

# Cálculo matricial em óptica

PAULO ARTUR PINTO DE OLIVEIRA LOPES

Centro de Física da Universidade do Porto (\*)

*Pretende-se neste artigo introduzir um processo sistemático de cálculo para o processamento de raios através de sistemas ópticos, fazendo para tal representar cada um dos fenómenos presentes (refracção e propagação) por uma matriz adequada (contendo informação sobre raios de curvatura, índices de refracção e distâncias entre interfaces) o que permite através do produto matricial encontrar facilmente os parâmetros que caracterizam o raio óptico à saída do sistema.*

## 1. Introdução

Os sistemas ópticos constituídos por lentes dispostas ao longo de um eixo são utilizados correntemente para variados fins nomeadamente a formação de imagens (caso das objectivas fotográficas por exemplo). A análise do processamento dessas imagens através de um sistema óptico simples recorre em geral a uma de duas equações:

$$n_1/s_1 + n_2/s_2 = (n_2 - n_1)/R \quad (a)$$

correspondente ao caso de uma interface esférica onde  $n_1$  e  $n_2$  são índices de refracção,  $s_1$  e  $s_2$  são distâncias do ponto objecto e imagem à interface, respectivamente, e  $R$  o seu raio de curvatura (ver Figura 1).

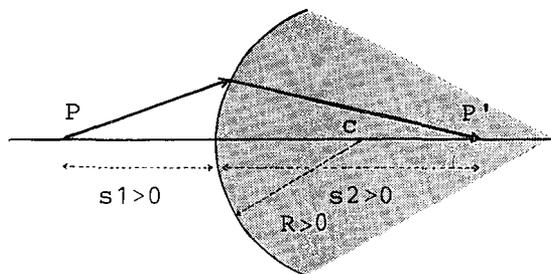


Fig. 1

$$1/s_1 + 1/s_2 = (n - 1) \cdot (1/R_1 - 1/R_2) \quad (b)$$

correspondente ao caso da associação de duas interfaces esféricas muito próximas (lente fina), onde a lei anterior é utilizada duas vezes;  $n$  é o índice de refracção da lente relativamente ao meio exterior;  $s_1$  e  $s_2$  são distâncias do ponto objecto e imagem à lente esférica, respectivamente (ver Figura 2).

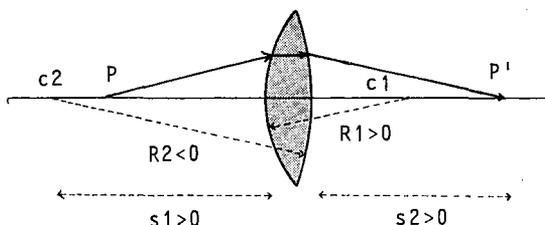


Fig. 2

Ambos os casos provêm da 2.<sup>a</sup> lei de Snell (refracção),

$$n \cdot \text{sen}\theta = n' \cdot \text{sen}\theta'$$

e consideram a aproximação paraxial ou seja a incidência de pequenos ângulos (ver por exemplo, Optics — Hecht & Zajac, cap. 5).

Os cálculos para a formação de imagens em sistemas ópticos simples seriam então imediatos.

## 2. Introdução de matrizes

Para sistemas mais complexos (ver Fig. 3), contudo, a tarefa seria mais árdua já que implicaria a determinação da imagem do ponto objecto por uma ou duas interfaces (lente fina), utilizar esse ponto como novo ponto objecto, reprocessá-lo e assim sucessivamente. Este procedimento monótono é consumidor de tempo e dá origem a erros frequentes de cálculo.

É portanto conveniente a sistematização do cálculo de propagação quer para a determinação de imagens dadas por sistemas ópticos, caso anteriormente descrito, quer para qualquer outro fim. Como se irá ver, uma representação

(\*) Actualmente no Departamento de Física da Universidade de Aveiro.

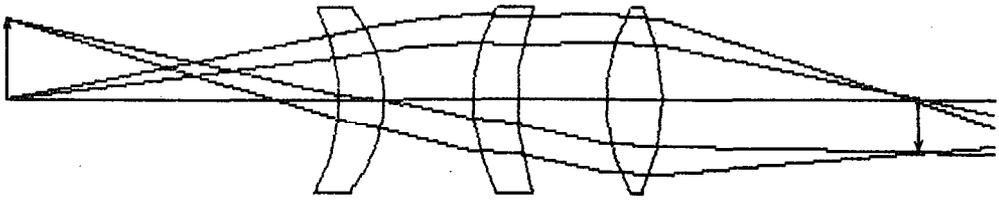


Fig. 3

matricial é perfeitamente adequada a um tratamento automático (com calculadora programável ou computador pessoal).

Para introduzir esta representação abandonam-se as equações de formação de imagens acima descritas fazendo uso apenas da lei de Snell na aproximação de pequenos ângulos (paraxial).

Considere-se o raio óptico incidente numa interface, representado pelo «vector» (matriz coluna),

$$\begin{bmatrix} n \cdot \alpha \\ X \end{bmatrix}$$

onde  $n$  é o índice de refração do meio,  $X$  a altura de incidência e  $\alpha$  o ângulo que a direcção de propagação faz com a horizontal (Fig. 4). Embora a lei de Snell não o utilize

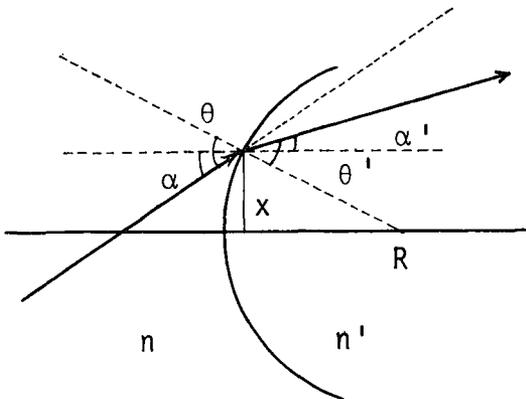


Fig. 4

directamente, este ângulo é aquele que define o raio óptico, sendo possível relacioná-lo com o ângulo de incidência  $\theta$ . Seguindo a figura 4 e tendo em conta que,

$\text{sen } \theta \simeq \theta$ ,  $\text{sen } \theta' \simeq \theta'$  (aproximação paraxial)

$$\theta - \alpha = X/R = \theta' - \alpha'$$

a lei de Snell conduz a  $n \cdot \theta = n' \cdot \theta'$ , logo

$$n' \cdot \alpha' = n \cdot \alpha + (n - n') \cdot X/R$$

Trata-se de uma relação linear entre  $n \cdot \alpha$  e  $n' \cdot \alpha'$  susceptível de ser posta em linguagem matricial.

Procuramos então uma matriz representativa da refração,

$$[R] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

tal que actuando em,

$$\begin{bmatrix} n \cdot \alpha \\ X \end{bmatrix}$$

dê como resultado,

$$\begin{bmatrix} n' \cdot \alpha' \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \cdot \alpha + (n - n') \cdot X/R \\ X \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n \cdot \alpha \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \cdot n \cdot \alpha + B \cdot X \\ C \cdot n \cdot \alpha + D \cdot X \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} n \cdot \alpha + (n - n') \cdot X/R \\ X \end{bmatrix}$$

Tira-se então que,

$$A = 1; \quad B = (n - n')/R; \quad C = 0; \quad D = 1.$$

Logo,

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & (n - n')/R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O processamento de um raio óptico envolve ainda a propagação livre do raio entre duas interfaces que se representa também por uma matriz (matriz transporte ou translacção [T]) e tem a seguinte forma:

$$[T] = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$$

De acordo com a figura 5 e tendo em conta que  $\alpha$  se mantém na propagação livre,

obtem-se

$$X' = X + \text{tg } \alpha \cdot d = X + \alpha \cdot d$$

Então,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \cdot \alpha \\ X' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n \cdot \alpha \\ X \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A' \cdot n \cdot \alpha + B' \cdot X \\ C' \cdot n \cdot \alpha + D' \cdot X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \cdot \alpha \\ X + \alpha \cdot d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donde se tira que,

$$A' = 1; \quad B' = 0; \quad C' = d/n; \quad D' = 1.$$

Logo,

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d/n & 1 \end{bmatrix}$$

Com estas duas matrizes consegue-se processar um raio óptico através de qualquer sistema, conhecidos os parâmetros que o caracte-

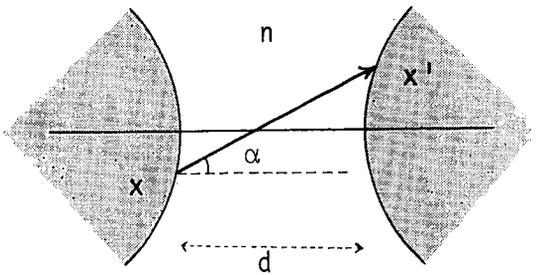


Fig. 5

rizam (raios de curvatura, índices de refração e distâncias entre interfaces), qualquer que seja a sua complexidade, bastando para tal multiplicar sequencialmente o vector que define o raio à entrada do sistema pelas matrizes representativas da refração nas interfaces e da propagação livre entre aquelas. Ainda, e uma vez que a propriedade associativa é verificada no produto matricial, pode-se efectuar o produto de todas as matrizes [R] e [T] e representar todo o sistema por uma única matriz [S]:

$$[S] = [R_n] \cdot [T_{n-1}] \cdot [R_{n-1}] \dots [T_1] \cdot [R_1]$$

de tal modo que,  $[o] = [S] \cdot [i]$ , onde  $[i]$  define o raio à entrada do sistema (*in*) e  $[o]$  à saída (*out*).

### 3. Exemplo

Como exemplo considere-se o sistema de duas lentes da Fig. 6:

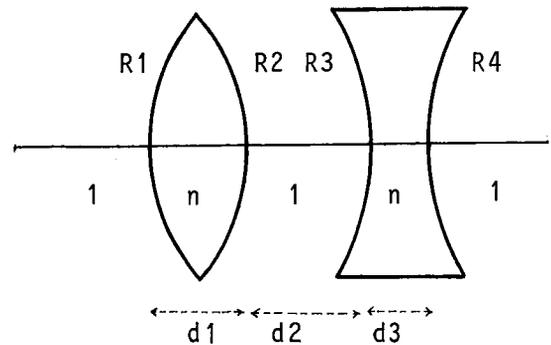


Fig. 6

$$R_1 = -R_2 = 30 \text{ cm}; \quad R_3 = -R_4 = -25 \text{ cm}; \\ d_1 = 5 \text{ cm}; \quad d_2 = 10 \text{ cm}; \quad d_3 = 3 \text{ cm}; \quad n = 1,5$$

A matriz do sistema é dada por,

$$\begin{aligned} [S] &= \begin{bmatrix} 1 & (n-1)/R_4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_3/n & 1 \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} 1 & (1-n)/R_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_2/1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} 1 & (n-1)/R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_1/n & 1 \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} 1 & (1-n)/R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5036 & -0,0084 \\ 15,178 & 0,5804 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para um raio incidente paralelamente ao eixo, distanciado de 1 cm,  $[i]$  é dado por,

$$[i] = \begin{bmatrix} n \cdot \alpha \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Então,

$$\begin{aligned} [o] &= \begin{bmatrix} 1,5036 & -0,0084 \\ 15,178 & 0,5804 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -0,0084 \\ 0,5804 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n' \cdot \alpha' \\ X' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sabendo que  $n' = 1$ , tem-se à saída do sistema um raio óptico distanciado de  $X' = 0,5804$  cm do eixo e fazendo um ângulo de  $\alpha' = -0,0084$  rad com a horizontal.

#### 4. Cálculo de imagens

Por um processo idêntico calcula-se a imagem de um ponto dada por um sistema óptico de matriz [S], motivo principal da introdução deste método:

$$[i] = \begin{bmatrix} 1 \cdot \alpha \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \cdot d \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ d \end{bmatrix}$$

$$[o] = [S] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ d \end{bmatrix} \cdot \alpha = \begin{bmatrix} 1 \cdot \alpha' \\ X' \end{bmatrix}$$

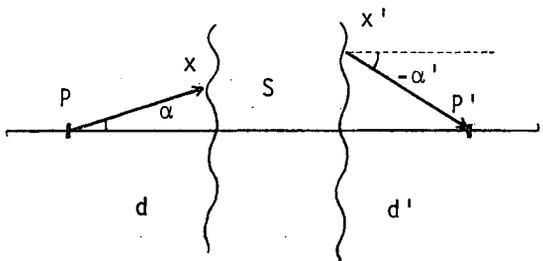


Fig. 7

Conhecidos  $\alpha'$  e  $X'$ ,  $d'$  seria então dado por:

$$X'/d' = -\alpha' \quad (=) \quad d' = -X'/\alpha'$$

$d' > 0$  — a imagem é real

$d' < 0$  — a imagem é virtual

[S] não depende de [i] pelo que caracteriza o sistema óptico considerado. A facilidade da sua manipulação matemática para a determinação de imagens sugere a sua utilização e por conseguinte este processo revela-se satisfatório.

#### 5. Software

Para finalizar, chama-se ainda a atenção que o cálculo de [S], devido ao seu carácter sistemático, pode ser obtido por computador a partir de um programa simples de produto de matrizes como o apresentado nesta secção. Este programa, embora tenha sido escrito para um Sinclair ZX Spectrum, pode ser corrido em qualquer microcomputador sem requerer alterações significativas.

```
1 REM * Paulo Artur *
3
5 CLS
6
```

```
10 LET x = 1
11 LET y = 0
12 LET w = 0
13 LET z = 1
99
100 INPUT "A = "; a
200 INPUT "B = "; b
300 INPUT "C = "; c
400 INPUT "D = "; d
450
500 LET x1 = a * x + b * w
501 LET y1 = a * y + b * z
502 LET w1 = c * x + d * w
503 LET z1 = c * y + d * z
504
505 LET x = x1
506 LET y = y1
507 LET w = w1
508 LET z = z1
510
600 PRINT "X = "; x, "Y = "; y
601 PRINT "W = "; w, "Z = "; z
602
650 PRINT : PRINT
652 PRINT "Continuo ? (s/n)"
654
660 IF INKEY$="s" THEN CLS : GOTO 100
665 IF INKEY$="n" THEN GOTO 1000
667 GOTO 660
680
1000 CLS : PRINT "Recomeço ? (s/n)"
1003
1005 IF INKEY$ <> "" THEN GOTO 1005
1010 IF INKEY$ = "s" THEN RUN
1020 IF INKEY$ = "n" THEN GOTO 2000
1030 GOTO 1010
1050
2000 CLS : PRINT "*** Fim de execução ***"
```

Nota: os elementos de entrada são  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

e a multiplicação das matrizes é efectuada da direita para a esquerda.

## união internacional de física pura e aplicada (IUPAP)

A SPF pode confirmar (cf. Gaz. Fís. 7, 78 (1984)) a admissão de Portugal como membro da IUPAP (XVIII Assembleia Geral, Trieste, Outubro 1984). Encontra-se em organização a *Liaison Committee* que passará a ser, em Portugal, o interlocutor da IUPAP.