

# O efeito Hall quantificado

## Prémio Nobel da Física de 1985

J. M. B. LOPES DOS SANTOS

Laboratório de Física, Faculdade de Ciências do Porto

Quando um campo magnético é aplicado a um condutor que transporta uma corrente eléctrica, surge, na direcção perpendicular à da corrente uma diferença de potencial,  $V_H$ , a tensão de Hall, à qual está associado um campo eléctrico  $E_y$  (ver caixa). Da condição de a resultante das forças que actuam sobre os

A resistividade de Hall,  $\rho_{xy}$ , é

$$\rho_{xy} = - B/(ne) \quad (2)$$

sendo  $B$  o campo magnético,  $n$  o número de electrões por unidade de volume e  $-e$  a carga do electrão. É habitual medir-se a corrente total que atravessa o condutor,  $I = j_x A$  ( $A$  é a área de secção do condutor) e a diferença de potencial perpendicular à corrente,  $V_H = E_y d$  ( $d$  é a distância entre os pontos entre os quais se mede  $V_H$ ). A razão  $R_H = V_H/I$  é a resistência de Hall que, como se vê, se obtém da resistividade  $\rho_{xy}$  por multiplicação por um factor geométrico

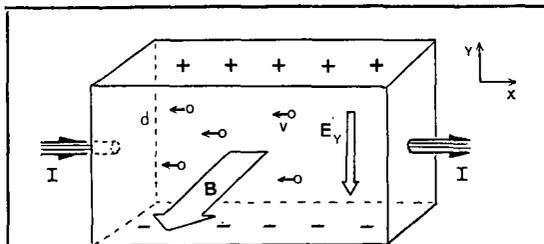
$$R_H = (d/A) \rho_{xy} \quad (3)$$

O Efeito Hall constitui um importante instrumento na determinação do sinal e densidade dos transportadores de carga num condutor.

O prémio Nobel da Física de 1985 foi atribuído a Klaus Von Klitzing, da Universidade de Munique, pela sua descoberta do Efeito Hall Quantificado (EHQ), feita em 1980 em colaboração com G. Dorda, da Siemens, e Michael Pepper, da Universidade de Cambridge. No EHQ a resistência de Hall  $R_H$  toma valores que são submúltiplos de uma combinação de constantes fundamentais,

$$R_H = (1/i) (h/e^2) \quad i, \text{ inteiro} \quad (4)$$

em que  $h$  é a constante de Planck e  $-e$  a carga do electrão. Esta relação verifica-se com



Na situação representada nesta figura a força devida ao campo eléctrico  $E_y$  anula a força de Lorentz devida ao campo magnético se

$$e E_y = e v B, \text{ isto é, } v = E_y/B$$

em que  $v$  é a velocidade média dos electrões que transportam a corrente  $I$ . A corrente por unidade de área é  $j_x = -nev$  em que  $n$  é o número de electrões por unidade de volume. Substituindo nesta equação o valor de  $v$  obtêm-se as eqs. (1) e (2) do texto.

electrões na direcção perpendicular ao seu deslocamento ser nula, facilmente se conclui que

$$E_y = \rho_{xy} j_x \quad (1)$$

em que  $j_x$  é a corrente por unidade de área.

elevadíssima precisão e os parâmetros experimentais, campo magnético, dimensões da amostra, etc., apenas influem na determinação do valor de  $i$ . Este efeito surge em sistemas em que os electrões formam um gás bidimensional, isto é, são livres de se mover apenas segundo um plano. Vejamos primeiro como surge um tal sistema.

### O MOSFET de Silício e o gás de electrões bidimensional

Os níveis de energia de um electrão num sólido estão tão próximos que podemos considerar que constituem bandas contínuas. Habitualmente estão separadas por gamas de energia em que não existem quaisquer estados — bandas proibidas. Como nos átomos, o estado fundamental é obtido preenchendo os estados de mais baixa energia (de acordo com o princípio de exclusão de Pauli) até um valor de energia designado por  $E_F$ , nível de Fermi, que depende do número de electrões. Mais propriamente da sua densidade, uma vez que a separação típica entre estados adjacentes em energia é inversamente proporcional ao volume do sólido. Num semiconductor, como o Silício ou Germânio, o nível de Fermi está numa banda proibida o que significa que existe uma banda de energia totalmente preenchida (banda de valência) separada por uma energia finita dos estados vazios na banda de condução. Quando é aplicado um campo eléctrico o sólido só pode conduzir corrente se a ocupação dos estados se alterar. Num semiconductor isso implica a excitação de um electrão da banda de valência à banda de condução o que é extremamente raro a baixas temperaturas. O Si ou Ge têm quatro electrões de valência. Poder-se-ia pensar que se substituíssemos um átomo de Si ou Ge, no respectivo cristal, por um átomo de valência três passaria a existir na banda de valência um estado não ocupado. De facto devido à diferença de cargas nucleares da impureza e dos iões do cristal esse estado tem uma energia ligeiramente superior à da

banda de valência e está localizado à volta da impureza.

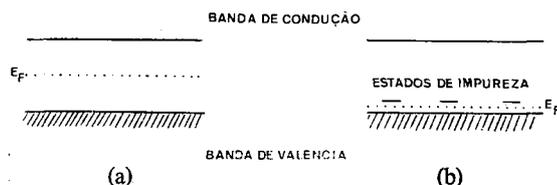


Fig. 1 — Esquema dos níveis de energia de um semiconductor (a) Puro; (b) Com impurezas.

A excitação de um electrão da banda de valência para um estado de impureza é muito mais frequente do que para a banda de condução visto ser bastante inferior a energia de excitação respectiva. Esse electrão não conduz corrente visto que se encontra num estado localizado junto à impureza. Mas os electrões da banda de valência podem agora deslocar-se alterando a posição do estado vazio. Isto corresponde ao deslocamento de uma carga positiva (no sentido oposto ao dos electrões) designada por vazio ou lacuna. Um semiconductor deste tipo diz-se de tipo  $-p$  porque os transportadores de carga a baixas temperaturas são essencialmente lacunas com carga efectiva positiva.

Um gás de electrões bidimensional pode ser obtido num MOSFET de Silício (Metal-Oxide-Semiconductor Field Effect Transistor). Trata-se essencialmente de um condensador em que um dos eléctrodos é um metal (Al) o outro um semiconductor (p-Si) separados por um isolador (habitualmente  $\text{SiO}_2$ , vidro). Entre os dois eléctrodos é aplicada uma diferença de potencial  $V_G$  (ver Fig. 2).

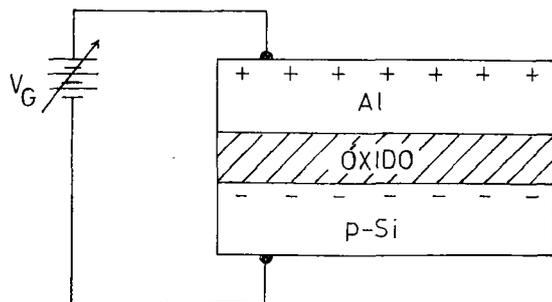


Fig. 2 — Esquema Simplificado de um MOSFET de Silício. A espessura da camada de óxido é normalmente da ordem de  $1000 \text{ \AA}$ .

O campo eléctrico correspondente vai induzir a acumulação de carga negativa na interface do p-Si e do isolador, de molde a que o campo no interior do p-Si, onde existem cargas livres (vazios), seja nulo, tal como em qualquer metal em equilíbrio. O importante é que a zona contígua à interface é energeticamente favorável aos electrões, isto é, os seus estados tem aí energia mais baixa que no interior do p-Si. Por outro lado o nível de Fermi é uniforme em todo o cristal, no estado fundamental. Se variasse no espaço seria possível baixar a energia transferindo electrões de estados ocupados em zonas de  $E_F$  mais elevado para estados vazios em zonas de  $E_F$  mais baixo.

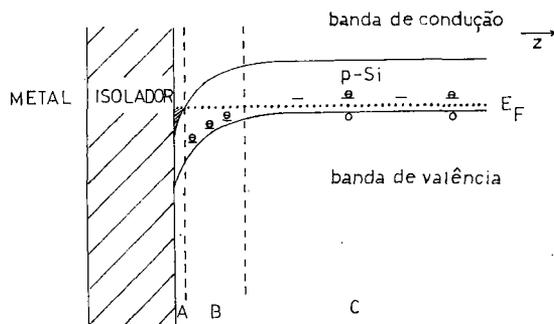


Fig. 3 — MOSFET. Na zona A forma-se o gás de electrões bidimensional (camada de inversão). B é uma zona sem cargas livres devido à presença do campo eléctrico aplicado entre o metal e o p-Si. Na zona C o campo eléctrico é nulo e os transportadores de carga maioritários são vazios.

A conjugação destes dois factores — nível de Fermi uniforme, energia dos estados electrónicos mais baixa na interface — torna possível que alguns estados da banda de condução tenham energia inferior ao nível de Fermi, tornando-se assim ocupados. O movimento destes electrões na direcção perpendicular à interface (habitualmente designada por  $zz$ ) está confinada a uma pequena região (dimensão típica 30 ~ 50 Å) pelo que corresponde a uma série de níveis de energia discretos tal como num átomo. A sua separação energética é tipicamente da ordem das dezenas de meV (mili electrão-volt) o que é suficiente para que a baixas temperaturas apenas o estado fundamental esteja ocupado. Os electrões são no entanto livres de se mover paralelamente à

interface formando assim um gás bidimensional visto que o seu movimento segundo  $zz$  está, digamos, «congelado» pela diferença de energia entre o estado fundamental e o 1.º estado excitado. Este sistema é um verdadeiro sonho de físico experimental pois a densidade do gás de electrões pode-se ajustar variando simplesmente  $V_G$ . Grosseiramente  $n \propto V_G$ . Este gás electrónico designa-se habitualmente por camada de inversão porque os transportadores de carga tem sinal oposto aos do interior do p-Si (vazios).

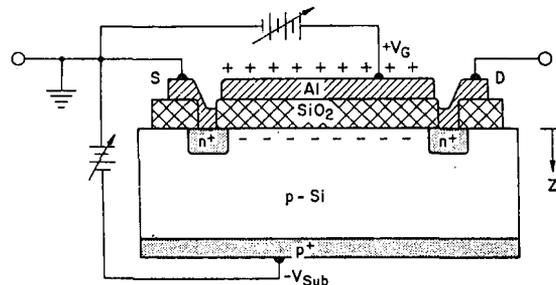


Fig. 4 — Um esquema mais realista de um MOSFET de Silício. As regiões indicadas com  $n^+$  são semicondutores fortemente dopados em que os transportadores de carga são electrões e correspondem aos eléctrodos de injeccção e remoção de corrente na camada de inversão.

(De M. E. Cage e S. M. Girvin, Comments on Solid State Physics 11, 1 (1983)).

### O Efeito Hall Quantificado

Von Klitzing, Dorda e Pepper mediram o efeito Hall numa camada de inversão de um MOSFET de Si em campos magnéticos elevados ( $\geq 13$  T). O campo magnético é aplicado na direcção perpendicular à interface onde se movem os electrões. A corrente que atravessa a amostra é mantida constante e são medidas as tensões na direcção perpendicular,  $V_H$ , e paralela,  $V_{pp}$  à da corrente. A densidade de electrões na camada de inversão pode ser ajustada variando a tensão  $V_G$ . De acordo com a eq. (2) esperar-se-ia então

$$\rho_{xy} = -B/(ne) \propto B/(eV_G) . \quad (5)$$

Os resultados obtidos por Von Klitzing e seus colaboradores estão reproduzidos na Fig. 5. Na curva de  $V_H$  em função de  $V_G$  (ou seja,  $n$ ) surge uma série de patamares em que  $V_H$  se

mantém constante, com um valor dado pela eq. (4)

$$R_H \equiv (V_H/I) = (1/i) (h/e^2) \quad i, \text{ inteiro} \quad (4)$$

No trabalho original esta relação foi verificada com uma precisão de uma parte em um milhão (1 ppm). Em 82, num trabalho conjunto de investigadores dos Laboratórios Bell e do National Bureau of Standards dos Estados Unidos esta precisão foi melhorada em quase uma ordem de grandeza para 0.17 ppm. Este resultado foi obtido num sistema em que o gás de electrões bidimensional é realizado na interface de dois semicondutores com bandas de energia proibidas de valores muito diferentes, heteroestrutura de GaAs - Ga<sub>1-x</sub>Al<sub>x</sub>As. Neste caso não é possível variar  $n$  continuamente e os patamares são observados em função do campo magnético (Fig. 6).

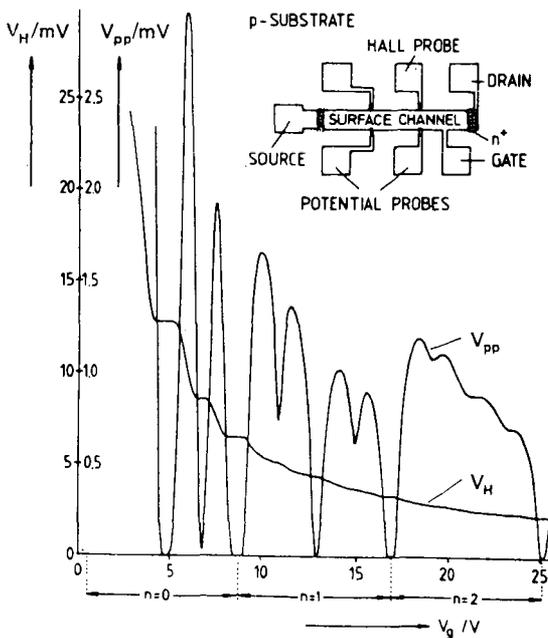


Fig. 5 — Registo da diferença de potencial Hall,  $V_H$  e na direcção da corrente,  $V_{pp}$ , mostrando os patamares do efeito Hall quantificado. A temperatura é de 1.5 K e o campo magnético de 18 T. No canto superior direito está um esquema do MOSFET utilizado. O comprimento total era de 400  $\mu\text{m}$  e largura de 50  $\mu\text{m}$ .

(De K. Von Klitzing, G. Dorda e M. Pepper, Physical Review Letters **45**, 494 (1980)).

Na Fig. 5 está também representada a tensão  $V_{pp}$  na direcção da corrente que é proporcional à resistividade habitual  $\rho_{xx}$ . Ela é praticamente nula nos patamares sendo pelo menos oito ordens de grandeza inferior ao seu valor em campo magnético nulo,  $\rho_{xx} \sim 10^{-8} \rho_{xx}(B=0)$ .

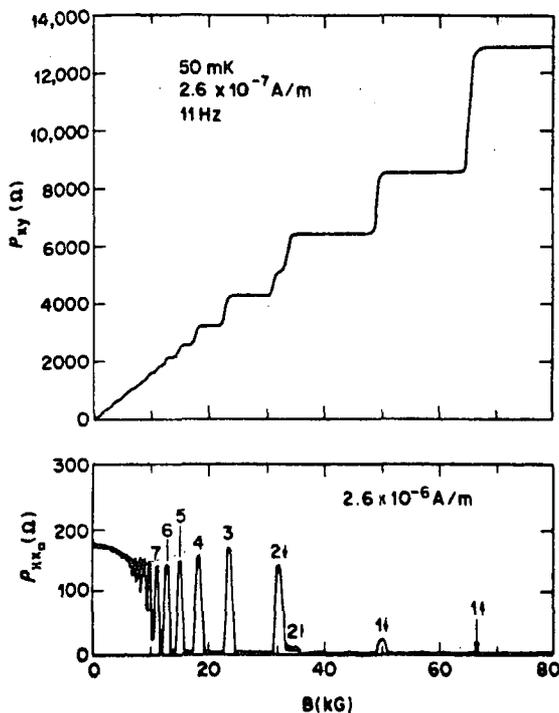


Fig. 6 — O efeito Hall quantificado em função do campo magnético. Os números no gráfico de  $\rho_{xx}$  indicam o número quântico  $n$  do nível de Landau que está a ser preenchido com indicação do spin dos electrões.

(De M. A. Paalanen, D. C. Tsui, A. G. Gossard, Physical Review **B25**, 5566, (82)).

O primeiro aspecto notável deste efeito, que certamente não escapou ao leitor atento, é a total ausência de factores geométricos na eq. (4). A resistência de Hall,  $R_H$ , é expressa inteiramente em termos de constantes fundamentais. De facto em duas dimensões (2D) a resistividade e resistência de Hall são idênticas, como se vê facilmente para uma amostra com a geometria da Fig. 7. A tensão Hall é  $V_H = E_y d$ . A corrente total é  $I = j_x d$  em que  $j_x$  é a densidade de corrente *superficial*. Logo

$$R_H \equiv V_H/I = E_y/j_x \equiv \rho_{xy} \quad (6)$$

Efectivamente, no caso do efeito Hall quantificado,  $R_H$  é totalmente independente da geometria da amostra e eléctrodos. Como  $\rho_{xx} \approx 0$  ( $\rho_{xx}/\rho_{xy} \sim 10^{-10}$ , nos patamares) o campo eléctrico é perpendicular à corrente, ou seja,

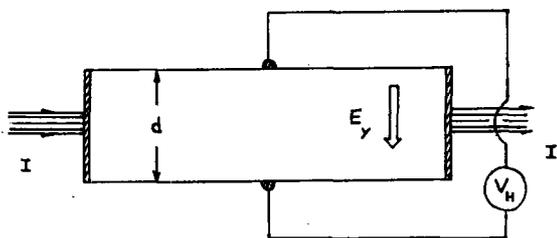


Fig. 7

as linhas de corrente são linhas equipotenciais. Isto é suficiente para garantir que  $\rho_{xy} = R_H$  para qualquer geometria (ver caixa).

Amostra com geometria arbitrária

A diferença de potencial entre dois pontos próximos P e P' num caminho arbitrário entre os dois eléctrodos A e B é

$$\Delta V_H = E \Delta s \cos \theta = \rho_{xy} j_x \Delta s \cos \theta$$

Mas  $j_x \Delta s \cos \theta$  é a corrente que atravessa o segmento  $\Delta s$ . Logo

$$\Delta V_H = \rho_{xy} \Delta l$$

Somando sobre todos os segmentos do caminho entre A e B obtém-se a eq. (6).

Na mente do leitor certamente se formulou já a questão. «Mas porquê um Prémio Nobel para a medição de uma resistência?». Na opinião deste autor são de três ordens as

razões que tornam esta descoberta notável (todas elas intimamente relacionadas como é natural).

- i) Quantificação de  $R_H$  em termos de constantes fundamentais;
- ii) Utilização do EHQ como padrão de resistência;
- iii) Medição com elevada precisão da constante da estrutura fina.

Habitualmente uma resistência é extremamente sensível a inúmeros factores. No caso presente o valor de  $R_H$  nos patamares é independente de factores geométricos, temperatura (desde que baixa), campo magnético (desde que  $\geq 10$  T), pureza da amostra, tipo de amostra (MOSFET de Si ou Heteroestrutura), etc. Em suma,  $R_H$  não depende criticamente de nenhum parâmetro, só podendo, portanto, ser determinado por constantes fundamentais. Neste sentido o EHQ realiza experimentalmente um padrão natural de resistência.

Por outro lado estas características sugerem também a sua utilização prática como padrão de resistência. Os padrões actuais do National Bureau of Standards dos Estados Unidos realizam o ohm, tal como ele é definido no sistema internacional, com uma precisão de 0.03 ppm. Se o valor de  $R_H$  nos patamares se provar independente do tempo com uma precisão comparável, o EHQ será certamente usado para calibrar resistências padrão. O valor de  $h/e^2$  (25 813  $\Omega$ ) está numa gama conveniente para medidas. Se possíveis correcções à eq. (4) se provarem suficientemente pequenas, o EHQ poderá tornar-se um padrão absoluto de resistência e servir de base à redefinição do Ohm.

A constante  $h/e^2$  está intimamente relacionada com a constante de estrutura fina  $\alpha$ , constante adimensional, que é uma medida absoluta da intensidade das interacções electromagnéticas (ver caixa). No sistema internacional  $\alpha = (\mu_0 c/2) (e^2/h)$ . A permeabilidade magnética do vazio  $\mu_0$ , é por definição  $4\pi \times 10^{-7}$  H/m, a velocidade da luz é conhecida com elevada precisão e numa próxima redefinição do metro terá um valor conven-

cionado. Deste modo o EHQ permite uma medida muito precisa de  $\alpha$ . Na teoria quântica do campo electromagnético, Electrodinâmica Quântica, as grandezas calculadas surgem como

Consideremos um electrão e um positrão (antipartícula do electrão) em órbita mútua à distância  $R$ . Este sistema é equivalente a uma partícula de massa reduzida  $\mu = m_e/2$  ( $\mu^{-1} = m_e^{-1} + m_e^{-1}$ ) em órbita de raio  $R$  em torno de uma carga fixa. No seu estado fundamental, 1.ª órbita de Bohr, temos ( $\hbar = h/2\pi$ )

$$\mu v R = \hbar$$

$$\mu V^2/R = (1/4\pi\epsilon_0) e^2/R^2$$

ou seja

$$R^{-1} = e^2/(4\pi\epsilon_0) \cdot \mu/\hbar^2$$

Uma medida possível da intensidade das interacções electromagnéticas é a razão entre a energia de ligação coulombiana  $E_c$  e a energia da massa em repouso  $E_\mu \equiv \mu c^2$

$$\frac{E_c}{E_\mu} \sim \frac{e^2/(4\pi\epsilon_0 R)}{\mu c^2} = \frac{(e/4\pi\epsilon_0)^2 (\mu/\hbar^2)}{\mu c^2} = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)^2$$

Usando  $c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$  facilmente se mostra que o membro da direita é  $\alpha^2$ .

séries de potências em  $\alpha$ . Por exemplo o momento magnético do electrão é  $\mathbf{m} = g \mu_B \mathbf{s}$  em que  $\mathbf{s}$  é o spin,  $\mu_B$  o magnetão de Bohr e  $g=2+a_e$  é um factor adimensional. A Electrodinâmica Quântica prevê para  $a_e$  (parte anómala de  $\mathbf{m}$ ), até quarta ordem em  $\alpha$ ,

$$a_e^{\text{teoria}} = (\alpha/\pi) - 0.328 (\alpha/\pi)^2 + 1.1765 (\pm 13) (\alpha/\pi)^3 - 2.3 (\pm 3.6) (\alpha/\pi)^4 \quad (7)$$

(os números entre parêntesis indicam a incerteza nos dois últimos algarismos significativos dos coeficientes). Como  $\alpha \sim 1/137$  a eq. (7) corresponde a uma previsão com cerca de oito algarismos significativos. O valor do momento magnético do electrão pode ser medido com muita precisão o que, comparando

com a eq. (7), dá o valor de  $\alpha$  consistente com a Electrodinâmica Quântica. Daí que o conhecimento do valor de  $\alpha$  de um modo independente constitua um teste extremamente rigoroso da validade desta teoria. Da medição do momento magnético do electrão obtém-se,

$$\alpha_{\text{EDQ}}^{-1} = 137.035\,993 \quad (10) \quad (0.073 \text{ ppm}).$$

O melhor valor obtido independentemente da Electrodinâmica Quântica envolve o efeito Josephson e dá

$$\alpha^{-1} = 137.035\,963 \quad (15) \quad (0.11 \text{ ppm}).$$

Do EHQ obtém-se (em 82)

$$\alpha_{\text{EHQ}}^{-1} = 137.035\,968 \quad (23) \quad (0.17 \text{ ppm}).$$

Ao leitor pode parecer um pouco pedante esta tentativa de verificação das previsões duma teoria até ao sétimo algarismo significativo. Note, no entanto, que a Electrodinâmica Quântica pretende ser uma teoria fundamental das interacções electromagnéticas. Qualquer limitação na justeza das suas previsões é, naturalmente, significativa. Para além disso estas medições de alta precisão permitem restringir os valores possíveis de parâmetros de outros tipos de interacções uma vez que, em princípio, podem dar origem a outras contribuições para  $a_e$ .

### Electrões livres num campo magnético

Na base da explicação do EHQ está o comportamento de electrões num campo magnético forte. Começemos por considerar electrões livres embora, como iremos ver, a presença de um potencial devido a impurezas desempenhe um papel fundamental na teoria do EHQ.

O leitor certamente recordará que um electrão clássico em movimento no plano perpendicular a um campo magnético executa um movimento circular uniforme devido à força de Lorentz. Da equação de movimento

$$m v^2/R = e v B$$

facilmente se conclui que a frequência angular,  $\omega = v/R$  depende apenas do valor do campo magnético sendo independente de  $v$

$$\omega = \omega_c = e B/m \quad (8)$$

Existe um outro sistema, o oscilador harmónico, cujo movimento clássico tem apenas uma frequência. Em Mecânica Quântica estes sistemas são caracterizados por um conjunto de níveis igualmente espaçados. De facto os níveis de energia de um electrão num campo magnético a duas dimensões são discretos (níveis de Landau),

$$E_N = (N + 1/2) \hbar \omega_c \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Ao contrário dos níveis de energia do oscilador harmónico a uma dimensão, os níveis de Landau podem acomodar muitos electrões, isto é, têm uma degenerescência elevada. Concretamente o número de estados distintos em cada nível (sem contar com o spin) é

$$p = (1/2\pi) A/a_0^2 = (1/2\pi) (m\omega_c/\hbar) A \quad (10)$$

em que  $A$  é a área da amostra e  $a_0 \equiv \sqrt{\hbar/m\omega_c}$  é um comprimento que corresponde ao tamanho característico das órbitas electrónicas no primeiro nível de Landau. Habitualmente o número de estados de uma partícula até uma energia  $E$  é proporcional ao tamanho do sistema desde que  $E$  não esteja muito próximo do estado fundamental. No caso presente os estados estão agrupados num número discreto de níveis que tem portanto uma degenerescência proporcional à área do sistema.

O resultado da eq. (10) sugere imediatamente uma explicação do EHQ (que como veremos não está correcta). Suponhamos (o que é verdade) que na presença de um campo eléctrico  $E_y$  os electrões se movem com velocidade (segundo  $x$ )  $v_x = E_y/B$ . Continua então a ser válida a eq. (2) para  $\rho_{xy}$ . Se o nível de Fermi se encontrar entre dois níveis de Landau haverá um número inteiro  $i$  de níveis de Landau integralmente preenchidos estando os restantes vazios. Neste caso o número de electrões por unidade de área,  $n$  é

$$n = ip/A = i m\omega_c/\hbar = i eB/h \quad (11)$$

A resistividade de Hall é então

$$-\rho_{xy} = B/(ne) = (1/i) (h/e^2) \quad (12)$$

Por outro lado é simples de compreender que  $\rho_{xx} \approx 0$  quando  $E_F$  se encontra entre dois níveis de Landau. A potência dissipada por efeito Joule é proporcional à componente do campo eléctrico na direcção de deslocamento dos electrões. Como  $E_x \approx \rho_{xx} j_x$ ;  $\rho_{xx} = 0$  significa que não há dissipação. Efectivamente o sistema electrónico só pode dissipar energia se os electrões puderem fazer transições entre estados de modo a transferirem energia para outros graus de liberdade, por exemplo a rede cristalina. Mas no caso presente só existem estados livres uma energia  $\hbar\omega_c$  superior à dos ocupados. Todos os estados com energia igual ou inferior à dos electrões que transportam a corrente estão ocupados. Não pode pois haver dissipação e  $\rho_{xx} \approx 0$ !

Há no entanto uma dificuldade grave com esta explicação. A quantificação de  $R_H$  ocorre num patamar que corresponde a uma variação finita de  $V_G$ , isto é, da concentração de electrões  $n$ . Quando um nível de Landau está cheio o electrão seguinte tem que ir para o nível de Landau acima. Assim uma variação infinitesimal de  $n$  (+1 electrão) faz saltar  $E_F$  para o interior do nível de Landau acima. Em suma, excepto para valores *pontuais* de  $V_G$ ,  $E_F$  está sempre no interior de um nível de Landau, caso em que não só existe dissipação, como o número de electrões não é mais múltiplo inteiro da degenerescência de um nível de Landau e portanto  $R_H$  não toma os valores da eq. (4). Nunca observaríamos então os patamares. Esta explicação ignora os efeitos do potencial desordenado devido à presença de impurezas na interface do p-Si e do óxido. Note-se, no entanto, que esta discussão permite compreender que a quantificação de  $R_H$  em função de  $n$  (Fig. 5) ou  $B$  (Fig. 6) são essencialmente o mesmo fenómeno. Ao variar  $B$  variamos o número de estados dentro de cada nível de Landau (eq. (10)) e portanto a posição de  $E_F$ . Por vezes mede-se a densidade electrónica em termos de fracção de preenchimento  $\nu = An/p$ .

O primeiro nível de Landau integralmente preenchido, por exemplo, corresponde a  $\nu=1$ .

### As impurezas e o aparecimento dos patamares

O potencial desordenado introduzido pelas impurezas tem dois efeitos importantes:

- i) Os diferentes estados de um nível de Landau deixam de ter exactamente a mesma energia. Assim, por exemplo, estados com maior densidade de probabilidade em zonas de energia potencial mais baixa verão a sua energia diminuída relativamente aos outros.
- ii) Os estados com energias mais afastadas da energia média de cada nível estão associados a regiões limitadas em que o potencial desordenado das impurezas toma valores extremos por flutuação estatística. São pois estados localizados em que a densidade de probabilidade de presença do electrão só é apreciável numa pequena região à volta de uma impureza ou grupo de impurezas. O espectro de energia do sistema apresenta então bandas de estados estendidos separados por bandas de estados localizados (Fig. 8).

Estes últimos não transportam corrente a baixas temperaturas já que um electrão para se propagar tem que saltar para um estado localizado vizinho ou para um estado estendido o que envolve uma energia de excitação finita. Apesar do espectro de estados localizados ser contínuo, estados de energia muito próxima encontram-se em geral afastados espacialmente. Se o nível de Fermi se encontrar numa banda de estados localizados não haverá dissipação. A corrente é transportada por estados estendidos que, de novo, estão separados de estados vazios por uma energia finita. Isso implica como antes que  $\rho_{xx} \approx 0$ , mas agora para uma variação finita da densidade electrónica, ou seja, enquanto é preenchida uma banda de estados localizados. O que não é de modo nenhum evidente é que, nestes patamares, se deva verificar a relação da eq. (4). O número

de estados estendidos que transportam a corrente não é mais um múltiplo inteiro da degenerescência de um nível de Landau. Alguns estados são agora localizados.

O problema é então explicar porque é que a corrente transportada por uma banda de

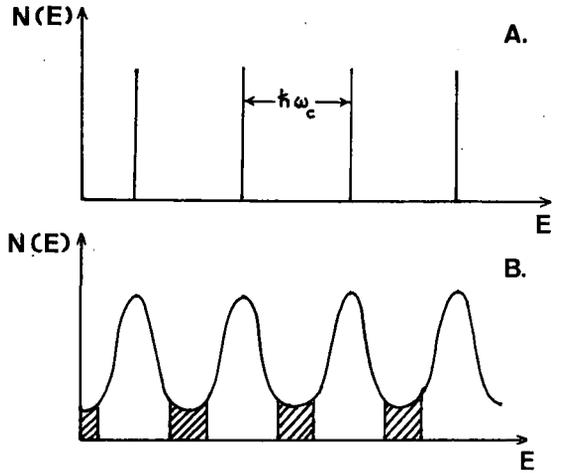


Fig. 8 — Densidade de estados em função da energia para um gás de electrões a duas dimensões num campo magnético;  $N(E) \Delta E$  é o número de estados com energia ente  $E$  e  $E + \Delta E$ .

- (a) Caso puro — Só há estados para as energias dos níveis de Landau.
- (b) Caso impuro — As zonas sombreadas designam bandas de estados localizados que não contribuem para a condução de corrente.

estados estendidos é exactamente a mesma que seria transportada por um nível de Landau completo na ausência de desordem.

### O argumento de Laughlin. Invariância padrão

Foi esta última questão que R. B. Laughlin da Universidade da Califórnia, Livermore, elucidou em 1981, através de um argumento extremamente elegante baseado no conceito de invariância padrão (referido no artigo de Jorge Dias de Deus no número anterior da Gazeta; ver também caixa na pág. seguinte).

O argumento de Laughlin toma a forma de uma experiência conceptual na melhor tradição de Einstein. Laughlin considera uma amostra em forma de fita cilíndrica (ver Fig. 9).

Supõe-se o nível de Fermi numa banda de estados localizados e uma corrente  $I$  a circular sem dissipação na amostra ao longo do eixo dos  $xx$ . O campo magnético é perpendicular

#### Invariância padrão em Electromagnetismo.

Em electrostática a um campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  está associado um potencial  $V(\mathbf{r})$ . A diferença de potencial entre dois pontos  $A$  e  $B$  é definida como

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot \Delta S \cos \theta$$

em que  $\Delta S$  é um pequeno deslocamento num caminho entre  $A$  e  $B$ ,  $E \cos \theta$  é a componente do campo tangente a  $\Delta S$  e o somatório é estendido a todos os segmentos que compõem o caminho de  $A$  a  $B$ . Matematicamente diz-se que  $\mathbf{E}$  é o simétrico do gradiente de  $V$  e escreve-se  $\mathbf{E} = -\nabla V$ . Note-se que se  $A$  e  $B$  coincidem, isto é, se o circuito for fechado, o somatório (integral de linha de  $\mathbf{E}$ ) é necessariamente nulo.

De modo análogo, a um campo magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  está associado um potencial vector  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  cuja relação com  $\mathbf{B}$  é de que o integral de linha de  $\mathbf{A}$  num circuito fechado é o fluxo de  $\mathbf{B}$  através de qualquer superfície limitada por esse circuito. É então claro que se fizermos a transformação

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \theta(\mathbf{r})$$

em que  $\theta(\mathbf{r})$  é um potencial arbitrário o campo  $\mathbf{B}$  não se altera. O integral de linha de  $\nabla \theta$  em qualquer circuito fechado é nulo. Em Mecânica Quântica o campo electromagnético é descrito por  $\mathbf{A}$  e  $V$ , não  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{E}$  directamente. Numa transformação

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \theta$$

as funções de onda também se alteram (e - carga do electrão)

$$\psi \rightarrow \psi e^{i(e/\hbar)\theta(\mathbf{r})}$$

embora todas as grandezas observáveis (energia, quantidade de movimento, etc.) se mantenham inalteradas. É esta transformação simultânea de  $\mathbf{A}$  e  $\psi$  que se designa por transformação padrão.

ao plano da amostra em todos os pontos. O problema é mostrar que a diferença de potencial entre as arestas laterais da amostra,  $V_H$  é dada pela eq. (4). O leitor poderá

argumentar que a geometria experimental do EHQ é diferente desta. No entanto é de esperar que no limite em que  $L$ , o perímetro da amostra na direcção  $xx$ , tende para infinito, esta geometria se torne equivalente à utilizada experimentalmente.

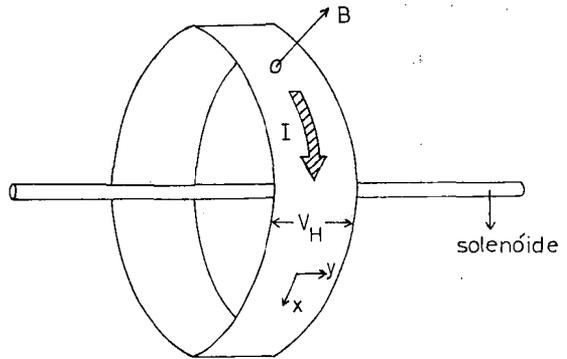


Fig. 9 — Geometria do argumento de Laughlin.

No eixo da amostra, Laughlin imagina um solenóide fino com um campo magnético no interior, que, note-se, é nulo na zona da amostra. A experiência conceptual consiste em variar o fluxo que atravessa o solenóide de modo suficientemente lento para não provocar transições entre os estados electrónicos na amostra, isto é, sem causar dissipação. Uma transformação deste tipo, em que os números de ocupação dos estados electrónicos não variam, enquanto estes se modificam por influência dos parâmetros externos, diz-se adiabática.

O campo magnético do solenóide (que não deve ser confundido com o campo magnético aplicado à amostra) pode ser descrito por um vector potencial dirigido ao longo dos  $xx$ , uniforme na amostra, de módulo

$$\mathbf{A} = \Phi/L \quad (13)$$

em que  $\Phi$  é o fluxo através do solenóide. Uma variação do fluxo  $\Delta\Phi$  corresponde a uma variação de  $\mathbf{A}$

$$\Delta\mathbf{A} = \Delta\Phi/L \quad (14)$$

Para um estado localizado ao longo do eixo dos  $xx$ , isto é uma transformação padrão (ver caixa) correspondente a uma função  $\theta(x) =$

$=\Delta A \cdot x$ . Os estados localizados transformam-se assim como

$$\Psi_{\text{loc}}(x, y) \rightarrow \Psi_{\text{loc}}(x, y) e^{i(e/\hbar) \Delta A \cdot x} \quad (15)$$

A energia deste estados permanece inalterada.

No entanto para estados estendidos ao longo de  $xx$  a variação de  $A$  da eq. (14) não é uma transformação padrão. Com efeito num circuito fechado que contorne o solenóide o integral de linha do vector potencial é agora  $\Phi + \Delta\Phi$ . A transformação da eq. (15) não resulta porque as funções de onda tem necessariamente período  $L$  segundo  $x$  ( $x$  e  $x + L$  indicam o mesmo ponto) e a exponencial em geral não! Os estados estendidos e as suas energias são pois afectados pelo aumento de fluxo no solenóide. Excepto quando  $\Delta A$  é tal que a exponencial da eq. (15) tem período  $L$ , caso em que os estados estendidos são apenas multiplicados por um factor de fase, como os localizados. Facilmente se vê que essa condição se verifica se  $\Delta\Phi$  for múltiplo inteiro de  $\Phi_0$ , o quantum de fluxo, dado por

$$\Phi_0 = h/e \quad (16)$$

Este resultado — os níveis de energia do sistema são exactamente os mesmos para valores de fluxo que difiram de um número inteiro de quanta de fluxo e os estados localizados não são afectados por qualquer variação de fluxo, é exacto e é uma consequência da invariância padrão.

Mas a variação de fluxo no solenóide induz uma força electromotriz,  $\epsilon$ , na amostra. Como há uma corrente a circular, o trabalho realizado é

$$\Delta W = \epsilon I \Delta t = -\Delta\Phi/\Delta t I \Delta t = -I \Delta\Phi \quad (17)$$

em que  $\Delta t$  é o intervalo de tempo durante o qual varia o fluxo  $\Phi$ . Mas para  $\Delta\Phi = \Phi_0$  os estados do sistema são os mesmos e a sua ocupação não variou porque a transformação foi adiabática. Para onde foi pois o trabalho realizado?

A resposta é-nos sugerida pelo que acontece no caso puro. Pode-se mostrar exactamente que, neste caso, os estados de um dado nível

de Landau podem ser tomados como estendidos na direcção  $xx$  e localizados na direcção  $yy$ , em bandas de largura  $a_0$ , cujos centros se distribuem entre as arestas laterais da amostra (ver Fig. 10). Numa transformação do tipo da

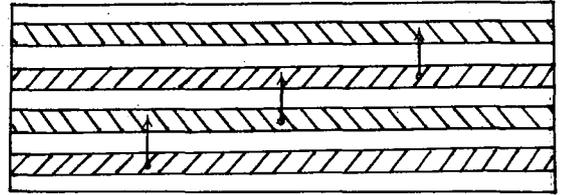


Fig. 10 — Estados de um nível de Landau no caso puro. No argumento de Laughlin quando o fluxo do solenóide varia os estados movem-se lateralmente e quando  $\Delta\Phi = \Phi_0$  cada estado transforma-se no vizinho.

eq. (14) os estados movem-se lateralmente e para  $\Delta\Phi = \Phi_0$  cada um transforma-se no vizinho. Como, em princípio, os estados de um dado nível de Landau estão todos cheios ou todos vazios na situação que consideramos, isso pareceria implicar que a energia não variaria. No entanto os estados cujos centros se encontram a uma distância inferior a  $a_0$  das extremidades laterais da amostra são afectados pela fronteira e em consequência a sua energia é superior à dos estados no interior da amostra. Junto às arestas laterais da amostra existem pois estados dum nível de Landau, em princípio preenchido, cuja energia está acima do nível de Fermi e que portanto estão vazios. Quando cada estado se transforma no vizinho há um estado vazio que «entra» na amostra (desce abaixo de  $E_F$ ) e outro, cheio, que «sai» pelo outro lado. O resultado final é a transferência de um electrão de uma extremidade à outra (na direcção  $yy$ ). Se existir uma diferença de potencial  $V_H$  o trabalho realizado é  $-ieV_H$  em que  $i$  é o número de níveis de Landau preenchidos. Por conservação de energia

$$ieV_H = I\Phi_0 \quad (18)$$

ou seja

$$V_H/I = \Phi_0/(ie) = (1/i)(h/e^2) \quad ! \quad (4)$$

Precisamente o resultado pretendido.

Laughlin argumenta que no caso impuro só pode suceder algo de semelhante, isto é, a transferência de um certo número de electrões de um lado ao outro da amostra. Se tivermos em conta que:

- i) Os níveis de energia são os mesmos no fim da transformação;
- ii) Não há transições entre estados;
- iii) Os estados localizados permanecem inalterados em toda a transformação;
- iv) Os estados estendidos não podem atravessar a banda de estados localizados (a energia absorvida não dependerá de  $I$  nesse caso);

vemos então que a única maneira consistente de a amostra absorver a energia  $I\Phi_0$  é transferir  $i$  electrões de um lado ao outro da amostra de modo que a eq. (18) se verifique e que, portanto, a resistência de Hall esteja quantificada do modo descrito pela eq. (4). Note-se que no caso impuro  $i$  pode ser qualquer inteiro. O argumento de Laughlin sugere fortemente que  $V_H/I$  só pode tomar valores na forma da eq. (4) sem no entanto especificar  $i$ . A exactidão da quantificação de  $R_H$  resulta no fundo da quantificação da carga do electrão. Assim se explica a sua insensibilidade aos factores que habitualmente afectam uma resistência.

## Conclusões

Um dos não menos notáveis aspectos do EHQ é o de não ter sido descoberto há mais tempo. Como espero tenha transparecido das páginas anteriores, os ingredientes essenciais da sua compreensão — níveis de Landau, localização e desordem, invariância padrão — são relativamente bem conhecidos dos físicos embora haja ainda muitas questões por esclarecer. No entanto a maneira como estes diversos aspectos «conspiraram» para produzir este efeito notável escapou totalmente aos físicos teóricos. Para quem faz Física da Matéria Condensada, cujos princípios e leis fundamentais são os da Mecânica Quântica, já correctamente enunciados em 1930, é particularmente

grato que uma descoberta deste tipo possa ainda ser feita 50 anos depois. Mas as surpresas não tinham terminado com os trabalhos de Von Klitzing ou Laughlin. Em 1982 um grupo dos Laboratórios Bell, D. C. Tsui, H. L. Stormer e A. C. Gossard descobriu uma extensão de certo modo ainda mais notável que o efeito original. Na Fig. 11 reproduzem-se

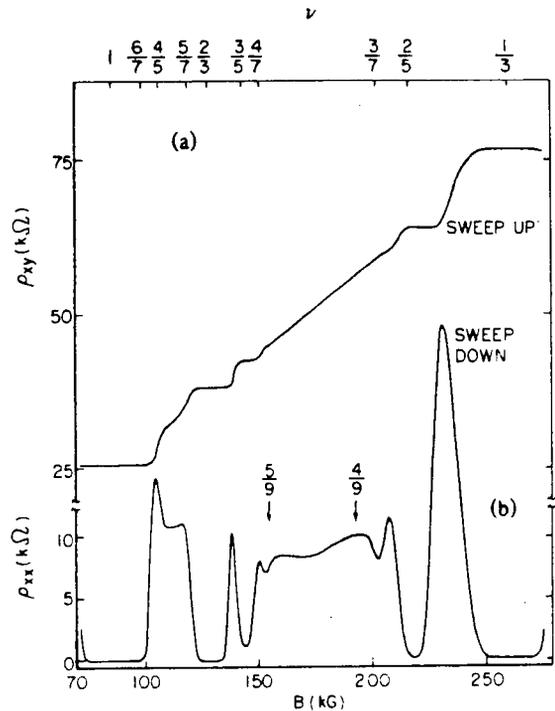


Fig. 11 — O Efeito Hall Quantificado Fraccionário. As fracções no topo indicam a fracção de preenchimento do primeiro nível de Landau para os diversos campos magnéticos. Os patamares ocorrem junto a valores do campo para as quais  $\nu$  é racional e correspondem a valores de  $\rho_{xy} = h/(\nu e^2)$ .

(De A. M. Chang, P. Berglund, D. C. Tsui, H. L. Stormer, J. C. M. Hwang; Physical Review Letters **53**, 997 (84)).

resultados posteriores que melhor ilustram esta nova descoberta. Esta figura é semelhante à Fig. 6 mas de certo modo começa onde a outra acaba. O patamar da direita da Fig. 6 corresponde a  $i = 2$  na eq. (4) e o mais à esquerda na Fig. 11 corresponde a  $i = 1$ . Os patamares seguintes nesta figura correspondem portanto a valores de  $i$  inferiores a 1, precisamente os valores fraccionários indicados no topo! Este Efeito Hall Quantificado Fraccionário ocorre

quando a fracção de preenchimento do primeiro nível de Landau tem um valor próximo de um valor racional ( $1/3$ ,  $2/5$ , ...). A explicação deste efeito envolve as interacções coulombianas entre os electrões. Grandes progressos foram já feitos na sua compreensão, com Laughlin em destaque, novamente. Mas isso é outra história.

#### BIBLIOGRAFIA

- M. E. CAGE, S. M. GIRVIN — Comments on Solid State Physics **11**, 1 (1983) e **11**, 47 (1983).  
K. VON KLITZING, G. DORDA, M. PEPPER — Physical Review Letters **45**, 494 (1980).  
D. C. TSUI, H. L. STOMER, A. G. GOSSARD — Physical Review Letters **48**, 1559 (1982).  
R. B. LAUGHLIN — Physical Review **B23** 5632 (1981).  
B. I. HALPERIN — Physical Review **B25** 2185 (1982).

Alguns artigos mais recentes podem ser encontrados em «Proceedings of the 17th International Conference on Low Temperature Physics LT-17, part III, Karlsruhe 1984». Physica **126 B+C** n.ºs 1-3.

---

## Material Research Society

A «Materials Research Society», da Europa vai organizar em Estrasburgo, de 17 a 20 de Junho de 1986, a sua Conferência Anual com os seguintes Simpósios:

- *Advanced Materials for Telecommunications.*
- *State of the art of computer simulation of casting and solidification processes.*
- *Dielectric Layers in Semiconductors: «Novel Technologies and Devices».*

Em 1986 terá lugar também a primeira Escola de Verão sobre o tema «Current problems on semiconductor surfaces and interfaces», que reunirá especialistas das universidades e da indústria.

Informações e inscrições:

P. Siffert, MRS EUROPE 86, 67037 Strasbourg Cedex, France.

## II SIMPÓSIO IBÉRICO DE FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA

Sevilha, 2 a 4 de Abril de 1986

Decorreu no mês de Fevereiro o envio de comunicações, inscrições e reserva de alojamento para este Simpósio.

Por solicitação de participantes inscritos, a Divisão de Física da Matéria Condensada da SPF está em condições de organizar um meio de transporte colectivo a Sevilha, desde que o número de inscrições exceda 40. A viagem seria em auto-pulman, com partida do Porto na manhã de 3.ª-feira, 1 de Abril, e paragens em Aveiro, Coimbra e Vila Franca de Xira, para entrada de participantes (e acompanhantes) inscritos na viagem. Chegada a Sevilha no mesmo dia. Regresso no Sábado, 5 de Abril, com paragens nos mesmos locais, e chegada ao Porto no mesmo dia.

O preço da deslocação oscilará entre 3.900\$00 e 5.000\$00, ida-e-volta, dependendo do número de inscrições (entre 40 e 50). Os lugares serão reservados pela ordem de inscrição. Para o efeito foram já distribuídas fichas-inquérito, com o pedido de confirmação até 15 de Fevereiro. Os potenciais interessados poderão dirigir-se por escrito a: João Bessa Sousa, Laboratório de Física, Faculdade de Ciências do Porto, 4000 Porto.

Aos que ainda o não fizeram, a Comissão Organizadora chama a atenção para a necessidade de confirmação urgente das reservas de alojamento, dadas as previsíveis dificuldades em Sevilha no período da Páscoa.

Casos de manifestas dificuldades financeiras, especialmente de jovens investigadores inscritos no Simpósio, poderão ser expostos por escrito à Comissão Organizadora em Sevilha que, na medida das suas disponibilidades, procurará atender situações de maior carência.