície de uma esfera. Isso significa que o Universo não tem fronteiras no espaço e no tempo. Assim a função de onda do Universo para uma dada geometria tridimensional, identificada com $h_{ij}^{(f)}$ e campos materiais $\Phi^{(f)}$, é fornecida pela expressão (23), sendo a soma efectuada para a classe de todas as métricas quadridimencionais $g_{\mu\nu}$ compactas e campos materiais Φ, cujo limite final corresponde ao estado caracterizado por $h_{ij}^{(f)}, \Phi^{(f)}$. Nesse caso a função de onda $\Psi[h_{ij}^{(f)}, \Phi^{(f)}]$ pode ser interpretada como a amplitude de probabilidade para que o Universo possua uma geometria tridimensional caracterizada por $h_{ij}^{(f)}$ e por campos materiais $\Phi^{(f)}$ nela definidos, a partir de uma situação em que a geometria tridimensional e a matéria são inexistentes, isto é, a criação do Universo a partir do *nada.*

Ao finalizar, refira-se algumas consequências importantes (e curiosas) que podemos extrair da Cosmologia Quântica. Em primeiro lugar é importante salientar que as condições iniciais impostas à função de onda do Universo através da equação de Wheeler-De Witt conduzem a condições iniciais para as equações clássicas da Relatividade Geral. Quer dizer que o Universo, como sistema físico, possui uma natureza quântica e o espaço-tempo clássico é um limite especificado pelas propriedades da função de onda do Universo.

Uma consequência muito importante da proposta de Hartle-Hawking é que permite obter uma dinâmica quântica do Universo até um estado onde o processo inflacionário ocorre satisfatoriamente (cf. ref. [3]-[10], [12]), permitindo também obter um espectro adequado de perturbações da densidade de matéria do Universo que possibilita a formação de galáxias (cf. ref. [11]).

É importante também salientar que a função de onda do Universo $\Psi[h_{ij}, \Phi]$ não depende do tempo. Basta comparar a equação de Wheeler-De Witt (21) com a equação de *Schrödinger* (3). A não dependência do tempo por parte de $\Psi[h_{ij}, \Phi]$ é apenas uma consequência da invariância da teoria da Relatividade Geral em relação a transformações gerais de coordenadas, pois o tempo, nesse contexto, é apenas um índice ou uma coordenada. Mas como é que este facto é consistente com o nosso *Universo observável* depender do tempo? O universo como um *todo* não depende do tempo pois se assim fosse teria que existir uma estrutura (*entidade*) imutável exterior ao próprio Universo e relativamente à qual o *Universo* evoluiria: por Universo queremos representar o *todo* que existe. Só quando separamos o Universo em duas partes *Macroscópicas* (um observador e um *Universo observado*) é que faz sentido em falar na evolução do Universo que observamos relativamente aos nossos instrumentos de medida.

4. Considerações Finais

Um dos propósitos deste trabalho é possibilitar uma informação sobre o conteúdo da Cosmologia Quântica a uma classe vasta de pessoas, na qual encontremos desde o(a) aluno(a) dos primeiros anos de Universidade até ao professor(a) Universitário que trabalhe num domínio (aparentemente) diferente da Cosmologia Quântica.

Não é fácil explicar de uma forma breve e concisa toda uma série de conceitos de Física e de Matemática que são imprescindíveis a uma teoria como a Cosmologia Quântica, sobretudo procurando abranger uma classe tão diversificada. É óbvio que alguns desses conceitos são já conhecidos e quase triviais para algumas pessoas enquanto que para outros são uma grande complicação!

Mas esse é um risco que este trabalho incluiu. Optou-se por oferecer uma visão global sobre o tema da Cosmologia Quântica (e por isso mesmo só aproximada), mas também se forneceu, em alguns pontos, uma descrição mais pormenorizada (mas acessível) que permita ao leitor interessado iniciar um estudo mais orientado. Conforme se terá também constatado, a Cosmologia Quântica é uma teoria muito complexa que corresponde a um desenvolvimento da teoria da Relatividade Geral e da teoria Quântica de Campos. É contudo uma teoria ainda em evolução e por isso não completa. Muitos aspectos da investigação recente ficaram por desvendar mas tópicos como a *terceira quantificação, wormohles*, o *googolplexus* irão ser objecto de outra publicação [22].

A terminar, gostaria de agradecer ao Dr. Luis Garay (CSIC, Madrid) e aos Professores A. Barroso, O. Bertolami, P. Crawford, A. B. Henriques, J. M. Mourão e F. D. Santos pelos muitos comentários e sugestões que fizeram a este trabalho. Estou particularmente grato ao Professor J. M. Mourão por todo o apoio e empenho que nele sempre manifestou e ao Prof. P. Crawford por me ter convidado a apresentar este trabalho no ciclo de palestras «Introdução às Cosmologias Modernas», que decorreu entre Maio-Julho/1991 no Departamento de Física da F.C.L.

REFERENCES

[1] K. KUCHAR — «*Canonical Methods of Quantization*», Quantum Gravity 2, (eds.) C. J. Isham, R. Penrose and D. W. Sciama, Oxford University Press, (Oxford, 1981).

[2] J. V. NARLIKAR and T. PADMANABHAN — «*Gravity, Gauge Theories and Quantum Cosmology*», D. Reidel Publishing Co. (Dordrecht, 1986).

[3] J. HARTLE — «*Quantum Cosmology*», Lectures delivered at the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, Yale University, June 10-14, 1985.

[4] I. MOSS — «*The origin of the Universe*», The Early Universe, (eds.) W. G. Unruh and G. W. Semenoff, NATO ASI, series C, Vol. 210, Reidel Publishing Company (Dordrecht, 1988).

[5] J. J. HALLIWELL — «*Introductory Lectures on Quantum Cosmology*», Proceedings of the 7th Jerusalem Winter School on Quantum Cosmology and Baby Universes, (eds.) S. Coleman, J. B. Hartle, T. Piran & S. Weinberg, World Scientific Publishing Co. (Singapore, 1991).

[6] L. Z. FANG and R. RUFFINI (eds.) — «*Quantum Cosmology*», Advanced Series in Astrophysics and Cosmology — Vol. 3, World Scientific Publishing Co. (Singapore, 1987).

[7] A. LINDE — «*Particle Physics and Inflationary Cosmology*», Contemporary Concepts in Physics, Volume 5, Harwood Academic Publishers (Chur, 1990).

[8] J. HARTLE e S. W. HAWKING — «Wave function of the Universe», Phys. Rev. **D28** (1983) 2960.

[9] A. VILENKIN — «Quantum Creation of Universes», Phys. Rev. **D30** (1984) 509.

[10] S. W. HAWKING — «The Quantum State of the Universe», Nucl. Phys. **B329** (1984) 257.

[11] J. J. HALLIWELL and S. W. HAWKING — «Origin of the Structure of the Universe», Phys. Rev. **D31** (1985) 1777.

[12] G. ESPOSITO and G. PLATANIA — «Inflationary Solutions in Quantum Cosmology», Class. Quantum Grav. **5** (1988) 937.

[13] S. W. HAWKING and Z. C. WU — «Numerical Calculations of MiniSuperspace Cosmological Models», Phys. Lett. **151B** (1985) 15.

[14] J. J. HALLIWELL — «A Bibliography of papers on Quantum Cosmology», Int. J. Mod. Phys. **A5** (1990) 2473.

[15] E. KOLB and M. TURNER — «*The Early Universe*», *Lecture Note Series* — Frontier in Physics — 69, Addison-Wesley (Boston, 1990).

[16] ROSA DOMINGUEZ-TENREIRO and MARIANO QUIRÓS — «*An introduction to Cosmology and Particle Physics*», World Scientific Publishing Co. (Singapore, 1988).

[17] C. COHEN-TANNOUDJI, B. DIU and F. LALOË — «*Mécanique Quantique, Tome I*», Hermann (Paris, 1977).

[18] H. GOLDSTEIN — «*Classical Mechanics*», Addison-Wesley (Boston, 1980).

[19] C. MISNER, K. THORNE and J. A. WHEELER — «*Gravitation*», Freeman (San Francisco, 1973).

[20] R. WALD — «*General Relativity*», The University of Chicago Press (Chicago, 1984).

[21] L. H. RYDER — «*Quantum Field Theory*», Cambridge University Press (Cambridge, 1985).

[22] P. V. MONIZ — Trabalho em preparação.