Gaz. Fis., Vol. 9 Fasc. 2, 1986

Tempo e Relatividade

PAULO CRAWFORD DO NASCIMENTO e ANA ISABEL SIMÕES
Departamento de Física, Faculdade de Ciências de Lisboa

O tempo na teoria da relatividade restrita

Com o alvorecer do séc. XX, A. Einstein lança uma nova luz sobre o conceito de tempo, atribuindo-lhe um carácter relativo e dependente do observador, no quadro da sua teoria da relatividade restrita, publicada em 1905 com o título «Sobre a Electrodinâmica dos Corpos em Movimento».

De acordo com Einstein, o intervalo de tempo entre dois acontecimentos, que ocorrem em pontos diferentes do espaço, não tem um valor absoluto e universal — como se admitia, no âmbito da física pré-relativista — mas, pelo contrário, é medido diferentemente por vários observadores (inerciais).

Poderá haver mesmo situações onde a ordem de sucessão dos dois acontecimentos venha invertida ou casos onde eles sejam considerados simultâneos por um observador e não o sejam por outros. Estas dramáticas modificações em relação à física newtoniana, só se tornam apreciáveis quando os corpos se movimentam com velocidades que se aproximam da velocidade de propagação da luz no vácuo.

O ingrediente fundamental da relatividade restrita é a constância da velocidade da luz, c, para todos os observadores, independentemente da maneira como estes se movem.

Além disso, c funciona como um valor limite absoluto para a velocidade de todos os sistemas materiais. Como a luz é sempre observada a propagar-se no vácuo com velocidade c, é manifestamente impossível a qualquer observador atingir (e muito menos ultrapassar) a velocidade da luz. Esta velocidade funciona, portanto, como uma espécie de barreira para o transporte de qualquer corpo material ou para a propagação de qualquer acção física.

Compreende-se, agora, que c seja considerada uma constante universal da natureza, uma quantidade fundamental e de grande importância para a determinação da estrutura do Universo. Sendo c uma constante universal já não faz sentido supor que os intervalos de espaço e de tempo possam ser invariantes separadamente mas, bem pelo contrário, deverão variar com o referencial, dando origem aos famosos efeitos de dilatação do tempo e de contracção do espaço. Vejamos um pouco mais pormenorizadamente este mundo relativista de Einstein.

Em primeiro lugar, como foi acentuado por Minkowski, antigo professor de Einstein, algum tempo depois da publicação do artigo «Sobre a Electrodinâmica dos Corpos em Movimento», os conceitos de espaço e de tempo passam a estar indissoluvelmente ligados. O mundo físico da nossa experiência é, agora, representado por um espaço quadridimensional, o espaço-tempo. A geometria desse espaço é caracterizada pelo invariante fundamental, que traduz a constância da velocidade da luz,

$$\Delta s^2 = c^2\,\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \qquad (1)$$

e que permite calcular a «distância» entre dois pontos, isto é, entre dois acontecimentos físicos do espaço-tempo. Isto significa que dados dois observadores inerciais O e O′, a «distância» espaciotemporal entre dois acontecimentos determinados é *independente* do estado de movimento relativo entre esses observadores e, portanto, das coordenadas com que cada um deles referencia os dois acontecimentos. Mais concretamente, devemos ter

$$\begin{aligned} c^2\,\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 &= \\ c^2\,\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 & \end{aligned} \qquad (1')$$

A lei de transformação que relaciona as coordenadas utilizadas pelos dois observadores, terá de satisfazer a equação (1′) e deverá depender da velocidade relativa entre eles. A forma explícita dessa lei, no caso em que os sistemas de referência estão igualmente orientados e se deslocam com uma velocidade paralela aos eixos dos XX, é a seguinte:

$$x' = (x - vt)\,(1 - v^2/c^2)^{-1/2}\quad,\quad y' = y\quad,\quad z' = z$$
$$t' = (t - vx/c^2)\,(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

Estas relações são conhecidas por fórmulas de transformação de Lorentz. Podemos escrever a forma quadrática (1) mais condensadamente, representando as coordenadas de cada ponto por x^{μ}, com μ tomando valores entre 0 e 3, nomeadamente $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$; vem então para um par de acontecimentos infinitesimalmente separados no espaço-tempo

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu} \tag{2}$$

onde se admite implicitamente a convenção de soma nos índices repetidos μ e ν.

A matriz da forma quadrática (2) tem todos os seus termos constantes

$$\eta_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

e é conhecida por matriz da *métrica* de Minkowski.

À forma quadrática (2), com esta matriz, dá-se o nome de elemento de linha ou métrica de Minkowski, e escreve-se explicitamente

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \tag{4}$$

As equações (3) e (4) mostram que o espaço e o tempo, embora ligados na definição do invariante fundamental, não estão em pé de igualdade, dado que a coordenada temporal x^0 entra com um sinal oposto ao sinal das coordenadas espaciais (x^1, x^2, x^3).

Para maior clareza e simplicidade, consideremos o espaço de Minkowski reduzido a duas dimensões, uma dimensão temporal ($x^0 = ct$) e uma dimensão espacial ($x^1 = x$). Cada ponto deste espaço representa um acontecimento físico, caracterizado por duas coordenadas (x, ct). Consideremos dois acontecimentos A_1 e A_2, conforme se pode ver na figura 1.

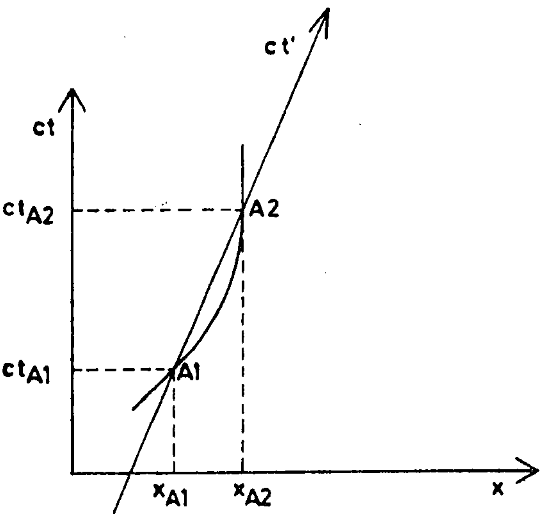

Fig. 1 — Diagrama de Minkowski bidimensional. A1 e A2 formam um par de acontecimentos do género tempo. A recta que passa por A1 e A2 é a *linha do universo de um observador inercial* com velocidade $v = \Delta x/\Delta t$.

O intervalo do espaço-tempo entre estes dois acontecimentos é dado por

$$\Delta s^2 = c^2\,\Delta t^2 - \Delta x^2,$$

sendo $\Delta t = t_{A2} - t_{A1}$ e $\Delta x = x_{A2} - x_{A1}$.

É bom de ver que Δs^2 poderá ser positivo, negativo ou nulo, pois a métrica de Minkowski é *indefinida.*

Se os acontecimentos A_1 e A_2 pertencerem à linha do Universo (trajectória no espaço-tempo) de um observador inercial, como se depreende da figura 1, então necessariamente $\Delta s^2 > 0$, para que a velocidade desse observador em relação ao referencial inercial do laboratório, de eixos (x, ct), seja $v = \Delta x/\Delta t < c$. Neste caso, dizemos que A_1 e A_2 formam um par de acontecimentos do *género tempo.* E como $\Delta s^2 > 0$, não poderá existir nenhum referencial inercial onde estes acontecimentos sejam simultâneos (i.e., $\Delta t = 0$). Sendo $c^2\,\Delta t^2 - \Delta x^2 > 0$, vemos que:

i) $\Delta t > (\Delta x)/c > v\,(\Delta x)/c^2 > 0$

ou ii) $\Delta t < -(\Delta x)/c < -v\,(\Delta x)/c^2 < 0$

Em qualquer dos casos, das fórmulas de transformação de Lorentz, nomeadmente $\Delta t' = (\Delta t - v\,\Delta x/c^2)\,(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, concluímos que $\Delta t'$ terá sempre o mesmo sinal que Δt.

Entre todos os referenciais inerciais existe um onde se tem $\Delta s^2 = c^2\,(\Delta t')^2$, isto é, no qual os acontecimentos ocorrem no mesmo ponto do espaço ($\Delta x' = 0$). Este referencial é conhecido por *referencial próprio* do observador (i.e., o referencial onde o observador se encontra em repouso) e ao tempo t' dá-se o nome de *tempo próprio.* É fácil ver que $\Delta t'$ é o tempo mais curto *medido por um observador inercial* entre os acontecimentos A_1 e A_2. Atendendo à invariância do intervalo

$$\Delta s^2 = c^2\,(\Delta t')^2 = c^2\,\Delta t^2 - \Delta x^2$$

imediatamente se conclui que o tempo Δt medido em qualquer outro referencial inercial está relacionando com $\Delta t'$ por

$$\Delta t^2 = \Delta t'^{\,2} + \Delta x^2/c^2 > \Delta t'^{\,2}, \text{ ou ainda}$$
$$\Delta t = \Delta t'\,(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \tag{5}$$

O resultado traduzido por estes cálculos pode resumir-se afirmando que o intervalo de tempo entre dois acontecimentos que ocorrem em pontos diferentes do espaço, num certo referencial, apresenta-se dilatado relativamente ao tempo medido no referencial próprio, onde ocorrem no mesmo ponto do espaço. Essa dilatação será tanto maior quanto maior for a velocidade relativa entre os dois referenciais. Note que o intervalo de tempo próprio $\Delta t'$ é proporcional ao comprimento Δs da linha do Universo que une A1 com A2.

Do que ficou dito anteriormente importa salientar que, se $t_{A2} > t_{A1}$ num dado referencial inercial então $t'_{A2} > t'_{A1}$ em qualquer outro referencial inercial, ou seja, *a ordem de sucessão de um par de acontecimentos do género-tempo é um dado absoluto.*

Pode também acontecer que A1 e A2 sejam dois pontos do espaço-tempo para os quais $\Delta s^2 < 0$, como na figura 2. Como $x_{A2} - x_{A1} > c\,(t_{A2} - t_{A1})$, $\Delta s^2 = c^2\,\Delta t^2 - \Delta x^2 < 0$, e portanto deve existir um referencial onde $\Delta s^2 = -\Delta x'^{\,2}$, ou seja, um referencial onde os acontecimentos sejam simultâneos ($\Delta t' = 0$).

Utilizando a fórmula de transformação de Lorentz $\Delta t' = (\Delta t - v\,\Delta x/c^2)\,(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ vê-se imediatamente que $\Delta t' = 0$ implica $v = c^2\,\Delta t/\Delta x$. Logo esse referencial desloca-se em relação ao laboratório com uma velocidade constante $v = (c\,\Delta t/\Delta x)\,c < c$. Qualquer outro observador

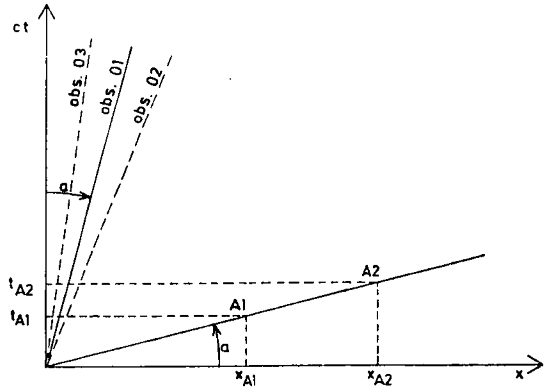

Fig. 2 — A1 e A2 formam um par de acontecimentos do género espaço: $x_{A2} - x_{A1} > c(t_{A2} - t_{A1})$. Existe um referencial onde estes acontecimentos são *simultâneos,* o qual tem como eixo dos XX a recta que passa por A1 e A2: é o referencial próprio do observador 0_1.

inercial deslocando-se com uma velocidade u, em relação ao laboratório, tal que $v < u < c$, como é o caso do observador 0_2, verá $t'_{A2} < t'_{A1}$, ou seja, verá a ordem de sucessão dos acontementos A1 e A2 invertida em relação ao laboratório, onde se tem $t_{A1} < t_{A2}$.

Efectivamente, $v < u \Rightarrow c^2\,\Delta t/\Delta x < u \Rightarrow \Delta t < u\Delta x/c^2$ e $\Delta t' = (\Delta t - u\Delta x/c^2)\,(1 - v^2/c^2)^{-1/2} < 0$. Para o observador 0_3 da figura 2, cuja velocidade em relação ao laboratório é inferior a v, vem também $t_{A2} > t_{A1}$.

Não é difícil ver, a partir da invariância do intervalo $\Delta s^2 = -\Delta x'^{\,2} = c^2\,\Delta t^2 - \Delta x^2$, e do facto de v ser igual a $c^2\,\Delta t/\Delta x$, que

$$\Delta x' = \Delta x\,(1 - v^2/c^2)^{1/2} \tag{6}$$

Isto significa que uma barra em repouso no referencial do laboratório, com comprimento igual a Δx, é vista pelos observadores que se deslocam com velocidade v, em relação ao laboratório, com comprimento $\Delta x' < \Delta x$, resultado que traduz a contracção dos comprimentos!

Na figura 1 também podemos ver uma trajectória curva, passando pelos acontecimentos A1 e A2, e representando a linha do Universo de um observador acelerado (não inercial).

Qual é o tempo próprio mais curto? É o tempo medido pelo observador inercial, que segue ao longo de uma linha do Universo, rectilínea, ou é o tempo medido pelo observador acelerado? Vimos que o tempo próprio entre dois acontecimentos é proporcional ao comprimento da linha do Universo que os une.

A questão pode, portanto, ser colocada numa linguagem mais geométrica: qual dos dois caminhos entre A1 e A2 é o mais curto? Antes de responder à pergunta devemos adiantar que, tendo o espaço de Minkowski uma geometria *pseudo-euclideana*, onde está definida uma função distância que pode tomar valores positivos, negativos ou nulos, as linhas do universo rectilíneas do género-tempo, são linhas de comprimento máximo. Logo o intervalo de tempo próprio entre os acontecimentos A1 e A2 é máximo para o observador inercial.

Isto pode compreender-se facilmente com o auxílio da figura 3. O intervalo de tempo próprio entre os acontecimentos A e C, calculado ao longo do caminho ABC é:

$$\Delta\tau_{ABC} = t_C - t_A = 2\,(t_B - t_A)\,,$$

admitindo que $t_B = (t_A + t_C)/2$.

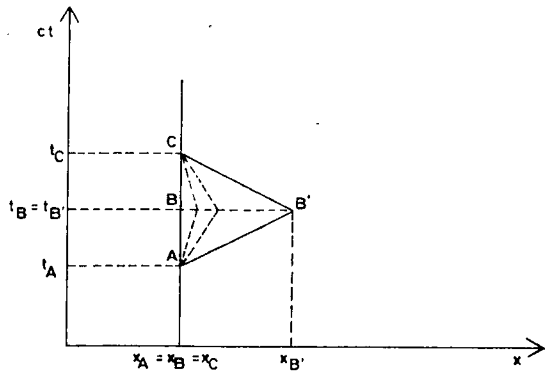

Fig. 3 — O tempo próprio entre os dois acontecimentos A e C depende do caminho, sendo máximo ao longo do caminho ABC.

Calculando o intervalo de tempo próprio entre os mesmos acontecimentos A e C mas agora ao longo do caminho AB′C vem

$$\Delta\tau_{AB'C} = 2\,[\,(t_{B'} - t_A)^2 - (x_{B'} - x_A)^2/c^2\,]^{1/2}$$

Vê-se imediatamente que $\Delta\tau_{AB'C} < \Delta\tau_{ABC}$, ou ainda $\Delta\tau_{AB'C}$ tende para um valor máximo, igual a $\Delta\tau_{ABC}$, quando $x_{B'} \to x_B\,(= x_A)$, ou seja, quando o caminho AB′C coincide com o caminho ABC. Voltando à figura 1 e representando por Δt o intervalo de tempo próprio medido pelo observador inercial, vem para o tempo próprio do observador acelerado

$$\Delta t' = \int_{t_1}^{t_2} dt\,[\,1 - v(t)^2/c^2\,]^{1/2}$$

onde v(t) é o valor da velocidade do observador acelerado em relação ao observador inercial, no instante t.

Este integral é claramente função do caminho do espaço-tempo seguido entre os acontecimentos A_1 e A_2.

Esta é a situação que ocorre no chamado *«paradoxo dos gémeos»* ou *«paradoxo de Langevin»*, onde se compara um relógio em movimento com um relógio em repouso num referencial inercial. A aparente contradição gira em torno da suposta equivalência dos referenciais, que decorre da relatividade do movimento. O paradoxo deixa de existir quando se põe em evidência que os referenciais não são equivalentes, visto que não há simetria entre os dois observadores. Um deles é um observador inercial que segue, pois, uma trajectória rectilínea no espaço-tempo e o outro é um observador acelerado, cuja linha do universo é necessariamente uma trajectória curva. Se dois observadores se cruzam duas vezes, a fim de poderem comparar os seus relógios, então pelo menos um deles terá de ser um observador acelerado.

Finalmente, voltando à equação (5) e escrevendo-a na forma

$$\Delta t' = \Delta t\;(\,1 - v^2/c^2\,)^{1/2} \qquad (7)$$

vemos que à medida que v tende para c,

$\Delta t' \rightarrow 0$: o intervalo de tempo próprio entre dois acontecimentos da vida de uma partícula que viaje à velocidade da luz (como é o caso dos fotões) é nulo. Neste caso, $\Delta s^2 = 0$, e diz-se que os acontecimentos formam um par do *género-luz*.

Dado um certo acontecimento do espaço-tempo, seja o acontecimento 0, o lugar geométrico dos pontos do espaço-tempo que formam com 0 pares de acontecimentos do género-luz constitui uma superfície tridimensional conhecida por *cone de luz*. Na figura 4 representamos um cone de luz ao qual se suprimiu uma dimensão espacial.

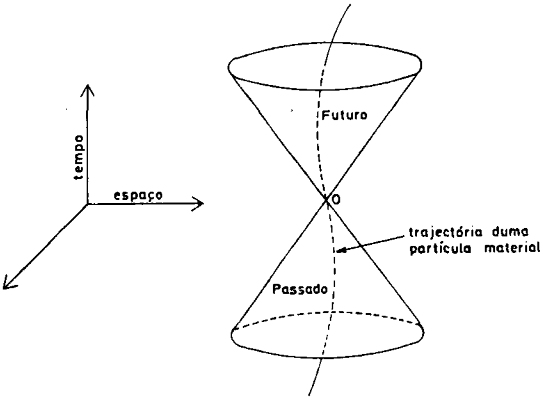

Fig. 4 — O cone de luz separa os acontecimentos que estão ligados do ponto de vista causal ao ponto 0, daqueles acontecimentos que não podem influenciar 0 nem ser influenciados por 0.

Os acontecimentos que estão sobre o cone de luz do passado, ou no seu interior, são capazes de influenciar o acontecimento 0. Por sua vez o acontecimento 0 poderá influenciar qualquer acontecimento que esteja sobre o cone de luz do futuro, ou no seu interior. Quanto aos restantes acontecimentos do espaço-tempo, nem influenciam 0, nem são influenciáveis por 0. Podemos, portanto, afirmar que não existe nenhuma relação causal entre estes acontecimentos e o acontecimento 0. Diz-se que os cones de luz determinam a estrutura causal do espaço-tempo.

A linha do Universo duma partícula material nunca poderá atravessar um cone de luz definido num acontecimento qualquer da sua história. É necessário que isto seja assim para que os objectos viajem com velocidade inferiores à da luz. No caso do espaço de Minkowski esta exigência garante-nos que um efeito nunca poderá preceder a sua causa. No caso geral, contudo, isto não é suficiente para impedir a violação da causalidade. Para preservar a relação causa-efeito é indispensável que o futuro absoluto e o passado absoluto sejam distintos; por outras palavras, é necessário garantir que nenhuma partícula possa visitar o seu próprio passado.

Por exemplo, num espaço-tempo com a topologia global do cilindro é natural que surjam dificuldades deste tipo.

Desenhemos, numa folha de papel, um diagrama bidimensional representando um cone de luz num ponto 0 da linha do Universo duma partícula material. Se enrolarmos o papel de modo a obtermos um cilindro, veremos que as distâncias e os ângulos se mantêm inalterados.

Dizemos que a superfície do cilindro é *localmente* idêntica à superfície da folha de papel. Contudo, a topologia global destes dois espaços bidimensionais é essencialmente diferente. Em vez da variável temporal, t, variar de $-\infty$ a $+\infty$, t toma agora valores num intervalo fechado. O acontecimento 0′ da figura 5, tanto pode ser considerado como

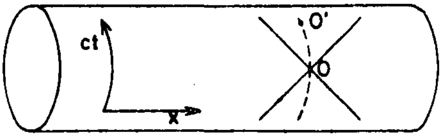

Fig. 5 — Espaço-tempo com a topologia global do cilindro.

pertencendo ao cone de luz do futuro de 0, como ao cone de luz do passado de 0. Neste espaço-tempo não é possível distinguir entre passado e futuro absolutos.

Assim, um observador poderá visitar o seu passado e modificá-lo a contento.

(Continua)