GAZETA DE FISICA Vol. 12, Fasc. 4, Outubro 1989

Uniformização das notações utilizadas no ensino da Física

Um contributo baseado nas recomendações internacionais

JORGE VALADARES
Universidade Aberta e Colégio Militar

GUILHERME DE ALMEIDA
Escola Secundária Marquês de Pombal

Introdução

É manifestamente desejável que haja uniformidade e que não se verifique ambiguidade nas notações e símbolos das grandezas utilizadas em Física, assim como na sua terminologia.

O único objectivo da sequência de trabalhos que agora iniciamos é contribuir, na medida do possível, para essa uniformização. Para tal, tomamos por base as recomendações emitidas por entidades internacionais que se ocupam da uniformização dos nomes, símbolos e definições das grandezas físicas,

International Organization for Standardization (ISO) (1)
Commission Electrotechnique Internationale (CEI) (2)
International Union of Pure and Applied Physics (IUPAP)

e por organizações nacionais como a *Royal Society* (3) (RS) e o Instituto Português da Qualidade (IPQ)(4).

Estão postas de lado, portanto, quaisquer preocupações de desenvolver sequências metodológica e didacticamente recomendáveis. Este trabalho é intencionalmente apresentado no momento em que se avizinha uma reestruturação dos programas e, com ela, uma reformulação de todos os manuais existentes no mercado. Tem por origem uma comunicação apresentada pelos mesmos autores, sob a forma de cartaz, na 6.ª Conferência Nacional de Física, que decorreu em Aveiro, de 26 a 29 de Setembro de 1988.

I — Cinemática

1. *Notação proposta para o movimento de uma partícula no espaço*

1.1. Utilização de coordenadas de espaço (x, y, z)

Considere-se uma partícula P que, movendo-se ao longo de uma trajectória qualquer, está em P_0 no instante inicial (ou instante zero), P_1 no instante t_1, P_2 no instante t_2, etc. — Fig. 1.

Os vectores de posição são:

$\mathbf{r}_1$, no instante t_1
$\mathbf{r}_2$, no instante t_2

etc. (ver nota final).

---

(1) A ISO reúne os organismos de normalização de 90 países, incluindo Portugal. Através da sua Comissão Técnica 12 (ISO/TC 12), exerce actividade normalizadora no âmbito dos nomes, símbolos, definições e dimensões de grandezas físicas (excepto electricidade e magnetismo). Ocupa-se também da normalização relativa aos números e aos símbolos matemáticos.

(2) A CEI exerce actividade normalizadora no âmbito da electricidade e magnetismo. Trabalha conjuntamente com a ISO, na qual se encontra filiada. Outras organizações, como a IUPAP, produzem também documentos normativos relativamente à Física.

(3) A RS é uma das mais prestigiadas organizações científicas de todo o mundo. Existindo desde 1672 teve, como principais membros, alguns dos maiores físicos de sempre.

(4) O IPQ é a entidade que, em Portugal, se ocupa de normalização, certificação e metrologia. Funciona sob a tutela do Ministério da Indústria e Energia, competindo-lhe a emissão das normas portuguesas (NP) e a representação do País nas conferências e organizações internacionais.

O deslocamento da partícula entre os instantes t_1 e t_2, que é uma grandeza intrinsecamente vectorial, está representado pelo vector

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

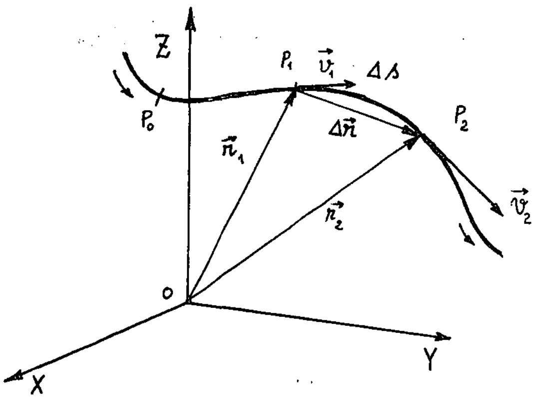

Fig. 1

1.1.1. Equação do movimento e equação das distâncias percorridas

A equação

$$\mathbf{r} = x(t)\ \mathbf{e}_x + y(t)\ \mathbf{e}_y + z(t)\ \mathbf{e}_z \quad (^5)$$

$$\mathbf{r} = f_1(t)\ \mathbf{e}_x + f_2(t)\ \mathbf{e}_y + f_3(t)\ \mathbf{e}_z$$

chama-se equação do movimento.

As equações:

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t) \text{ e } z = f_3(t)$$

denominam-se equações paramétricas do movimento e delas resulta, por eliminação da variável t, a equação da trajectória.

A equação

$$s = f(t)$$

chama-se equação das distâncias percorridas, já que, para cada instante t, permite obter a distância s, percorrida pela partícula, sobre a trajectória, desde o instante inicial.

O símbolo s, de acordo com as organizações internacionais, já referidas na introdução, designa o *comprimento curvilíneo*, ou a *distância medida sobre a trajectória* — Fig. 2 (a), (b), (c).

Como *comprimentos* e *distâncias* negativos não têm significado físico, a função $s = f(t)$ representa uma grandeza *não negativa e sempre crescente à medida que a partícula se move, independentemente do sentido em que o faz.*

A utilização do símbolo s, para representar uma «abcissa curvilínea» mostra-se incoerente com o significado que acabámos de referir, pois, se fosse abcissa, poder-se-ia ter

$$s > 0,\ s = 0 \quad \text{ou} \quad s < 0$$

rayon	r		(ISO)
diamètre	d, D		
longueur curviligne	s		
thickness; *épaisseur*	d, δ		(IUPAP)
diameter; *diamètre:* $d = 2r$	d		
element of path; *élément de parcours*	ds		
area; *aire, superficie*	A, S		
volume; *volume*	$V, (v)$		
diameter: $2r$	d		(RS)
distance along path	s, L		
generalized coordinate	q		
angular acceleration: $d\omega/dt$	α		(RS)
speed: ds/dt	u, v, w		
acceleration: du/dt	a		
spherical coordinates	r, θ, ϕ		(RS)
position vector; radius vector	$\mathbf{r}$		
area	$A \ldots S$		

Fig. 2 — Simbologia, rigorosamente transcrita, da documentação emitida pela ISO, pela IUPAP e pela RS.

e $s = f(t)$ a crescer ou a decrescer durante o movimento.

Como veremos adiante, tal facto é incompatível com a definição de rapidez preconizada pelas organizações referidas. Saliente-se ainda que a designação «abcissa curvilínea» *não é referida* por nenhuma organização internacional, nem por nenhuma organização científica de reconhecido prestígio.

Sendo então (Fig. 1)

$$s_1 = \overset{\frown}{P_0 P_1} \quad \text{e} \quad s_2 = \overset{\frown}{P_0 P_2} > s_1$$

[5] Os símbolos a adoptar para os vectores unitários, num referencial cartesiano, são (de acordo com as recomendações e normas internacionais) $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ e $\mathbf{e}_z$ (ou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, respectivamente). Devem ser impressos em caracteres a itálico negro ou a itálico normal (neste caso encimados por setas). Os símbolos $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ *não são recomendados* (o símbolo gráfico ^ coloca-se sobre o símbolo de uma grandeza periódica, para representar o valor *máximo* dessa grandeza). Cf. [2], [4].

conclui-se que a distância percorrida pela partícula, entre os instantes t_1 e t_2 é

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

1.1.2. Grandezas médias, entre os instantes t_1 e t_2

—Rapidez média ou celeridade média (designada na língua inglesa, por *average speed*).

É a grandeza que traduz, em termos médios, a rapidez com que a partícula descreve a trajectória. A sua equação de definição é

$$c_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

Trata-se de uma grandeza manifestamente escalar e positiva.

—Velocidade média (designada, na língua inglesa, por *average velocity*).

É a grandeza que traduz, em termos médios, o modo como a partícula muda de posição e a rapidez dessa mudança de posição. A sua equação de definição é

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Trata-se, pois, de uma grandeza *manifestamente vectorial*. Apenas no movimento rectilíneo, sem *inversão de sentido*, se tem

$$c_m = |\mathbf{v}_m|$$

—Aceleração média.

É a grandeza que traduz, em termos médios, o modo como a partícula muda a sua velocidade e a rapidez dessa mudança de velocidade. A sua equação de definição é

$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Trata-se, pois, de uma grandeza *manifestamente vectorial*.

1.1.3. Grandezas instantâneas

—Rapidez ou celeridade (designada, na língua inglesa, por *speed*).

É a grandeza que, em cada instante, indica a rapidez com que a partícula se está a movimentar sobre a trajectória. A sua equação de definição é

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} c_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d s}{d t}$$

Trata-se de uma grandeza escalar que corresponde ao módulo ou medida da velocidade, e portanto é positiva

—Velocidade (designada, na língua inglesa, por *velocity*).

É a grandeza que, em cada instante, indica em que direcção e sentido está a variar a posição da partícula, bem como a rapidez dessa variação.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d \mathbf{r}}{d t}$$

Como $\lim_{\Delta t \to 0} |\Delta \mathbf{r}| = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta s$

vem $\dfrac{|d \mathbf{r}|}{d t} = \dfrac{d s}{d t}$

o que significa que o *módulo da velocidade* é a *rapidez* ou *celeridade*, como dissemos.

—Aceleração

É a grandeza que, em cada instante, indica em que direcção e sentido está a variar a velocidade da partícula, bem como a rapidez dessa variação

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d \mathbf{v}}{d t}$$

1.1.4. Explicitação da velocidade e da aceleração, em coordenadas de espaço (x, y, z)

Sendo $\mathbf{r} = x(t)\ \mathbf{e}_x + y(t)\ \mathbf{e}_y + z(t)\ \mathbf{e}_z$ a equação do movimento (ver secção 1.1.1.), tem-se

$$\mathbf{v} = \frac{d \mathbf{r}}{d t} \Leftrightarrow v = \frac{d x}{d t}\ \mathbf{e}_x + \frac{d y}{d t}\ \mathbf{e}_y + \frac{d z}{d t}\ \mathbf{e}_z \Leftrightarrow v = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{a} = \frac{d \mathbf{v}}{d t} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \frac{d^2 x}{d t^2}\ \mathbf{e}_x + \frac{d^2 y}{d t^2}\ \mathbf{e}_y + \frac{d^2 z}{d t^2}\ \mathbf{e}_z \Leftrightarrow \mathbf{a} = \frac{d v_x}{d t}\ \mathbf{e}_x + \frac{d v_y}{d t}\ \mathbf{e}_y + \frac{d v_z}{d t}\ \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z$$

(ver nota final)

1.2. Utilização de coordenadas intrínsecas

Durante o movimento, o vector de posição, $\mathbf{r}$, e as suas coordenadas x, y e z, vão variando com a distância percorrida, s, pelo que

$$\mathbf{r} = x(s)\ \mathbf{e}_x + y(s)\ \mathbf{e}_y + z(s)\ \mathbf{e}_z$$

1.2.1. Velocidade

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{r}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{r}}{\mathrm{d}\,s} \cdot \frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t} \Leftrightarrow \mathbf{v} = v\,\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{r}}{\mathrm{d}\,s}$$

As características do vector $\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{r}}{\mathrm{d}\,s} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\,\mathbf{r}}{\Delta\,s}$ são as seguintes:

Linha de acção — tangente à trajectória.

Sentido — o do movimento, em cada ponto ($\mathrm{d}\,s > 0$).

Módulo — unitário ($\mathrm{d}\,s = |\mathrm{d}\,\mathbf{r}|$).

Consequentemente $\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{r}}{\mathrm{d}\,s} = \mathbf{e}_t$ (Fig. 3), sendo

$$\mathbf{e}_t = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,s}\,\mathbf{e}_x + \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,s}\,\mathbf{e}_y + \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,s}\,\mathbf{e}_z$$

o vector unitário da tangente à trajectória, no ponto considerado, orientado no sentido do movimento. Portanto

$$\mathbf{v} = v\,\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{r}}{\mathrm{d}\,s} \Rightarrow \mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_t$$

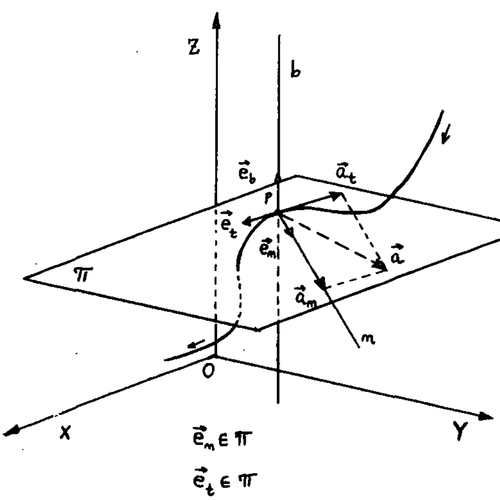

Fig. 3 — π é o plano osculador ([6]), no ponto considerado; b é a *recta binormal*, no plano, no ponto considerado ($b \perp \pi$), n é a normal principal ([7]) ($n \in \pi$); $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}_n$ e $\mathbf{e}_b$ são os versores do referencial intrínseco ou de *Frenet* ($\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$), como se vê na figura.

1.2.2. Aceleração

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{v}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}(v\,\mathbf{e}_t)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}\,\mathbf{e}_t + v\,\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{e}_t}{\mathrm{d}\,t} \Rightarrow$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}^2\,s}{\mathrm{d}\,t^2}\,\mathbf{e}_t + v\,\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{e}_t}{\mathrm{d}\,s}\,\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}^2\,s}{\mathrm{d}\,t^2}\,\mathbf{e}_t + v\,\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{e}_t}{\mathrm{d}\,s}\,v\,.$$

As características do vector $\frac{\mathrm{d}^2\,\mathbf{r}}{\mathrm{d}\,s^2} = \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{e}_t}{\mathrm{d}\,s}$ são as seguintes:

Linha de acção — a normal principal (n, na Fig. 3).

Sentido — o da concavidade.

Módulo — o inverso do raio de curvatura ($1/r$), em cada ponto.

Consequentemente

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\mathbf{r}}{\mathrm{d}\,s^2} = \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{e}_t}{\mathrm{d}\,s} = \frac{1}{r}\,\mathbf{e}_n\,,$$

sendo $\mathbf{e}_n$ o vector unitário da normal principal, n, no ponto considerado, orientado no sentido da concavidade.

Portanto,

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}^2\,s}{\mathrm{d}\,t^2}\,\mathbf{e}_t + v\,\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{e}_t}{\mathrm{d}\,s}\,v \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}^2\,s}{\mathrm{d}\,t^2}\,\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{r}\,\mathbf{e}_n,$$

onde $\frac{\mathrm{d}^2\,s}{\mathrm{d}\,t^2}\,\mathbf{e}_t = \mathbf{a}_t$ é a chamada aceleração tangencial, e onde $\frac{v^2}{r}\,\mathbf{e}_n = \mathbf{a}_n$ se designa por aceleração normal.

([6]) O plano osculador, num dado ponto P de uma curva torsa (curva que não está contida num plano) é o plano definido por duas tangentes à curva, em dois pontos infinitamente próximos de P.

([7]) A normal principal, n, a uma curva empenada (num dado ponto P) é a recta que, simultaneamente, é normal à curva, nesse ponto, e pertence ao plano osculador.

As grandezas $a_t = \frac{d^2 s}{d t^2} = \frac{d v}{d t}$

e $a_n = \frac{v^2}{r}$

designam-se por coordenadas (8) da aceleração no referencial intrínseco.

2. *Caso particular do movimento rectilíneo*

Neste caso considera-se um eixo coordenado (por exemplo o das abcissas), sobreposto à trajectória. Tem-se então:

$\mathbf{r} = x(t)\, \mathbf{e}_x$ ———→ equação do movimento.

$s = f(t)$ ———→ equação das distâncias percorridas sobre a trajectória (função temporal *nunca decrescente*).

$x = f(t)$ ———→ equação das posições (única equação paramétrica a considerar).

$c_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ———→ celeridade média, ou rapidez média (Δs é a distância total percorrida, sobre a trajectória, durante o intervalo de tempo Δt).

$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ———→ coordenada (ou componente escalar) da velocidade média.

$v = \frac{d s}{d t}$ ———→ rapidez ou celeridade (é o módulo da velocidade).

$\mathbf{v} = \frac{d \mathbf{r}}{d t} = v_x\, \mathbf{e}_x$ → velocidade.

$v_x = \frac{d x}{d t}$ ———→ coordenada (ou componente escalar) da velocidade.

$\mathbf{a} = \frac{d \mathbf{v}}{d t} = a_x\, \mathbf{e}_x$ → aceleração, onde $a_x = \frac{d^2 x}{d t^2}$ é a coordenada (ou componente escalar) da aceleração.

Num estudo elementar do movimento rectilíneo com fraco suporte matemático poder-se-á, como recurso, atribuir aos valores algébricos

$$v_x = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x$$

e

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_x$$

as designações «valor algébrico da velocidade» e «valor algébrico da aceleração», no eixo considerado.

Deste modo, não há perigo de confusão entre as grandezas intrinsecamente vectoriais e únicas $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$ e as suas coordenadas ou componentes escalares v_x e a_x, que são, de facto, valores algébricos. E também não há perigo de confusão destas grandezas, v_x e a_x, com as grandezas

$$v = |v_x| = |\mathbf{v}|$$

e

$$a = |a_x| = |\mathbf{a}|$$

que são as medidas, ou módulos, da velocidade e da aceleração, respectivamente.

Há ainda que distinguir entre as grandezas físicas vectoriais velocidade e aceleração e os vectores, entidades matemáticas, que as representam.

BIBLIOGRAFIA

[1] ISO — *Norme Internationale ISO 31*, partes 0 a 13, Genève, Suisse (1978-1985).

[2] IUPAP — *Symbols, Units and Nomenclature in Physics, Document* U.I.P. 20, 1978, s.l.

[3] The Royal Society — *Quantities, Units and Symbols*, 2nd edition, London, The Royal Society (1975).

[4] Guilherme de Almeida — *Sistema Internacional de Unidades (SI)/Grandezas e Unidades Físicas/ /terminologia, símbolos e recomendações*, Plátano Editora, Lisboa, 1988 (livro recomendado pela Sociedade Portuguesa de Física).

---

(8) Emprega-se aqui a designação «coordenadas de um vector», em alternativa a «componentes escalares de um vector». Na terminologia francesa (a que é geralmente adoptada na adaptação às normas portuguesas) emprega-se o termo «coordenadas» (*coordonnées*); na terminologia inglesa, emprega-se o termo «componentes» (*components*).

Nota final: Os símbolos para grandezas vectoriais deveriam, segundo as normas internacionais, ser impressos em itálico negro ou em itálico normal, neste último caso encimados por uma seta. Os índices x, y e z *deveriam também ser impressos em itálico.* Por dificuldades de tipografia, os referidos símbolos vão impressos, neste artigo, em redondo.