Gaz. Fís., Vol. 11, Fasc. 3, 1988

A Teoria da Relatividade no Ensino Secundário (*)

II — A Relatividade Geral

FERNANDO CABRITA
Escola Secundária de Mafra

ANTÓNIO ARMANDO DA COSTA
Centro de Electrodinâmica - Instituto Superior Técnico

A Teoria da Relatividade Geral permanece totalmente desconhecida dos alunos do Ensino Secundário, apesar da sua importância para o desenvolvimento da Física. O presente artigo desenvolve uma proposta de acções de formação de professores, sob a forma de Seminários especializados visando a médio prazo a eventual integração deste tema nos Curricula dos alunos.

1. Introdução

Num artigo anterior [1] (subsequentemente designado por Artigo I), foi justificada a necessidade e interesse da introdução da Teoria da Relatividade (TR) nos curricula reformados do Ensino Secundário. As razões apontadas foram de natureza científica e cultural, pois que no final do Século XX não é mais admissível que a formação adquirida desconheça estes importantes assuntos.

As naturais limitações da formação dos professores de Física, consequência do Ensino Universitário andar arredio destas matérias, obrigam a que numa primeira fase só se considere a introdução da Teoria da Relatividade Restrita (TRR), cujo curriculum foi apresentado no Artigo I, visto que são necessários dois tipos de acções também aí programadas tendo como objectivo a prazo a introdução da Teoria da Relatividade Geral (TRG) nos curricula: acções de formação nesta área para os professores de Física já a trabalhar no sistema de Ensino, e a reforma curricular dos cursos de formação de professores em Física.

Neste artigo será apresentado o esquema programático das acções de formação no âmbito da TRG, que poderão revestir a forma de seminários extracurriculares, abertos à participação dos alunos mais interessados, o que permitirá ainda aferir da adequação e do peso relativo dos temas num curriculum definitivo. O conteúdo programático proposto para as acções de formação referidas não deverá ser diferente do que se pensa venha a ser o curriculum definitivo, quando este for introduzido no curriculum global. As únicas diferenças significativas deverão ser a maior profundidade de tratamento de todas as questões, bem como a junção de alguns módulos temáticos que pela sua dificuldade não poderão ser colocados nos programas específicos para os alunos. Esta forma de trabalhar permitirá que os formandos forneçam a sua própria opinião sobre a didática mais adequada à transmissão desta matéria, bem como o seu grau de dificuldade.

Desta forma o conteúdo programático e metodologia das acções aqui propostas no âmbito da TRG não pode afastar-se do que for o programa de ensino da TRR. No Artigo I foi referenciada a necessidade de apresentar estes temas partindo da explicitação das inconsistências das concepções galileanas entre si e com os dados da experiência, procurando ultrapassá-las. Este desiderato foi aí atingido no âmbito da TRR. O programa aqui proposto generaliza os conceitos apresentados em I a qualquer referencial, gravíticos em particular e não inerciais em geral, partindo das referidas inconsistências e da impossibili-

(*) A parte I deste artigo foi publicada em Gaz. Física, **10**, 99-107 (1987).

dade de aplicação da TRR a esses referenciais. Tal como sucedeu em I, e aqui por maioria de razão, deverá ser previlegiado o rigor de conceitos e a sua vizualização por métodos gráficos e/ou geométricos intuitivos. Esta temática é, aliás, propiciadora dum aprofundamento de conceitos fundamentais da Física, tais como espaço, tempo, movimento, velocidade, massa, interacções e outros. Este artigo destina-se a dar um contributo para a consecussão destes objectivos.

2. Esquema programático

O esquema programático da TRG aqui apresentado começa por fazer a generalização dos conceitos fundamentais da TRR a referenciais não inerciais (RNI), ou seja aqueles em que é possível, através de experiências, exibir diferentes comportamentos dinâmicos de partículas idênticas próximas no seu interior. Em seguida proceder-se-á ao seu estudo detalhado, com especial incidência no estudo dos referenciais gravíticos, ou seja aqueles em que não existe nenhuma transformação de coordenadas que permita reduzir toda a região a que se aplica a um referencial de inércia, e que constituem um caso particular de RNI, embora os mais importantes.

A gravitação, no seu duplo aspecto de fenómeno na vizinhança de massas e na larga escala do Universo (Cosmologia Física), será previlegiada. Ela será estudada separando estas duas grandes componentes, diversas mas complementares. Após a caracterização das questões próprias de cada domínio, e expondo em cada um deles por que motivo a Relatividade restrita não pode ser aplicada, apresentar-se-á a teoria geral que os conjuga, constituindo um todo coerente e consistente, não esquecendo de explicitar de que modo a TRG alterou as nossas concepções cosmológicas.

Os métodos geométricos utilizados para vizualização das propriedades do espaço-tempo são alguns deles esquemas topológicos simplificados. Assim não lhes deve ser atribuída outra virtude que não seja permitir essa mesma vizualização. De facto alguns deles constituem uma simplificação extrema.

2.1. Covariância das Leis da Física

Como já foi afirmado, a nova Teoria deve ser uma generalização da TRR. Assim os dois postulados em que esta se baseia devem ser generalizados a todos os referenciais quaisquer que eles sejam. A ideia de covariância associada a transformações globais de coordenadas, independente do ponto em que nos encontramos, será substituída por um conceito mais geral de covariância que diz respeito a transformações locais, isto é, que dependem das coordenadas de vários pontos, pelo que daqui resulta:

a) O Princípio da Covariância das leis da Física em todos os referenciais, ou seja, em qualquer transformação de coordenadas no espaço-tempo, as leis da Física mantêm a mesma forma e o mesmo conteúdo físico;

b) O Princípio da Invariância da velocidade da luz no vácuo.

Associado à covariância das leis da Física, deverá ficar explícito que com este princípio, e formando com ele um todo indissolúvel, temos:

a.1) A equivalência entre massa gravítica e massa inerte;

a.2) O princípio da equivalência formal entre todos os RNI, tendo em atenção a objecção de Bondi (1986).

2.1.1. Massa Inerte e Massa Gravítica

A equivalência entre massa inerte e massa gravítica apresentar-se-á como consequência das acelerações no campo gravítico serem independentes da natureza do corpo. Na verdade, segundo Einstein [2]

$$\text{aceleração} = (\text{massa gravítica})/(\text{massa inerte}) \times \times (\text{intens. do campo gravítico}) \quad (1)$$

e a aceleração só será independente da natureza do corpo se

$$\frac{(\text{massa gravítica})}{(\text{massa inerte})} = 1 \quad (2)$$

através duma criteriosa escolha de unidades.

Aqui deverá ser referido que estas considerações se encontram de acordo com a experiência, como vem referido em Misner et al [3].

A equivalência entre massa gravítica e massa inerte pode ser exibida através duma experiência simples. Um feijão a germinar num vaso em repouso cresce na vertical. Porém se o vaso estiver sujeito a uma força centrífuga, criada por um movimento cricular uniforme, então ele cresce em direcção oposta à composição da força centrífuga com a força da gravidade.

2.1.2. O Princípio de Equivalência

O princípio de equivalência deverá ser apresentado através de uma experiência conceptual simples, referida por Einstein [4]. Sopunhamos uma cabine a ser içada por uma força constante numa região de gravidade nula. Os passageiros no interior da cabina com os pés assentes no lado oposto ao sentido do movimento sentiriam uma acção semelhante à gravidade e interpretá-la-iam como tal. Isto é consequência da covariância das leis da Física e mostra a indescernibilidade entre massa gravítica e massa inerte.

Deverá no entanto ser aqui apontada a verdade parcial deste princípio, já que, pela sua própria definição, o campo gravítico não se encontra mergulhado em outros ambientes inerciais, é ele próprio um ambiente «ab-initio» [5].

2.2. Inaplicabilidade da TRR à Gravitação

São os seguintes os motivos que impedem a aplicação da TRR ao fenómeno da Gravitação e que devem ser transmitidos aos formandos, admitindo a existência dum campo gravítico, ideia que será abandonada mais adiante:

a) A lei de Newton da Atracção Universal (LNAU) pressupõe acções a distância transmitidas com velocidade infinita o que é incompatível com a TRR, e por isso mesmo, não é invariante numa transformação de Lorentz.

Será apontado que $F=Gmm'/r^2$ (em que F é a força de atracção, r a distância entre as massas m e m') pressupõe que esta acção é instantânea, ou seja que a energia associada se propaga com velocidade infinita, o que é impossível. Daqui resultam duas consequências. Por um lado não pode ser invariante numa transformação de Lorentz, violando o princípio da invariância das leis da Física com generalidade; por outro lado, a LNAU impõe que a interacção entre massas não obedeça ao princípio da acção e reacção subjacente à Lei em apreciação.

b) Um raio luminoso passando numa zona de campo gravítico será naturalmente atraído pela massa que dá origem ao campo, o que cria problemas suplementares [6].

Suponhamos uma lanterna num campo gravítico lançando um feixe luminoso. Como esse feixe é energético tem massa e é atraído. Donde para que as frentes de onda sejam sempre perpendiculares à direcção de propagação, haverá raios do feixe que percorrerão maiores distâncias (Fig. 1). Porém se quisermos manter constante o tempo, teremos de violar o princípio da invariância da velocidade da luz.

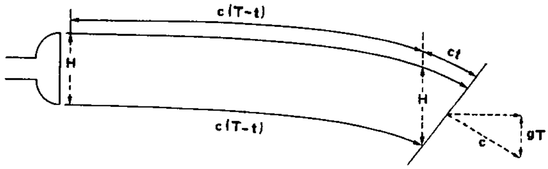

Fig. 1 — Curvatura dos raios luminosos na presença de massas — A figura mostra o comportamento dum feixe luminoso na proximidade dum corpo massivo. O raio superior encontra-se a maior distância do corpo. Verifica-se que a distância percorrida pelo raio superior é maior que a do raio inferior. Se admitirmos que a velocidade da luz é constante, então o tempo do raio superior é maior que o do raio inferior e a razão é $t/T=gH/c^2$.

c) A larga escala do Universo não suporta a teoria da gravitação de Newton, e a TRR também não lhe é aplicável.

Este problema será abordado independentemente de todos os outros.

Daqui se conclui que é necessário uma teoria mais geral que englobe: a teoria da TRR válida e aplicável a campos gravíticos nulos e referenciais não acelerados; e a Gravitação Newtoniana aplicável a campos gravíticos fracos, baixas velocidades e zonas restritas do Universo.

2.3. Curvatura do Espaço-Tempo na vizinhança de massas

A curvatura do espaço-tempo na vizinhança de massas deverá ser apresentada a partir do problema suscitado pela alínea *b*) do ponto 2.2.

2.3.1. A Curvatura do Tempo

O problema da alínea *b*) do ponto 2.2. pode ser resolvido de duas maneiras, admitindo:

a) Ou que a velocidade da luz não é um invariante;

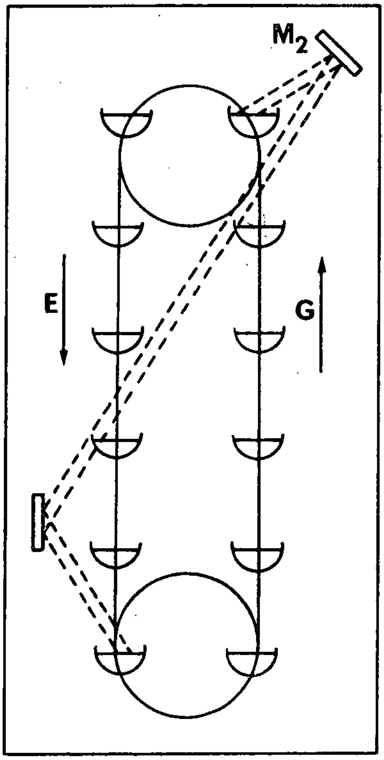

Fig. 2 — Experiência dos Alcatruzes — Os alcatruzes do lado esquerdo contêm átomos excitados, que ao chegarem ao ponto mais baixo desexcitam-se para o nível mais baixo de energia, perdendo um fotão, que é reabsorvido no ponto mais alto. A experiência mostra que os fotões têm de se deslocar inexoravelmente para o vermelho, pois que a não ser assim estaríamos perante um «moto contínuo».

b) Ou que o tempo se escoa mais lentamente quanto mais intenso é o campo gravítico.

A segunda hipótese é a correcta. A sua justificação deverá ser apresentada através da experiência dos alcatruzes apresentada na Fig. 2 (ref. [5]) e que permite concluir que o tempo se escoa mais lentamente à superfície da Terra do que a uma altitude H. Esta conclusão é, aliás, coerente com aquilo que seria de esperar dum fotão lançado em queda livre de uma altura H [3]. À superfície ele teria uma massa dada por

$$m_{sup} = m_{topo}\left(1 + \frac{gH}{c^2}\right) \qquad (3)$$

atendendo a que a sua energia teria que ser a energia à altura H mais a energia potencial entretanto transformada em energia cinética. Ou seja, e porque $m = h\nu/c^2$

$$\nu_{sup} = \nu_{topo}\left(1 + \frac{gH}{c^2}\right) \qquad (4)$$

Isto só será possível se a coordenada tempo for curva (Fig. 3). Estas conclusões serão aproveitadas para referir:

a) O que se passa com gémeos nascidos ao nível do mar e em que um deles foi viver para o Tibet, por exemplo;

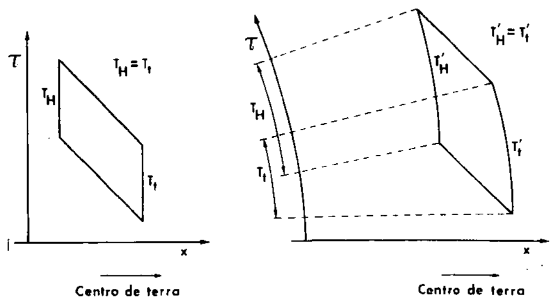

Fig. 3 — Curvatura da Coordenada Tempo — A coordenada tempo tem de ser curva porque em espaço de Minkowski uma onda monocromática enviada da Terra para uma altura H tem período na Terra T_t, e na altura H, T_H, com $T_t < T_H$. Ora isto é contraditório com as propriedades do paralelogramo que representaria a deslocação dos extremos do período da superfície da Terra para a altura H, pelo que a coordenada tempo tem de ser curva [3].

b) As observações do ritmo de funcionamento de relógios atómicos conforme a distância à Terra, e a observação do efeito Mössbauer, por exemplo, que verificam estes factos [3];

c) O desvio gravitacional para o vermelho das anãs-brancas, ou de qualquer onda monocromática que se afaste de qualquer corpo celeste;

d) A causa real da gravidade que tem a ver com o facto de sendo as trajectórias linhas rectas no quadri-espaço e com esta aproximação, então se o tempo é curvo os corpos têm de mudar obrigatoriamente de posição no espaço (Fig. 4);

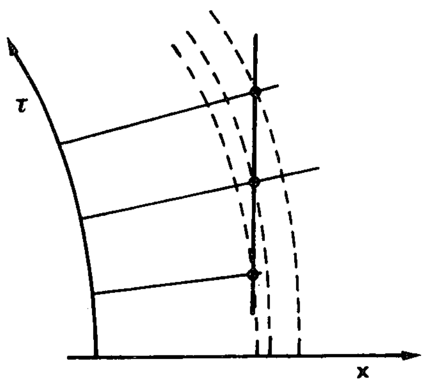

Fig. 4 — A explicação da Gravidade — Os corpos entregues a si mesmos num campo gravítico caem porque têm de deslocar-se no espaço-tempo segundo linhas rectas se admitirmos que não existe curvatura do espaço associado à curvatura do tempo. Porém como o tempo é curvo, os corpos deslocam-se no espaço. Daqui se conclue que não existe qualquer força associada à gravitação, e, portanto, não existe, de facto, campo gravítico.

e) Associado ao ponto anterior o facto de que se a distância a percorrer pelo corpo for longa, ou o corpo for muito massivo, então ele pode atingir a velocidade da luz num tempo próprio finito, embora no referencial de observação nunca a possa atingir, e que esta curiosa propriedade está associada à ideia de buraco negro.

2.3.2. A Curvatura do Espaço

A curvatura do espaço será apresentada em primeira aproximação como consequência da curvatura do tempo (o que faz com que a Fig. 4 não esteja correcta, visto que as rectas têm de ser substituídas por geodésicas). Posteriormente deverá ser assumida como complemento indissociável da curvatura do tempo.

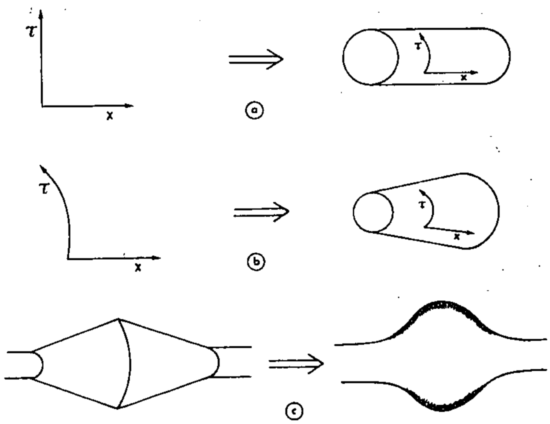

Fig. 5 — Topologia do Espaço-tempo ao longo duma direcção Radial a partir do centro da Terra — A figura mostra os passos topológicos para definir a topologia em epígrafe. Na figura (a) estabelece-se a homologia entre o espaço-tempo plano e a sua representação cilíndrica; a figura (b) é a homologia entre a representação dum espaço-tempo com coordenada tempo curva e um cone; a figura (c) é a homologia entre a primeira aproximação da representação da topologia do espaço-tempo para uma recta passando pelo centro da Terra, e que corresponde à sobreposição de dois cones pela base, e a sua representação final depois de fazer o alizamento das superfícies [6].

O primeiro aspecto pode ser apresentado usando a representação da Fig. 5, que mostra o comportamento topológico duma recta passando pelo centro da Terra. A figura mostra claramente a existência de uma curvatura da coordenada de espaço que está associada à coordenada tempo.

A curvatura própria do espaço deverá ser mostrada a partir da deflexão da luz num campo gravítico (Fig. 6). A conjugação desta curvatura própria do espaço, com o efeito da curvatura do tempo, ou seja, a curvatura global do espaço-tempo, faz com que a deflexão da luz seja o dobro do previsto, pelo que é intrínseca das diferenças no fluir no tempo. Esta curvatura foi confirmada pela primeira vez em 1919 por Sir Arthur Eddington para a deflecção da luz nas proximidades do Sol, e constitui

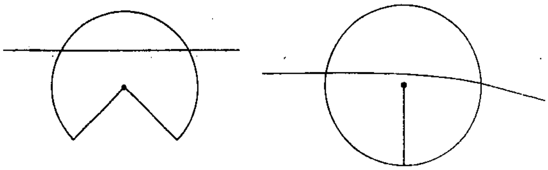

Fig. 6 — Deflecção da luz num Campo Gravítico — A curvatura própria do espaço pode ser simulada através dum filtro de papel no qual se corta um triângulo e depois se unem os lados cortados. Se antes de os lados serem unidos se traçar uma recta, então depois de unidos aparece uma curva. É esta curvatura um dos aspectos da curva dos raios. A outra tem a ver com a curvatura própria do tempo.

uma das formas de se exibir a curvatura do espaço-tempo. Esta curvatura do espaço é ainda responsável pelo efeito da precessão do periélio de Mercúrio (Fig. 7).

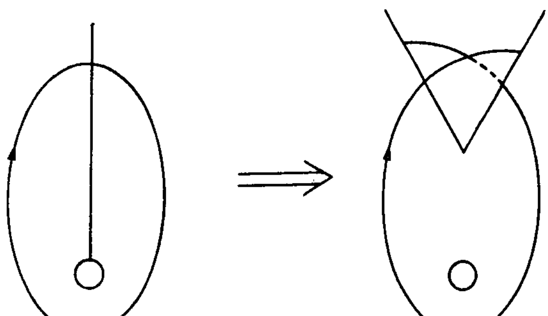

Fig. 7 — Precessão do Periélio de Mercúrio — O mesmo método usado na figura anterior permite explicar este fenómeno. Tome-se a trajectória dum planeta num espaço sem curvatura. Faça-se uma incisão na trajectória. Se se dobrar as duas pontas como indicado na figura, então verifica-se que há precessão da órbita.

Viu-se que o fenómeno da gravitação na presença de massas impõe a curvatura do espaço-tempo. Então isso implica o abandono do espaço de Minkowski, e teremos que usar geometrias não-euclideanas.

2.3.3. Os Buracos Negros

O buraco negro pode ser apresentado como uma catástrofe na estrutura do espaço-tempo, uma singularidade consequência da extrema curvatura do tempo (Fig. 8).

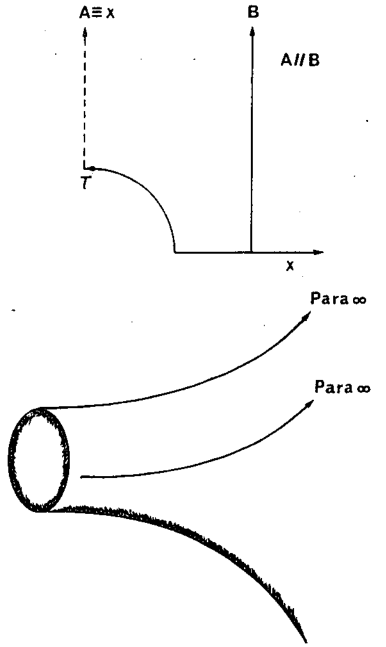

Fig. 8 — Topologia dos Buracos Negros — A topologia dum buraco negro pode ser indicada partindo da topologia do espaço-tempo vista na Fig. 5. Se se aumentar a massa do corpo esférico, o raio da circunferência associada ao centro aumenta, e a partir duma certa massa o seu raio torna-se infinito.

Deverá ser aqui apresentado um dos aspectos mais interessantes dos buracos negros: embora os viajantes consigam mergulhar neles, o observador de referência vê eternamente o viajante a aproximar-se deles (Fig. 9).

2.4. A Questão Cosmológica

A Cosmologia e seus problemas básicos serão apresentados partindo da descoberta de Hubble, a expansão do Universo. Esta conclusão deverá ser exposta pela seguinte ordem:

a) Desvio para o vermelho da luz oriunda das galáxias;

b) Admitindo o efeito Doppler, então a velocidade é directamente proporcional à distância (Lei de Hubble);

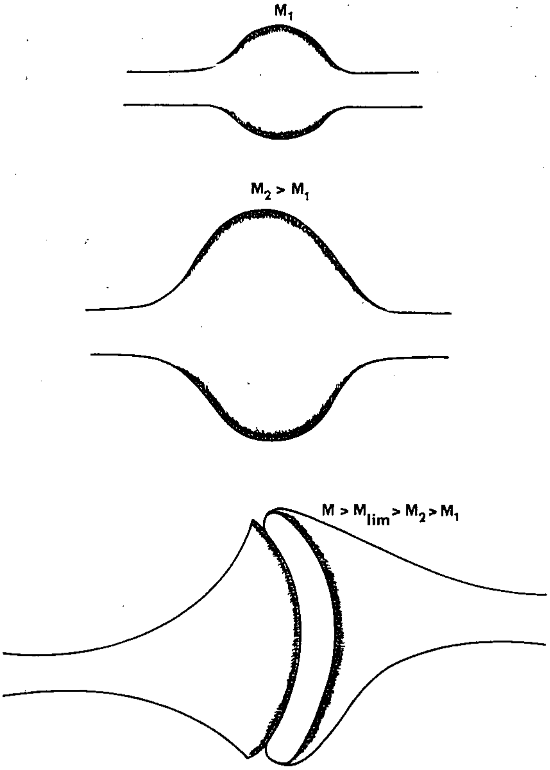

Fig. 9— Viajante a aproximar-se de um buraco negro — A figura (a) mostra como a extrema curvatura do tempo permite explicar os buracos negros: a trajectória no espaço-tempo torna-se paralela à direcção do espaço e, portanto, embora o corpo no referencial de observação nunca atinja o buraco negro, no seu referencial próprio atinge-o.

c) Daqui se conclui que o Universo se expande e que existe um instante inicial.

A exposição deverá continuar com a apresentação dos seguintes dados de observação:

a) O Universo contém um número finito de galáxias;

b) Obedece ao Princípio Cosmológico, ou seja, é homogéneo e isótropo em larga escala;

c) Tem uma radiação de fundo, que é uma radiação fóssil do instante inicial.

Nós estamos interessados em construir um modelo do Universo. Portanto este modelo terá que obedecer aos seguintes pressupostos:

1) O Universo é finito;

2) É homogéneo e isótropo e portanto sem fronteiras (se as tivesse, na vizinhança da fronteira não seria isótropo e haveria uma descontinuidade da homogeneidade);

3) Pretende-se reproduzi-lo num modelo à escala.

O modelo do Universo-ilha de Newton (admite o espaço infinito, mas o número de objectos finito, concentrando-se estes numa região desse mesmo espaço) que nos é sugerido pela observação, não serve pois que:

a) Tem tendência para se exaurir de energia, visto apresentar uma fronteira;

b) Viola o princípio Cosmológico;

c) Tem dificuldade em explicar como continuamos a receber radiação de fundo.

A alínea c) poderia talvez ser explicada usando a TRR (Epstein, 1983). O tempo próprio das galáxias que se movem em relação a nós com velocidade próximas da da luz é muito menor que o nosso tempo. Porém, para além de não ser compreensível como este movimento pode ser explicado pela TRR realizando-se no quadro de interacções gravíticas no qual ela não é válida, esta tentativa de explicação gera três dificuldades adicionais:

1) A simetria de situações como consequência do princípio cosmológico torna difícil coordenar a noção de tempo;

2) Não é compreensível por que motivo as galáxias mais longínquas têm maior velocidade;

3) As velocidades de recessão dos objectos distantes são tão próximas da da luz que não poderiam ser estáveis, pelo que a explicação do desvio para o vermelho não pode ser a do desvio para o vermelho não pode ser a do efeito Doppler.

Porém o modelo do Universo de Newton assenta na Geometria de Euclides, válida na zona do Universo que habitamos. Ora para que se possa fazer um modelo global do Universo, é necessário que a sua geometria seja a da região onde se pretende fazer o modelo à escala; daí que [7]

> «as leis da geometria euclideana serão válidas no Universo não porque sejam directamente verificáveis, mas porque este pode ser reproduzido num modelo à escala».

Mas a afirmação contra-recíproca também é verdadeira ou seja

> «se não puder ser feito modelo à escala, não existe geometria euclideana».

Donde se pode concluir que sendo o modelo de Newton a única saída viável para fazer um modelo à nossa escala, então como ele não se aplica à larga escala do Universo, a geometria deste é globalmente não euclideana [7].

A afirmação anterior e a sua conjugação com o que nos é sugerido pela observação directa, implicam que o Universo se nos apresente como Newtoniano em todos os pontos de observação, isto é, a descrição em cada ponto corresponde a cartas cuja sucessão permite descrever o Universo na sua globalidade [7].

2.5. A crise da Geometria de Euclides

Viu-se que o espaço-tempo, tanto na vizinhança de corpos massivos como na larga escala do Universo, tem de ser descrito por uma geometria não-euclideana. Devido às propriedades métricas do espaço-tempo, isto pressupõe a apresentação das ideias-base da geometria Riemmanniana.

2.5.1. Introdução à Geometria de Riemann

Os alunos deverão adquirir a percepção de que a geometria à superfície da Terra não é euclideana em larga escala. Isto implica que as curvas mais curtas entre dois pontos são círculos máximos, e as distâncias não podem ser medidas da forma euclideana usual. Este exemplo permite apresentar as ideias base das geometrias riemmannianas.

Em geometria euclideana, e estando a trabalhar em coordenadas cartesianas, as distâncias são dadas por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \quad (5)$$

Ora suponhamos que o espaço não é euclideano (exemplificado com generalidade através do caso dum espaço bidimensional como o que está afecto a uma chapa ondulada). Então podemos generalizar o conceito anterior e fazer

$$ds^2 = g_{ik}\ dx_i\ dx_k \quad (6)$$

$g_{ii} = 1$, $g_{ik} = 0$, $i \neq k$, em geometria euclideana e coordenadas cartesianas. Ora os g_{ik} são fundamentais para estabelecer distâncias. Os g_{ik} podem ser muito bem compreendidos passando em geometria euclideana de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas, embora aqui o espaço permaneça euclideano. Estes coeficientes caracterizam o espaço e o conceito geométrico fundamental passa a ser o de distância.

Deverá ser aqui referido que os espaços de Riemann apresentam dois tipos de geometria: intrínseca e extrínseca. A geometria intrínseca diz respeito a propriedades do espaço que resultam de medições interiores ao próprio espaço. A geometria extrínseca diz respeito a todas as outras propriedades. Exemplifiquemos com o caso da esfera. A sua superfície é um espaço limitado mas sem fronteiras. Esta propriedade pode ser medida à superfície da esfera. Trata-se duma propriedade geométrica intrínseca. A sombra que projecta é uma propriedade geométrica extrínseca.

A curvatura é uma propriedade geométrica intrínseca dos espaços de Riemann. Ela pode ser exibida, por exemplo, através das distorções obtidas com representações Euclideanas de porções do espaço em estudo, a que chamaremos mapas. Vejamos as consequências sobre a TRG.

2.5.2. A Geometria de Riemann-Minkowski

Em TRR tínhamos

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - (dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2 \quad (7)$$
$$= (dx_0)^2 - (dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2$$

A comparação com a métrica Euclideana

$$ds^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \quad (8)$$

permitiu definir os Espaços de Minkowski.

Como em TRG o espaço-tempo apresenta curvatura podemos pôr com generalidade

$$ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k \quad (9)$$

em que i, k=0... 3. Esta expressão de ds^2 corresponde à generalização do espaço de Minkowski, combinando-o com as ideias dos espaços de Riemann. A expressão (9) pode ser exemplificada com um referencial acelerado: o referencial associado a um disco centrado no seu eixo de rotação. Ainda no caso do disco, poderá mostrar-se por meio de um raciocínio físico simples que a relação entre a circunferência e o raio é maior que 2π.

Comparando (5) com (7) teremos $g_{ik} = \eta_{ik} = \mathrm{diag}\ (1, -1, -1, -1)$ onde η é a matriz de Minkowski. Os espaços de Riemann têm a propriedade de ser possível encontrar localmente uma transformação de coordenadas que os apresente euclideanos, pelo que os espaços de Riemann-Minkowski têm localmente o espaço de Minkowski associado (concepção de espaço tangente).

No que diz respeito às geometrias intrínseca e extrínseca do espaço da TRG, verifica-se que neste caso não existe geometria extrínseca. A curvatura dos vários tipos de espaço será feita não através de mapas, o que no caso do Universo seria mesmo impossível, mas de propriedades mensuráveis nos nossos pontos de observação.

2.6. A medição de distâncias e a simultaneidade de acontecimentos

A possibilidade de medir distâncias, de forma tradicional, está intimamente relacionada com o facto de estas serem independentes do instante de medida, isto é, a possibilidade de sincronizar os relógios nos extremos da distância a medir. Este facto deverá ser referido aos alunos como uma impossibilidade de o fazer em TRG, com esta perspectiva. O tempo flui de forma diversa em vários pontos do espaço e os referenciais têm um carácter local.

Este carácter local da estrutura do espaço-tempo deverá servir para apresentar a parábola da maçã (Misner et al, 1973, pág. 3), que exibe o Princípio geodésico, ou seja, as trajectórias dum corpo entregue a si próprio no espaço-tempo são geodésicas. Ao mesmo tempo deverão ser reformulados os conceitos de distância e de simultaneidade de acontecimentos na perspectiva de Landau e Lifschitz [8], concluindo que quando a métrica varia no tempo, em geral é impossível medir distâncias.

No que diz respeito às distâncias no Universo, o único procedimento correcto é:

a) Abandonar a noção de distância universal como consequência da criação de espaço, ou seja, da variação da sua matéria com o tempo;

b) Visto não podermos definir distâncias não podemos definir velocidades;

c) Explicar o desvio para o vermelho numa perspectiva cosmológica em que é consequência da criação de espaço entre os corpos;

d) Aceitar o modelo newtoniano em distâncias muito curtas.

2.7. O paradoxo dos gémeos em referenciais acelerados e gravíticos

O paradoxo dos gémeos deverá ser aqui apresentado como generalização do que se passa em TRR. Deverá ainda ser apresentado o caso do que se passa quando um dos gémeos está no centro da Terra e o outro oscila em torno do centro, comparando a evolução deste caso com a dum referencial acelerado (Fig. 10).

Como no caso gravítico apontado a reunião dos gémeos faz com que não haja mudança de idade entre eles; isto mostra bem que o Princípio de Equivalência não tem aplicação universal.

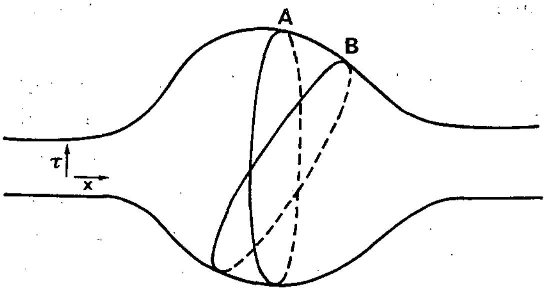

Fig. 10 — Paradoxo dos gémeos em referencial gravítico — Apesar da sua aceleração, os gémeos no caso em apreço na altura da sua reunião têm sempre a mesma idade. Um referencial acelerado não goza desta propriedade.

3. A Formulação Rigorosa da TRG

A formulação rigorosa do carácter geométrico dos espaços de Riemann-Minkowski deverá ser apresentada nas acções de formação de professores, na perspectiva de Bondi [5], mas devido à sua complexidade não poderá ser incluída nos curricula dos alunos.

Trata-se de mostrar como as variações de aceleração em espaço livre dependem dum tensor de quatro índices, que pode ser assimilado ao tensor de Riemann-Christoffel para um espaço curvo quadridimensional. A seguir introduz-se o tensor de Einstein por considerações de ordem física e finalmente estabelecem-se as equações de Einstein que permitem relacionar a curvatura do espaço-tempo com as fontes dessa curvatura.

Esta exposição necessita da apresentação de noções rudimentares de Cálculo Tensorial, que permitam definir espaços de Riemann duma forma muito mais rigorosa do que em 2.5. Por outro lado deverá ser apresentado o conceito fundamental de transporte paralelo e o seu significado físico.

4. Conclusões

O esquema programático exposto constitui a formação mínima indispensável para que os professores do ensino secundário possam no futuro, que se deseja próximo, leccionar estas matérias aos alunos nos curricula normais. As matérias propostas foram apresentadas na perspectiva de serem leccionadas a jovens, embora a própria prática das acções de formação venha a sugerir uma melhoria desta apresentação.

Nas acções de formação não poderão ser esquecidos os temas de Astronomia (Astrofísica e Cosmologia Física) em que a TRG desempenha um papel importante. Eles deverão ser referidos com generalidade, na perspectiva de Kourganoff (1980).

Todo o trabalho aqui proposto implica que a formação dos professores nos seus cursos de Licenciatura contenha a TR e a Astronomia. Só isso tornará estes cursos de formação a longo prazo desnecessários.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Prof. Manuel José de Abreu Faro o encorajamento para a realização dos dois artigos desta série e a sua leitura crítica. Agradecem ainda a valiosa cooperação do Sr. Manuel Quintas, desenhador gráfico do Complexo Interdisciplinar I do Instituto Nacional de Investigação Científica na realização dos desenhos de ambos os artigos.

BIBLIOGRAFIA

[1] Cabrita, F. e da Costa, A. A. — Gazeta de Física, **10**, 99 (1987).

[2] Einstein, A. e Infeld, L. — *A Evolução da Física*, Livros do Brasil Editores (1939).

[3] Misner, C. W.; Wheeler, J. A. and Thorne, K. S. — *Gravitation*, p. 16, Freeman & Co. (1973).

[4] Einstein, A. — «Relativity: The Special and the General Theory» Methuen & Co. Ltd. (1952).

[5] Bondi, H. — Eur. J. Phys., **7**, 106 (1986); reproduzido de French, A. P., ed. (1979) «Einstein: a Centenary Volume» Heinemann London.

[6] Epstein, L. C. — «Relativity Visualized» Insight Press (1983).

[7] Callahan, J. J. — Sci. Am., **235** (2), 90 (1976).

[8] Landau, L. e Lifschitz, E. — «Théorie des Champs» Editions Mir Moscovo (1970).