GAZETA DE FISICA Vol. 12, Fasc. 2, Abril 1989

Proposta de introdução de problemas de semelhança nas cadeiras de Física

ANTÓNIO BROTAS
Instituto Superior Técnico — Lisboa

A diversidade dos sistemas de unidades em uso obrigava, algumas décadas atrás, os professores de Física e de várias disciplinas técnicas a dedicar especial cuidado aos problemas de mudança de unidades. Estes problemas tinham a vantagem de despertar a atenção dos estudantes para a questão da dimensão das grandezas físicas e da homogeneidade dimensional das fórmulas. Os alunos, dum modo geral, sabiam, desde o final do secundário, determinar com segurança as dimensões das grandezas mecânicas. Este conhecimento, para além de os auxiliar e de lhes dar confiança na resolução de problemas, tinha um papel formativo importante, pois lhe dava, no mínimo, uma habituação, e a alguns levava a reflectir sobre o significado e modo de aparecimento das fórmulas da Física. Com a tendência actual para o uso de um só sistema de unidades os problemas de mudança de unidades foram quase abandonados e a sensibilidade para estas questões diminuiu bastante. É hoje frequente encontrar nos primeiros anos da Universidade alunos que não ouviram falar do assunto, ou o consideram inteiramente periférico. Não se justificando o retorno aos antigos problemas, parece altamente indicada a sua substituição por um outro tipo de problemas, que designaremos por problemas de semelhança, que permitem trazer de novo a questão da dimensão das grandezas para o centro dos cursos de Física.

Apresentamos alguns exemplos de problemas deste segundo tipo:

1 — Dois sólidos são semelhantes. Sendo as dimensões lineares do segundo duas vezes as do primeiro, como estão relacionadas as suas superfícies e os seus volumes?

2 — Dois trajectos semelhantes são percorridos de um modo semelhante por dois pontos. Sendo as dimensões lineares do segundo trajecto duas vezes as do primeiro, e sendo, em cada instante, a velocidade do segundo ponto tripla da do primeiro, como estão relacionadas as respectivas acelerações? E os tempos que demoram os dois trajectos a ser percorridos?

3 — No problema 1, sendo a densidade do segundo sólido 1,2 vezes a do primeiro, como estão relacionadas as respectivas massas e momentos de inércia?

4 — Tendo no problema 2 os dois corpos as massas m_1 e $m_2 = 5\ m_1$, como estão relacionadas as respectivas energias cinéticas e as forças que sobre eles se exercem?

5 — Mostre que não é possível construir duas figuras semelhantes, em particular dois círculos, de dimensões diferentes sobre uma superfície esférica de raio R.

6 — Imagine um sistema solar semelhante ao do Sol em que as massas dos astros são 9 vezes maiores e as distâncias 4 vezes menores. Como estão relacionados os períodos dos movimentos de translação dos planetas dos dois sistemas?

7 — A frequência de vibração de uma mola é de 10 vibrações por segundo. Qual a frequência de vibração de outra mola semelhante

à anterior, feita com o mesmo material e com dimensões lineares 5 vezes menores?

8 — Dois recipientes semelhantes na escala de 1 para 2 estão cheios de um líquido viscoso. Que relação há entre o tempo que se demoram a esvaziar quando no fundo de um e de outro se abrem dois orifícios semelhantes?

9 — A velocidade de um navio é de 40 km/h. Qual deve ser a velocidade de um modelo reduzido na escala de 1 para 25 para reproduzir de um modo semelhante a navegação do navio real? E para impor essa velocidade qual deve ser a relação entre as potências dos motores do navio e do modelo? E se o modelo reduzido navegar não na água mas no mercúrio e não num laboratório terrestre mas na Lua?

10 — Mostre que os ensaios laboratoriais de modelos reduzidos de portos destinados a estudar o arrastamento dos elementos constituintes de um molhe não são propícios (caso não se utilizem artifícios especiais) para a verificação da resistência desses mesmos elementos. (Caso do molhe de Sines).

11 — O caudal num tubo horizontal de diâmetro d(1) de um líquido de densidade $\rho(1)$ e viscosidade $\mu(1)$ é q(1). Qual deve ser o caudal q(2) de um segundo líquido de densidade $\rho(2)$ e viscosidade $\mu(2)$ para reproduzir semelhantemente o escoamento num tubo de diâmetro d(2)? No caso da semelhança qual é a relação entre as perdas de carga unitárias $[\tau] = M\ L^{-2}\ T^{-2}$ (diferenças de pressão ao longo dos tubos por unidade de comprimento)?

12 — Dois circuitos percorridos por correntes eléctricas atraem-se com a força de 1 N. Com que força se atraem circuitos semelhantes, colocados numa posição semelhante, com dimensões lineares 10 vezes maiores e percorridos por correntes iguais? E se as correntes forem 3 vezes maiores?

13 — Um condutor electrizado atrai um dieléctrico com a força de 0,001 N. No caso de uma reprodução semelhante de todos os elementos na escala de 1 para 2, mas com materiais foi fabricado um outro íman e outra a carga aumentada para o triplo, qual é a força de atracção?

14 — Um íman atrai uma peça em ferro com a força de 0,1 N. Com os mesmos peça em ferro semelhantes, na escala de 1 para 2, que foram colocados em posições semelhantes. Com que força se atraem?

15 — Numa região mineira constatou-se que numa mina à profundidade de 300 m o dia mais quente do ano coincidia com o dia mais frio à superfície. O fenómeno nada tem de estranho para quem conhecer a equação de Fourier. É semelhante ao que se passa nas caves, frescas de dia e mais quentes à noite. Admitindo que na região referida o solo é homogéneo até à superfície, determine a que profundidade é previsível, na parede de um poço, encontrar um desfasamento de 12 horas em relação aos máximos e mínimos de temperatura à superfície. (Informação: na equação de Fourier figura uma única constante de dimensão $L^{-2}T$).

As cadeiras onde habitualmente se estudam problemas deste tipo são as cadeiras de Hidráulica e de Mecânica dos Fluidos das escolas de Engenharia. Assim, quase só os engenheiros civis e mecânicos têm alguma formação neste terreno. Parte dos problemas acima apresentados são problemas saídos em exames do I.S.T. Outros são transcritos do artigo: «Notas sobre a teoria da Semelhança» publicado, em 1980, no número 460 da revista «Técnica». O objectivo era, como agora, chamar a atenção para o assunto e propor, como prática habitual, a inclusão de problemas de semelhança nas cadeiras de Física dos primeiros anos de todos os cursos científicos e técnicos. Falei igualmente do assunto num Encontro Nacional de Física. O que se faz, aqui, é uma nova tentativa enriquecida com alguma experiência pedagógica adquirida nestes anos. (A notação a seguir utilizada é algo diferente da do artigo da «Técnica»).

Como ensinar a resolver problemas de semelhança

Penso, em primeiro lugar, que neste assunto, como em vário outros, não há que «ensinar» muito ao alunos. Há, sim, que despertar neles o hábito e a capacidade (e o gosto) de resolverem, ou pelo menos *tentarem* resolver problemas *pensando neles* antes de irem a correr procurar informações na bibliografia (ou, o que é pior, em cadernos de problemas resolvidos). Há, naturalmente, que lhes dar alguma ajuda.

No caso em questão, apresentada uma lista como a acima exposta, o docente pode dizer: «Está aqui uma lista de problemas. Os primeiros são fáceis e os outros são difíceis ou, pelo menos, não imediatos para quem não tenha pensado no assunto. Procurem ver como resolvem os primeiros e procurem depois utilizar a mesma metodologia na resolução dos seguintes».

O primeiro problema é de Geometria. O segundo é de Cinemática. As grandezas em questão são-nos muito familiares. Com alguma atenção e um mínimo de reflexão todos os estudantes são capazes de os resolver. Mas que método utilizam? São capazes de falar dele?

Manifestamente estes problemas estão relacionados com a dimensão das grandezas físicas e há algo de semelhante entre eles e os problemas de mudança de unidades. Vamos, pois, rever estas questões a partir das suas bases mais elementares.

As dimensões das grandezas físicas

Sabemos que as fórmulas da Geometria que nos dão os volumes e as áreas laterais dos cubos, das esferas, etc., etc., ($V=1^3$; $A=6\ 1^2$; $V=4\ \pi/3\ r^3$; $A=4\ \pi\ r^2$; ......) são invariantes no sentido de que servem para objectos e figuras de qualquer tamanho. São ainda invariantes no sentido de que são utilizáveis qualquer que seja a unidade de comprimento adoptada: os valores numéricos que figuram dos dois lados do sinal de igual nas aplicações concretas transformam-se de igual modo (aparecem multiplicados por favores iguais) quando mudamos de unidade de comprimento (e simultaneamente adoptamos as unidades de área e volume a ela associadas).

Designemos por L_{12} a relação entre duas unidades de comprimento:

$$L_{12}=\frac{\text{Unidade de comprimento 1}}{\text{Unidade de comprimento 2}}$$

e por 1_1 e 1_2 os valores numéricos das medições de um dado comprimento quando são usadas as unidades 1 e 2. Temos:

$$1_2=1_1 \ . \ L_{12} \quad .$$

Esta relação é válida qualquer que seja o comprimento medido.

A invariância de uma fórmula, como por exemplo: $V=1^3$, significa ser verdade:

$$V_1=1_1^3 \text{ e } V_2=1_2^3 \quad ,$$

sendo V_1 e V_2 os valores numéricos dum volume, neste caso de um cubo, quando usamos as unidades de volume correspondentes às unidades de comprimento 1 e 2. Os valores numéricos V_1 e V_2 de um volume (qualquer) devem estar relacionados por:

$$V_2=V_1\frac{\text{Unidade de volume 1}}{\text{Unidade de volume 2}}=V_1 \ . \ V_{12}$$

Reunindo todos estes elementos temos:

$$V_{12}=\frac{\text{Unidade de volume 1}}{\text{Unidade de volume 2}}=(L_{12})^3=$$

$$=\left(\frac{\text{Unidade de comp. 1}}{\text{Unidade de comp. 2}}\right)^3$$

e

$$V_2=V_1 \ . \ L_{12}^3 \quad .$$

Exprimimos estes resultados, válidos para todos os volumes, escrevendo:

$$[1]=[\text{distância}]=L \ ; \ [V]=[\text{volume}]=L^3$$

e dizendo que a dimensão do volume é L^3. Para as áreas temos $[A]=L^2$.

Todas as fórmulas da Geometria (nelas figuram distâncias, áreas e volumes) são concordantes com estes resultados. Esta concordância é assegurada pela sua homogeneidade, ou seja, igual dimensão (igual modo de transformação nas mudanças de sistemas de unidades) das expressões que figuram dos dois lados do sinal de igualdade.

Quando passamos da Geometria para a Cinemática aparece-nos uma nova grandeza, o tempo, independente dos comprimentos. Usamos a notação:

$$[t] = [\text{tempo}] = T$$

para significar:

$$t_2 = t_1 \frac{\text{Unidade de tempo 1}}{\text{Unidade de tempo 2}} = t_1 \; . \; T_{12} \quad .$$

Exigimos que as fórmulas da Cinemática sejam invariantes, como as da Geometria. As primeiras fórmulas em que nos aparecem as grandezas velocidade e aceleração permitem-nos determinar as suas dimensões, isto é, o seu modo de transformação quando mudam as unidades de comprimento e de tempo. Usando estas dimensões podemos, em seguida, verificar a invariância de todas as restantes fórmulas.

À semelhança do que fizemos em Geometria, uma abreviatura como:

$$[a] = L \; T^{-2}$$

significa:

$$\frac{\text{Unidade de aceleração 1}}{\text{Unidade de aceleração 2}} = L_{12} \; . \; T_{12}^{-2}$$

e

$$a_2 = a_1 \; L_{12} \; T_{12}^{-2} \quad .$$

Em Dinâmica, a fórmula $f = ma$ obriga-nos a escolher uma nova unidade fundamental (não dependente das anteriores). Habitualmente escolhemos a unidade de massa e escrevemos $[m] = M$. A massa é assim adoptada como grandeza fundamental. É fácil, em seguida, diante de uma lista de fórmulas da Mecânica, determinar as expressões dimensionais em função de M, L, T de todas as grandezas mecânicas e com elas verificar a invariância de todas as fórmulas. (Inicialmente adoptava-se a força como grandeza fundamental $[f] = F$. Nalguns problemas é útil continuar a fazê-lo para simplificar os cálculos).

Note-se que, quando escrevemos uma expressão como a lei da atracção universal de Newton:

$$f = G \; m \, m' / r^2 \quad ,$$

somos obrigados a atribuir à constante G a dimensão:

$$[G] = M^{-1} \; L^3 \; T^{-2}$$

para assegurar a invariância da fórmula.

G tem assim o valor $G = 6{,}673 \times 10^{-8}$ no sistema C G S e o valor $G = 6{,}673 \times 10^{-11}$ no sistema M K S.

Em Electromagnetismo, é necessário escolher uma quarta unidade independente, ou seja, uma nova grandeza fundamental. Inicialmente escolheu-se a carga $[q] = Q$ mas, recentemente, passou-se para a intensidade de corrente $[i] = I$ por as intensidades serem mais fáceis de medir. Pesou, sem dúvida, a influência dos electrotécnicos. É possível que, por influência dos físicos das partículas elementares, se volte um dia para trás. De qualquer modo, usando M L T Q, ou M L T I, é fácil determinar as dimensões das grandezas electromagnéticas e verificar a invariância de todas as fórmulas.

Note-se que as duas constantes ε_0 e μ_0 aparecem com as dimensões:

$$[\varepsilon_0] = M^{-1} \, L^{-3} \, T^4 \, I^2 \quad \text{e} \quad [\mu_0] = M \, L \, T^2 \, I^{-2} \quad ,$$

condizentes com a fórmula:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \, \mu_0}}$$

em que c é a velocidade da luz.

No Sistema Internacional (não racionalizado) ε_0 e μ_0 têm os valores:

$$\varepsilon_0 \simeq \frac{1}{(2{,}997925)^2 \; 10^9} \quad , \quad \mu_0 = 10^{-7}$$

(no sistema racionalizado ε_0 aparece dividido por $4\,\pi$ e μ_0 multiplicou por $4\,\pi$).

Em Termodinâmica somos obrigados a introduzir uma nova grandeza fundamental.

Escolhemos habitualmente a temperatura $[T] = [\text{temperatura}] = \theta$.

A constante de Boltzmann aparece-nos com a dimensão $[k] = M\,L^2\,T^{-2}\,\theta^{-2}$. Num sistema: metro, kilograma, segundo, grau Kelvin, k toma o valor:

$$k = 1{,}38054 \times 10^{-23}$$

(Um exercício aconselhável a quem tenha de iniciar o estudo de um capítulo da Física, é escrever em ordem dispersa numa folha de papel todas as fórmulas relacionadas com a nova matéria, mesmo as na altura ainda não estudadas e, em seguida, determinar as dimensões de todas as grandezas que nelas figuram e com elas verificar a invariância de todas as fórmulas).

Os problemas de mudança de unidades

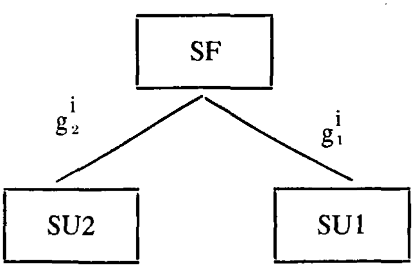
Compreendida a matéria exposta, a resolução de problemas de mudança de unidades torna-se algo elementar, quase automático.

Sendo g^i uma grandeza de um sistema físico, conhecida a sua dimensão, isto é, os expoentes α_i, β_i, γ_i, θ_i, φ_i da fórmula:

$$[g^i] = M^{\alpha i}\, L^{\beta i}\, T^{\gamma i}\, I^{\theta i}\, \theta^{\varphi i}$$

e sendo dadas as relações M_{12}, L_{12}, T_{12}, I_{12} e θ_{12} entre as unidades de dois sistemas, os valores numéricos g_1^i e g_2^i da referida grandeza nos dois sistemas estão relacionados por:

$$g_2^i = g_1^i\, M_{12}^{\alpha i}\, L_{12}^{\beta i}\, T_{12}^{\gamma i}\, I_{12}^{\theta i}\, \theta_{12}^{\varphi i}$$



Os problemas de semelhança
Definição de semelhança

Podemos usar a seguinte definição de semelhança geométrica:

«Duas figuras, ou objectos, 1 e 2 são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca $P_1 \longleftrightarrow P_2$ tal que as distâncias entre os pontos da primeira e as distâncias entre os pontos correspondentes da segunda tenham uma relação constante R_{12}.

$$R_{12} = \frac{d(1)}{d(2)} = \frac{|A_1 - B_1|}{|A_2 - B_2|} =$$

$$= \frac{d_1(1)}{d_1(2)} = \frac{d_2(1)}{d_2(2)}, \quad (\forall\ A_1, B_1)$$

(Representamos por $d_1(1)$ e $d_2(1)$ os valores numéricos da distância $d(1)$ entre os pontos A_1 e B_1 em dois sistemas de unidades 1 e 2. Idem para $d_1(2)$ e $d_2(2)$, valores numéricos da distância $d(2)$ entre os pontos A_2 e B_2).

Admitamos que a relação L_{12} entre as unidades de comprimento de dois sistemas de unidades é exactamente igual a R_{12}:

$$\frac{d_2(1)}{d_1(1)} = \frac{d_2(2)}{d_1(2)} = L_{12} = \frac{\text{Unid. comp. 1}}{\text{Unid. comp. 2}} =$$

$$= R_{12} = \frac{d_1(1)}{d_1(2)}.$$

Vemos imediatamente que:

$L_{12} = R_{12} \longleftrightarrow d_1(1) = d_2(2)$ (para todos os pares de pontos), o que nos permite exprimir a noção de semelhança de um modo muito breve e fácil de apreender:

«Duas figuras são semelhantes se houver dois sistemas de unidades 1 e 2 tais que $d_1(1) = d_2(2)$ (para todos os pares de pontos)».

Dois quadrados são semelhantes.

Seja L_{12} a relação entre as unidades de comprimento de dois sistemas de unidades. Sejam dois quadrados tais que entre os seus lados haja a relação:

$$R_{12} = \frac{d(1)}{d(2)} = L_{12}.$$

A fórmula $A = l^2$ da Geometria é invariante, como dissemos, no sentido de ser aplicável a todo e qualquer quadrado, e no sentido de ser utilizável com qualquer sistema de unidades. Podemos em consequência escrever:

$$\frac{A_2(1)}{A_2(2)} = \frac{A(1)}{A(2)} = \frac{d(1)^2}{d(2)^2} = R_{12}^2 = L_{12}^2 = \frac{A_2(1)}{A_1(1)}$$

Vemos que a relação $d_2(2)=d_1(1)$ implica para a área dos quadrados e consequentemente para as áreas de quaisquer figuras:

$$A_2(2)=A_1(1) \quad .$$

Usando a fórmula do volume do cubo encontramos de igual modo para os volumes:

$$V_2(2)=V_1(1) \quad .$$

Estes resultados permitem-nos substituir a anterior definição por outra equivalente, mas com uma formulação de âmbito mais vasto:

«Dois objectos geométricos são semelhantes se houver dois sistemas de unidades 1 e 2 tais que, para as grandezas (g^i) correspondentes de um e de outro (distâncias, áreas e volumes), se verificar:

$$g^i_2(2)=g^i_1(1) \quad ».$$

É a generalização desta definição que vamos adoptar para definição de semelhança física de dois sistemas:

«Dois sistemas físicos 1 e 2 são semelhantes, se existirem dois sistemas de unidades 1 e 2 tais que, para as grandezas correspondentes $g^i(1)$ e $g^i(2)$ de um e de outro (grandezas físicas que interessem ao nosso estudo), se verificar:

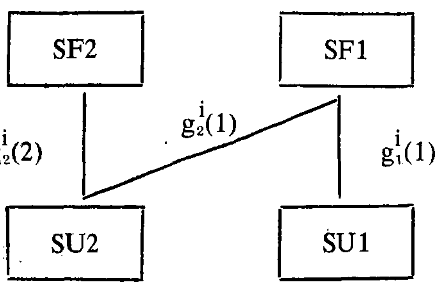
$$g^i_2(2)=g^i_1(1) \quad ».$$

ou seja:

$$R^i_{12}= \frac{g^i(1)}{g^i(2)} = \frac{g^i_2(1)}{g^i_2(2)} = \frac{g^i_2(1)}{g^i_1(1)} =$$

$$=M^{\alpha i}_{12}\, L^{\beta i}_{12}\, T^{\gamma i}_{12}\, I^{\theta i}_{12}\, \theta^{\varphi i}_{12}$$

Esta última fórmula desempenha um papel fundamental na resolução dos problemas.



Resolução dos problemas

Os problemas que nos são postos obedecem em geral ao seguinte esquema:

1 — É-nos descrito um sistema físico SF1.

2 — É-nos perguntado se é possível construir (ou simplesmente imaginar) um sistema físico SF2, semelhante ao anterior, que verifiquem certas condições do tipo:

$$R^i_{12}= \frac{g^i(1)}{g^i(2)}$$

em que os R^i_{12} nos são dados ou impostos.

3 — Caso sim, é-nos pedido para calcular os

$$R^j_{12}= \frac{g^j(1)}{g^j(2)}$$

correspondentes a grandezas g^j distintas das grandezas g^i, mas a partir delas calculáveis.

Consideremos o problema 4.

Os dados permitem-nos escrever:

$$R^l_{12}= \frac{l(1)}{l(2)} = \frac{1}{2} =L_{12} \; ;$$

$$R^m_{12}= \frac{m(1)}{m(2)} = \frac{1}{5} = =M_{12} \quad ;$$

$$R^v_{12}= \frac{v(1)}{v(2)} \; \frac{1}{3} =L_{12}\, T^{-1}_{12} \quad .$$

Estas relações permitem-nos calcular M_{12}, L_{12}, T_{12}. Com os valores obtidos podemos, imediatamente, escrever a resposta às questões postas:

$$R^{En}_{12}= \frac{E_n(1)}{E_n(2)} =M_{12}\, L^2_{12}\, T^{-2}_{12}= \frac{1}{45} \; ;$$

$$R^f_{12}= \frac{f(1)}{f(2)} =M_{12}\, L_{12}\, T^{-2}_{12}= \frac{2}{45} .$$

Nos problemas de Mecânica deste tipo, dado um sistema físico inicial, para construir um sistema semelhante basta-nos atribuir valores à nossa escolha aos três coeficientes M_{12}, L_{12}, T_{12}. Neste sentido diremos que as equações da Mecânica simples (sem lei da atracção universal de Newton) são equações «com invariância de escala com três graus de liberdade». (Esta maneira de dizer não é corrente e estamos a introduzi-la aqui. É apresentada à crítica dos leitores).

No mesmo sentido diremos que as fórmulas da geometria euclideana (a uma, duas e três dimensões) têm «invariância de escala com um grau de liberdade» e que as fórmulas da Cinemática têm «dois graus de liberdade».

O papel das constantes

Vemos que os problemas de semelhança se podem resolver quase com tanto «automatismo» como os problemas de mudança de unidades. É no entanto preciso algum cuidado.

Vejamos o problema 5.

A área de um círculo (calote) de raio r na superfície de uma esfera de raio R é dada por:

$$A = 2\pi R^2 \left(1 - \cos\frac{r}{R}\right) \simeq \pi r^2 \quad (\text{para } r << R).$$

Esta fórmula é invariante como as anteriores. Para resolver o problema 5 nem sequer é necessário conhecê-la em detalhe. Basta saber que A é uma função homogénea de grau dois de r e R, mas não unicamente de r.

Se considerarmos duas calotes de raios diferentes $r(1) \neq r(2)$ sobre uma mesma superfície esférica $R = R(1) = R(2)$, não encontramos solução conjunta para:

$$R^r_{12} = \frac{r(1)}{r(2)} = L_{12} \neq 1 \quad \text{e} \quad R^R_{12} = \frac{R(1)}{R(2)} = L_{12} = 1 \; .$$

Temos ainda:

$$\frac{A(1)}{A(2)} \neq \left(\frac{r(1)}{r(2)}\right)^2$$

Não há, pois, calotes semelhantes com raios diferentes sobre uma mesma superfície esférica. Nem outras quaisquer figuras semelhantes com dimensões diferentes.

As fórmulas da geometria sobre uma esfera têm assim «zero graus de liberdade», ou «invariância de escala nula». (A imposição de $R(1) = R(2)$ retirou-nos a liberdade de escolha de L_{12}).

Note-se que para r pequenos ($r >> R$) a fórmula aproximada permite-nos escrever:

$$\frac{r(1)}{r(2)} = L_{12} \quad ; \quad \frac{A(1)}{A(2)} \simeq L^2_{12} \; .$$

Ignorando o valor de R, que pode não ser notado por quem ande a fazer uma geometria local à superfície de uma esfera, podemos dizer que para pequenas figuras há uma invariância de escala aproximada.

Olhemos agora o problema 6.

Queremos imaginar dois sistemas solares com dimensões diferentes e massas diferentes. A constante G será a mesma nos dois casos porque não nos propomos mudar de Universo. Os dados do problema traduzem-se por:

$$R^m_{12} = \frac{m(1)}{m(2)} = \frac{1}{9} = M_{12} \quad ;$$

$$R^d_{12} = \frac{d(1)}{d(2)} = 4 = L_{12}$$

$$R^G_{12} = \frac{G(1)}{G(2)} = 1 = M^{-1}_{12} L^3_{12} T^{-2}_{12} \; .$$

Estas relações permitem-nos calcular T_{12} e escrever:

$$R^{per}_{12} = \frac{per(1)}{per(2)} = T_{12} = 24.$$

Nos problemas de Mecânica envolvendo a lei de atracção universal na procura de sistemas semelhantes somos limitados pela imposição $G(1) = G(2)$. Na escolha de M_{12}, L_{12} e T_{12} só temos *dois* graus de liberdade. As equações da Mecânica com inclusão da lei de atracção universal só têm assim «invariância de escala com dois graus de liberdade».

A constante G desempenha um papel semelhante ao raio R no problema anterior. Nos problemas de Mecânica Celeste, em que as massas são grandes, G tem um papel fundamental. Nos problemas com massas pequenas a sua influência é mínima. Ninguém pretende que no choque entre dois carros a atracção universal desempenhe qualquer papel significativo. Assim as equações da Mecânica em rigor, têm invariância de escala com dois graus de liberdade, mas nos problemas com massas pequenas têm aproximadamente três graus de liberdade.

Podemos pensar que as equações globais de Física não devem ter uma invariância de escala rigorosa. Se assim não fosse deveria haver átomos de todos os tamanhos. Nos modelos clássicos como os que estamos a considerar, os graus de liberdade das equações, vão-se perdendo à medida que nelas aparecem constantes fundamentais. Um conjunto de fórmulas em que apareçam a constantes G, c e h já não tem invariância de escala. Como é sabido, esta última constante foi introduzida em Física dum modo muito especial que obrigou, exactamente, a ultrapassar, os modelos clássicos. A não invariância de escala da Física é, pois, algo que se revela de um modo muito subtil e não há a pretensão de a tratar num âmbito clássico. Menos ainda num âmbito não relativista em que se não consideram, como é o caso aqui, noções de que hoje se fala de um modo tão corrente (e talvez abusivo) como é o caso da duração e dimensões do Universo.

O que acaba quase por ser motivo de surpresa, é haver equações da Física com invariância de escala, com dois e três graus de liberdade, que não serão em absoluto rigorosas, mas que têm domínios de aplicação extremamente vastos. Foi com estas equações que começamos a fazer Física. Elas revelaram-se concordantes com uma gama imensa de fenómenos e com o comportamento dos objectos que encontramos à nossa volta (embora de um modo geral não expliquem a sua existência). Habituámo-nos, assim, a esta invariância de escala das equações e de muitos fenómenos e objectos da Física que nos pareceu rigorosa. É desta invariância que se trata quando falamos de problemas de semelhança.

Os modelos reduzidos (ou ampliados)

Vejamos mais alguns problemas.

Problema 7

A frequência de vibração de uma mola depende da sua densidade $[\rho] = M L^{-3}$ e do seu módulo de elasticidade $[E] = M L^{-1} T^{-2}$.

Sendo o material o mesmo, temos:

$$R^{\rho} = M_{12} L_{12}^{-3} = 1 \quad ; \quad R^{E} = M_{12} L_{12}^{-1} T_{12}^{-2} = 1 \ :$$

Sendo $R^d = 5 = L_{12}$, obtemos:

$$T_{12} = 5 \quad ; \quad R^f = T_{12}^{-1} = \frac{1}{5} \ ;$$

$f(2) = 5\ f(1)$. A frequência da segunda mola é 5 vezes superior à da primeira.

As equações de vibração de uma mola de um dado material, em que figuram duas constantes, têm «invariância de escala com um grau de liberdade». As molas desse material geometricamente semelhantes vibram de um modo semelhante.

Problema 8

O escoamento de um líquido depende da aceleração da gravidade g, da densidade ρ, e da viscosidade μ de dimensão $[\mu] = M L^{-1} T^{-1}$.

Nas duas situações à partida semelhantes, com o mesmo líquido mas com dimensões diferentes, temos:

$$R^{g} = L_{12} T_{12}^{-2} = 1 \quad ; \quad R^{\rho} = M_{12} L_{12}^{-3} = 1 \quad ;$$

$$R^{\mu} = M_{12} L_{12}^{-1} T_{12}^{-1} = 1 \quad ; \quad R^{d} = L_{12} = \frac{1}{2} = 1 .$$

Estas relações não são conciliáveis. Tal significa que os recipientes considerados, embora geometricamente semelhantes e com o mesmo líquido, não têm escoamentos semelhantes. Para conhecer a duração de cada escoamento há que usar as equações da Hidráulica e fazer o cálculo completo tendo em conta as condições nos limites e os particularismos de cada problema. A teoria da semelhança não é aplicável. As equações do escoamento de um líquido viscoso de um recipiente, dependendo de três constantes, não tem «invariância de escala».

Problema 9

A situação aparentemente é a mesma do problema anterior. Sucede, porém, que no estudo de um navio a influência da viscosidade da água é diminuta e não é, de facto, tida em conta pelos engenheiros.

Podemos, pois, não considerar a condição:

$$R^{\mu} = M_{12}\, L_{12}^{-1}\, T_{12}^{-1} = 1 \ .$$

As restantes condições:

$$R^{g} = 1 \ ; \ R^{\rho} = 1 \ \text{e} \ R^{d} = \frac{d(1)}{d(2)} = 25$$

são conciliáveis e fornecem-nos:

$$L_{12} = 25 \ ; \ T_{12} = 5 \ ; \ M_{12} = 125 \ ,$$

com o que calculamos:

$$R^{pot} = \frac{pot(1)}{pot(2)} = 5^{7} \ .$$

No caso do navio navegar no mercúrio e na Lua teríamos:

$$R^{g} = 10 \quad ; \quad R^{\rho} = \frac{1}{13{,}6} \ .$$

Nos problemas de Mecânica dos Fluidos deste tipo, em que há uma invariância de escala aproximada por ser muito pequeno o efeito da viscosidade, dizemos que há *semelhança de Froude.*

O número de Froude, o mesmo no navio e no modelo é dado por:

$$F_r = \frac{v(1)^2}{g(1)\ .\ 1(1)} = \frac{v(2)^2}{g(2)\ .\ 1(2)} \ ,$$

em que 1(1) e 1(2) são comprimentos característicos do sistema em estudo, normalmente, num caso como este, o comprimento do navio.

Problema 10

É igualmente um problema em que há semelhança de Froude. É fácil verificar que as forças hidráulicas variam com o cubo das dimensões lineares. Como o mesmo se passa com o peso, o arrastamento ou não arrastamento dos elementos dum molhe pode ser ensaiado em modelo reduzido. As pressões variam porém com a dimensão linear. As pressões à superfície, e portanto também as tensões internas, num modelo com dimensões 10 vezes menores são 10 vezes menores. Compreende-se que no molhe possam aparecer elementos partidos sem que nada tenha sido detectado no modelo reduzido.

Problema 11

Trata-se de um problema em que a influência de g não se faz sentir Em que podemos, portanto, pôr de lado a relação $R^{g}=1$. Com as restantes condições calculamos M_{12}, L_{12}, T_{12}. Dizemos, neste caso, que há invariância de Reynolds. O número de Reynolds, o mesmo para os dois sistemas, é dado por:

$$R_e = \frac{\rho(1)\ v(1)\ 1(1)}{\mu(1)} = \frac{\rho(2)\ v(2)\ 1(2)}{\mu(2)} .$$

Quando se sabe que há semelhanças Reynolds, esta igualdade permite resolver quase automaticamente muitos problemas.

Vemos que para resolver problemas de semelhança há que saber quais as grandezas que tem influência no fenómeno em causa. (É uma informação que pode ser colhida junto dos especialistas). Nos problemas técnicos, em rigor, a «invariância de escala» é quase sempre nula. A arte na utilização da teoria da semelhança esta em saber quais as grandezas cuja influência pode ser ignorada, para se ter uma invariância de escala aproximada que nos permita utilizar modelos com escalas diferentes.

Há, como vemos, uma diferença substancial entre os problemas de mudanças de unidades e os problemas de semelhança. Nos primeiros, podemos livremente imaginar novos sistemas de unidades, arbitrando à nossa escolha os valores dos coeficientes M_{12}, L_{12}, T_{12}. Nos segundos, partindo de um sistema físico, a possibilidade de construir um segundo sistema a uma escala diferente é, em geral, limitada pelos valores que nos são impostos de várias grandezas com influência nos fenómenos, e que restringem a escolha dos coeficientes M_{12}, L_{12}, T_{12} que exprimem, neste caso, as relações de semelhança.