

# Propagação de feixes Laser

## I — Estudos teóricos

M. B. MARQUES (\*) e JOSÉ R. SALCEDO

Laboratório de Física, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
Praça Gomes Teixeira — 4000 PORTO

*Neste trabalho é apresentado, com intuítos didácticos, o cálculo das equações de propagação para ondas esféricas-gaussianas, na aproximação de Fresnel. Num segundo artigo, será apresentada a aplicação destas leis, em conjugação com um dispositivo experimental, para a caracterização do feixe emitido por um laser gasoso. Este dispositivo permitirá aferir, experimentalmente, a aplicabilidade das leis de propagação deduzidas neste artigo.*

### 1. Introdução

Ondas electromagnéticas esféricas-gaussianas, isto é, aquelas que são caracterizadas por uma distribuição de fase esférica e por uma distribuição de amplitude (e, por consequência, de intensidade) gaussiana, são modelos matemáticos apropriados para a descrição do tipo de ondas associadas a feixes laser, num vasto conjunto de situações correntes. Proporcionam, assim, uma ferramenta matemática importante no estudo da propagação de feixes laser, de forma apropriada em muitas situações. Feixes laser associados às designadas «cavidades estáveis» [1-5], podem em geral ser representados por ondas esféricas-gaussianas. As distribuições de campo electromagnético associadas a estas cavidades são em geral «bem comportadas», isto é, com variações transversais em fase e amplitude «suaves», numa escala de distâncias comparável ao comprimento de onda. Em geral já tal não sucede com os feixes laser associados às designadas «cavidades não-estáveis». Neste tipo de cavidades, as distribuições de campo electromagnético são caracterizadas por variações bruscas de fase ou de amplitude em planos transversais, pelo que um tratamento analítico mais rigoroso e até numérico é exigido [6, 7].

O objectivo do presente trabalho é estabelecer as leis de propagação de ondas esféricas-gaussianas. Num segundo artigo será apresentado um estudo experimental, em que se aplicam os princípios gerais aqui desenvolvidos.

### 2. Ondas esféricas-gaussianas: conceitos básicos

Vamos iniciar o estudo revendo alguns princípios básicos sobre ondas com distribuições específicas de fase.

Uma onda electromagnética designa-se, quanto à sua distribuição de fase, pela topologia da superfície que representa o lugar geométrico dos pontos da «frente de onda», isto é, aquela superfície de pontos definida pela condição «fase=constante». Numa onda «esférica» é, assim, aquela em que essa superfície é uma esfera. Conhecida a localização do centro («fonte»), um grau de liberdade é suficiente para determinar univocamente a esfera: o raio  $R$  é o parâmetro mais conveniente.

Em corte transversal a distribuição de fase de uma onda deste tipo será:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x,y) &= \exp[-jk(R^2 + x^2 + y^2)^{1/2}] \approx \\ &\approx \exp\left[-jk\left(R + \frac{x^2 + y^2}{2R} + \dots\right)\right] \approx \\ &\approx \exp(-jkR) \cdot \exp\left[-jk\left(\frac{x^2 + y^2}{2R}\right)\right] \quad (1) \end{aligned}$$

(\*) Bolseiro do I.N.I.C.

Assim, sempre que deparamos com uma variação transversal da distribuição de fase, de uma onda electromagnética, do tipo

$$\Phi(x,y) = k \frac{x^2 + y^2}{2R} = \frac{\pi}{R\lambda} (x^2 + y^2) \quad (2)$$

reconhecemos de imediato a sua distribuição esférica de fase, e dizemos que a onda correspondente é uma onda esférica.

Concentremo-nos de seguida na distribuição de amplitude que poderá estar associada a uma onda. Vamos considerar, em particular, uma distribuição gaussiana, com:

$$|\tilde{u}(x,y)| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2}\right) \quad (3)$$

$$\text{tal que } \iint |\tilde{u}(x,y)|^2 dx dy = 1$$

Esta normalização da intensidade da onda tem o sentido de fixar o fluxo total de potência num valor unitário, o que é conveniente.

Assim, em geral, poderemos escrever para uma onda esférica-gaussiana (convencionaremos, em tudo o que se segue, que o primeiro adjectivo classifica a distribuição de fase e o segundo a de amplitude):

$$\tilde{u}(x,y) = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega}}_{\text{norm.}} \underbrace{\exp\left(-j \frac{\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{R}\right)}_{\text{fase esférica}} \cdot \underbrace{\exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2}\right)}_{\text{amplitude gaussiana}} \quad (4)$$

Podemos simplificar esta expressão combinando os expoentes:

$$\begin{aligned} & -j \frac{\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{R} - \frac{x^2 + y^2}{\omega^2} = \\ & = -j \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R} - j \frac{\lambda}{\pi\omega^2} \right) (x^2 + y^2) = \\ & = -j \frac{\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{\tilde{q}} \quad (5) \end{aligned}$$

em que introduzimos o parâmetro:

$$\frac{1}{\tilde{q}} \equiv \frac{1}{R} - j \frac{\lambda}{\pi\omega^2} \quad (6)$$

Substituindo em (4), podemos assim escrever para uma onda esférica-gaussiana:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x,y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega} \exp\left(-jk \frac{x^2 + y^2}{2\tilde{q}}\right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega} \exp\left(-j \frac{\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{\tilde{q}}\right) \quad (7) \end{aligned}$$

Comparemos esta expressão com a que havíamos escrito, anteriormente, para uma onda esférica-plana:

$$\tilde{u}(x,y) \propto \exp\left(-j \frac{\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{R}\right) \quad (8)$$

Comparando estas duas últimas expressões, verificamos imediatamente que o parâmetro complexo,  $\tilde{q}$  [1, 4], pode ser considerado uma generalização directa do raio de curvatura real da frente de onda, como havíamos visto:

$\tilde{q}$ : raio de curvatura complexo da onda esférica-gaussiana.

Este parâmetro é interessante: na sua parte real, contém a totalidade de informação necessária para especificar a distribuição esférica da fase ( $R$ ), e na sua parte imaginária, a informação necessária à especificação da distribuição gaussiana da amplitude ( $\omega$ ). O comprimento de onda  $\lambda$  surge de forma natural.

Como conclusão, uma onda esférica-gaussiana pode ser representada, na sua forma mais geral, do seguinte modo:

$$\tilde{u}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega} \exp\left(-j \frac{\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{\tilde{q}}\right) \quad (9)$$

$$\text{em que: } \frac{1}{\tilde{q}} \equiv \frac{1}{R} - j \frac{\lambda}{\pi\omega^2}$$

( $\tilde{q}$  é o raio de curvatura complexo)

### 3. Propagação de ondas esféricas-gaussianas

#### 3.1. Princípio de Huyghens

Vamos agora estudar a propagação deste tipo de ondas, em meios homogêneos e isotrópicos. Neste estudo, resulta muito conveniente a aplicação do princípio de Huyghens. As premissas necessárias para que tal seja válido, são:

- as variações transversais na frente de onda sejam pequenas, na escala dimensional do comprimento de onda;
- as dimensões características do problema (dimensão dos componentes ópticos, distância de propagação e outras) sejam muito superiores ao comprimento de onda.

Da definição do princípio de Huyghens, (sobreposição vectorial de ondas esféricas emitidas por «fontes elementares» distribuídas uniformemente pela frente de onda [5], resulta de forma simples o seguinte integral que permite calcular a onda propagada a partir de um «estado anterior»:

$$\tilde{u}(x,y) = \frac{j}{\lambda} \iint \tilde{u}_0(r_0) \frac{1 + \cos \alpha}{2} \cdot \frac{\exp(-jk |r - r_0|)}{|r - r_0|} dx_0 dy_0 \quad (10)$$

Podemos representar a situação na forma geométrica indicada na Fig. 1.

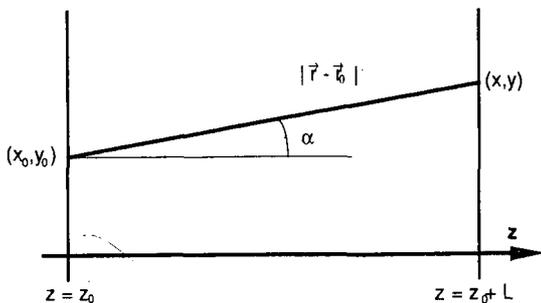


Fig. 1 — Geometria utilizada.

#### 3.2: Aproximação de Fresnel

Assumindo o formalismo de ondas esféricas-gaussianas como um modelo matemático apropriado para a descrição de feixes laser na sua expressão mais simples e corrente, podemos considerar, neste ponto da análise, algumas simplificações:

- i)  $\frac{1 + \cos \alpha}{2} \approx 1$ , para uma divergência angular pequena
- ii)  $|r - r_0| \approx |z - z_0| \equiv L$
- iii)  $k |r - r_0| \equiv k [(z - z_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2} \approx k \left[ L + \frac{(x - x_0)^2}{2L} + \frac{(y - y_0)^2}{2L} + \dots \right]$  (11)

Esta é a chamada aproximação de Fresnel. É fácil verificar que é válida para casos típicos de propagação de feixes laser.

Se  $a$  for a dimensão transversal característica, o majorante do erro cometido na expansão é:

$$\frac{k(x - x_0)^4}{4L^3} \approx \frac{\pi}{2} \frac{a^4}{L^3 \lambda} \quad (12)$$

este erro é desprezável se for muito inferior a  $\frac{\pi}{2}$ :

$$\frac{a^2}{L\lambda} \ll \left(\frac{L}{a}\right)^2$$

o que é válido para casos típicos em que as dimensões são da ordem de:  $a = 1 \text{ mm}$ ,  $L = 1 \text{ m}$ ,  $\lambda = 1 \mu\text{m}$ .

Como conclusão, na aproximação de Fresnel, podemos então escrever o integral de Huyghens:

$$\tilde{u}(x,y) = \frac{j \exp(-jkL)}{L\lambda} \iint_{\text{entrada}} \tilde{u}_0(x_0, y_0) \cdot \exp \left[ -j \left( \frac{k}{2L} \right) [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \right] dx_0 dy_0 \quad (13)$$

que representa a convolução entre  $\tilde{u}_0(x_0, y_0)$  e um «kernel» gaussiano.

Este integral permite propagar uma onda electromagnética, na aproximação de Fresnel, cuja aplicabilidade à propagação de ondas esféricas-gaussianas, que descrevem feixes laser comuns, foi já demonstrada. Na secção seguinte resolveremos o integral e obteremos as leis de propagação de feixes gaussianos.

#### 4. Leis de propagação

Vamos agora aplicar o integral de Huyghens à propagação de uma onda esférica-gaussiana.

Assumindo uma onda colimada à entrada, sem perda de generalidade:

$$\tilde{u}_0(x_0, y_0) = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0 \sqrt{\pi}} \exp \left[ \frac{-jk}{2\tilde{q}_0} (x_0^2 + y_0^2) \right] \quad (14)$$

com  $\tilde{q}_0 = j \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y, z) = & j \frac{\sqrt{2}}{\omega_0 \lambda \sqrt{\pi}} \frac{\exp(-jkz)}{z} \cdot \\ & \cdot \iint \exp \left\{ \frac{-jk [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]}{2z} \right\} \cdot \\ & \cdot \exp \left[ -jk \frac{(x_0^2 + y_0^2)}{2\tilde{q}_0} \right] dx_0 dy_0 \quad (15) \end{aligned}$$

Desenvolvendo o produto das exponenciais:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} (x-x_0)^2 + \frac{x_0^2}{\tilde{q}_0} &= \frac{x^2}{\tilde{q}_0 + z} + \\ & + \left( \frac{1}{\tilde{q}_0} + \frac{1}{z} \right) (x_0 - \beta x)^2 \quad (16) \end{aligned}$$

com  $\beta = \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}_0 + z}$

Substituindo na equação (15) temos:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y, z) = & j \frac{\sqrt{2} \exp(-jkz)}{z \omega_0 \lambda \sqrt{\pi}} \cdot \\ & \cdot \exp \left( -j \frac{k}{2} \frac{x^2 + y^2}{\tilde{q}_0 + z} \right) \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \iint \exp \left\{ -\frac{jk}{2} \left( \frac{1}{\tilde{q}_0} + \frac{1}{z} \right) \cdot \right. \\ & \left. \cdot [(x_0 - \beta x)^2 + (y_0 - \beta y)^2] \right\} dx_0 dy_0 \quad (17) \end{aligned}$$

Fazendo agora a mudança de variáveis para integração:

$$x_1 = x_0 - \beta x; \quad y_1 = y_0 - \beta y,$$

temos:

$$\begin{aligned} \frac{j}{\omega_0 \lambda z} \iint \exp(\dots) dx_0 dy_0 &= \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{1+j} \frac{1}{\frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2}} = \\ &= \frac{1}{\omega(z)} \exp [j \Psi(z)] \quad (18) \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \omega(z) &= \omega_0 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} \right)^2 \right]^{1/2} \\ \Psi(z) &= \tan^{-1} \left( \frac{\lambda z}{\pi \omega_0} \right) \end{aligned}$$

#### 5. Conclusão

Como conclusão, podemos dizer que, partindo de uma onda plana-gaussiana, cuja descrição é dada por:

$$\tilde{u}_0(x_0, y_0) = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0 \sqrt{\pi}} \exp \left[ \frac{-jk}{2\tilde{q}_0} (x_0^2 + y_0^2) \right]$$

obtemos, utilizando o princípio de Huygens, uma onda esférica-gaussiana:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y, z) = & \frac{\sqrt{2}}{\omega(z) \sqrt{\pi}} \exp \{ -j [kz - \Psi(z)] \} \cdot \\ & \cdot \exp \left[ \frac{-k}{2\tilde{q}(z)} (x^2 + y^2) \right] \quad (19) \end{aligned}$$

com:

$$\begin{aligned} \tilde{q}(z) &= \tilde{q}_0 + z = z + j \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}; \\ \frac{1}{\tilde{q}(z)} &= \frac{1}{R(z)} - j \frac{\lambda}{\pi \omega(z)} = \frac{1}{z + j \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}}; \end{aligned}$$

$$\omega(z) = \omega_0 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} \right)^2 \right]^{1/2};$$

$$\psi(z) = \tan^{-1} \left( \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} \right);$$

$$z_0 = \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} \equiv z_R;$$

$$R(z) = z + \frac{1}{z} \left( \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} \right)^2$$

Os parâmetros mais importantes para a caracterização da onda esférica-gaussiana são:  $R(z)$  o raio de curvatura da frente de onda,  $\omega(z)$  a distância a partir do eixo para a qual a amplitude decresce para 1/e do seu valor máximo, e  $z_0$  a distância de Rayleigh, distância para a qual  $\omega(z)$  toma o valor  $\sqrt{2} \cdot \omega_0$ .

A variação dos parâmetros  $\omega(z)$  e  $R(z)$  com a distância de propagação está indicada nas Figs. 2 e 3.

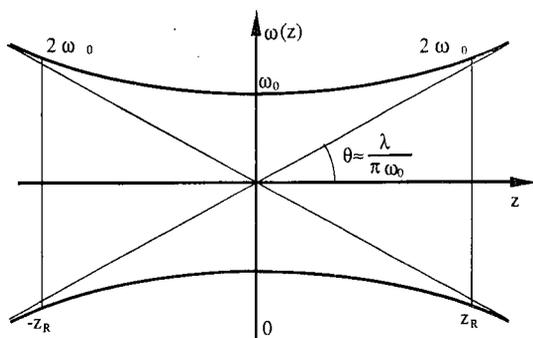


Fig. 2 - Variação do raio da distribuição de amplitude  $[\omega(z)]$  com a distância.

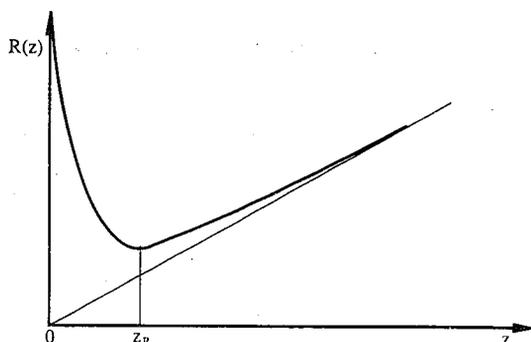


Fig. 3 - Variação do raio de curvatura da distribuição de fase  $[R(z)]$  com distância.

### BIBLIOGRAFIA

- [1] SIEGMAN, A. E. — «An Introduction to Lasers and Masers», McGraw-Hill, New York, cap. 8, (1971).
- [2] YARIV, A. — «Quantum Electronics», 2<sup>nd</sup> ed., Wiley, New York, cap. 6, (1975).
- [3] DEMTRÖDER, W. — «Laser Spectroscopy», Springer-Verlag Series in Chemical Physics, 5, cap. 5, (1981).
- [4] SIEGMAN, A. E. — «Lasers», University Science Books, cap. 14 a 17, (1986).
- [5] SALCEDO, J. — «Os Lasers», Revista Colóquio de Ciências, editada pela Fundação Calouste Gulbenkian, n.º 1, Fev. 88.
- [6] BOYD, G. D.; GORDON, J. P. — «Confocal Multimode Resonator for Millimeter Through Optical Wavelength Masers», Bell Sys. Tech. 40, p. 489, (1961).
- [7] FOX, A. G., Ting-YE LI — «Resonant Modes in a Maser Interferometer», Bell Sys. Tech. J., 40, p. 453, (1961).

## JANTAR DE HOMENAGEM

Por ocasião do jubileu do Prof. Doutor J. Gomes Ferreira, da Faculdade de Ciências de Lisboa, um grupo de colegas e discípulos promove um jantar de homenagem ao casal Gomes Ferreira no próximo dia 2 de Junho.

### Informações e Inscrições:

Departamento de Física da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa,  
Edifício C1, Rua Ernesto de Vasconcelos, Campo Grande, 1700 LISBOA  
Tel. 7583141, ext. 2161 ou 2162