Gazeta de Física, (1980), VII, 9-20

UM PROBLEMA DE RELATIVIDADE — O «PARADOXO DOS RELÓGIOS» —

PAULO GALI DE CARVALHO MACEDO *

RESUMO — Pretende-se com este trabalho, mostrar a impossibilidade da resolução do chamado «Paradoxo dos Relógios» no âmbito da Teoria da Relatividade Restrita.

Para tal, começa-se por enunciar o problema, que consiste no facto de dados dois relógios sincronizados à partida um dos quais é embarcado numa nave espacial enquanto o outro permanece na Terra, supondo que a nave viaja a uma velocidade próxima da velocidade da luz, numa viagem de ida e regresso à Terra, quando se comparam novamente os tempos indicados pelos relógios levados para junto um do outro, verifica-se que o intervalo de tempo medido pelos dois relógios entre a partida e chegada do primeiro é diferente.

Em seguida a uma curta exposição do tratamento do problema em Relatividade Restrita, vulgarmente utilizado, e das opiniões de alguns autores que partilham este ponto de vista, mostra-se que o tratamento é incorrecto, através do estudo da diferença de tempos decorridos, calculada por um terceiro observador situado num referencial inercial e comparação desta com a diferença calculada pelo observador em repouso no referencial inercial de que partiu a nave.

I — INTRODUÇÃO

1. O Grupo de Galileu e o de Lorentz

Constitui facto corrente o fenómeno de dilatação do tempo que decorre imediatamente da substituição na T. R. R. ** do grupo de transformação de Galileu pelo grupo de Lorentz.

---

* Assistente do Departamento de Matemática da F. C. T. U. C.; Membro do Centro de Investigação Matemática Anastácio da Cunha (INIC).

** Teoria da Relatividade Restrita.

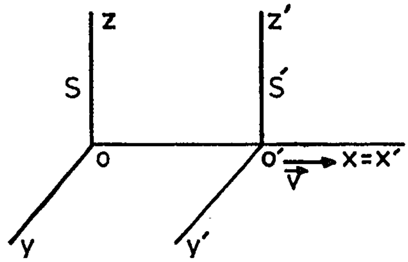

Fig. 1

Dados dois referenciais inerciais S e S' situados um relativamente ao outro na posição padrão, isto é, com os eixos dos xx coincidentes, e estando a origem $0'$ de S' em movimento com velocidade $\vec{v}$ relativamente a S, temos de acordo com a Teoria da Relatividade Restrita o grupo de Lorentz:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + vt}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{v}{c^2}\,x'}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} \end{cases} \tag{1}$$

(t,x,y,z) coordenadas de um acontecimento em S
(t',x',y',z') coordenadas de um acontecimento em S'.

2. A Dilatação dos Tempos

Suponhamos que temos um dado referencial S_1 e um outro S_2, estando S_1 em movimento relativamente a S_2 com velocidade $\vec{v}$ segundo os eixos dos xx de S_1 e S_2.

Suponhamos que num mesmo ponto do referencial S_2 ocorrem dois acontecimentos, como, por exemplo, dois tic-tacs de um relógio, nos instantes t_2 e t'_2. O intervalo de tempo que decorre entre estes dois acontecimentos para o observador situado em S_2 será $\Delta t_2 = t'_2 - t_2$. Mas para o observador em S_1 o intervalo não será o mesmo, visto que usando a transformação de Lorentz, com t_1 e t'_1 os instantes correspondentes aos mesmos acontecimentos observados por este, virá:

$$t_1 = \frac{t_2 + v\dfrac{x}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}, \qquad t'_1 = \frac{t'_2 + v\dfrac{x}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} \tag{2}$$

e

$$\Delta t_1 = t_1' - t_1 = \frac{t_2' - t_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{3}$$

Vemos que o intervalo de tempo que decorre entre os dois acontecimentos, quando observado pelo observador situado em S_1, aparece dilatado em relação ao observado pelo observador situado em S_2 de um factor $\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$.

Isto é, o intervalo de tempo entre dois acontecimentos ocorrendo num dado referencial será mínimo quando medido num referencial em repouso relativamente a ele e será tanto maior quanto maior fôr a velocidade do referencial de onde são observados relativamente ao referencial no qual ocorrem os acontecimentos.

II — ENUNCIADO DO PROBLEMA E OBJECTIVO DO PRESENTE TRABALHO

1. O Problema

Vimos que, quando passamos a considerar a transformação de Lorentz, surge-nos naturalmente o fenómeno da dilatação das escalas de tempo para os observadores em movimento. Isto é, quando temos um dado relógio cujo comportamento é observado por dois observadores, um em repouso relativamente a ele e outro em movimento, e dado um certo intervalo de tempo entre dois acontecimentos coincidentes no referido referencial (por exemplo dois bateres consecutivos das horas do relógio), o intervalo de tempo é maior comparado com a escala de tempo respectiva para o observador em movimento que para o observador em repouso no referencial do relógio.

Podemos também explicar isto de outra maneira. Se definirmos o intervalo elementar de tempo próprio entre dois acontecimentos adjacentes no espaço e no tempo para um referencial inercial qualquer, como sendo

$$d\tau = \frac{ds}{c}, \tag{4}$$

e sendo $d\tau' = \dfrac{ds'}{c}$ o intervalo elementar de tempo próprio entre os mesmos dois acontecimentos num outro referencial inercial qualquer, dado que

$$ds = ds'$$

por ser invariante com a mudança de coordenadas, virá

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{ds'}{c} = d\tau\,. \tag{5}$$

Isto é, o intervalo de tempo próprio entre dois acontecimentos é um invariante: é o mesmo qualquer que seja o referencial inercial no qual são feitas as medições.

Se tomássemos um sistema de unidades tal que nele $c = 1$, então teríamos que

$$d\tau^2 = dt^2 - \underbrace{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}_{\vec{dr}^{\,2}}\,. \tag{6}$$

Ora, no referencial em que o relógio está em repouso, o segundo termo do segundo membro de (1) anula-se, conduzindo a

$$d\tau^2 = dt^2\,.$$

Por outro lado, no outro referencial temos

$$d\tau'^2 = dt'^2 - \vec{dr'}^{\,2}$$

com $\vec{dr'}^{\,2} > 0$; portanto, sendo $d\tau'^2 = d\tau^2$ vem

$$dt^2 = dt'^2 - \vec{dr'}^{\,2}\,, \quad \text{ou seja}$$

$$dt < dt'\,. \tag{7}$$

Suponhamos então que temos dois relógios quaisquer (de um modo geral costuma escolher-se dois gémeos como os relógios biológicos utilizados): um deles é colocado num foguetão enviado com velocidade próxima de c para um ponto qualquer do Universo (por exemplo a estrela Vega Lirae), que em certo momento inverte o sentido da sua marcha e regressa à Terra, enquanto o outro permanece na Terra.

À luz da Mecânica Clássica, o que deveria suceder é que o viajante ao regressar devia ter precisamente a mesma idade do gémeo que ficou na Terra, dado o carácter absoluto da noção da duração temporal, expresso no Grupo de Galileu na equação $t = t'$. Vejamos agora o problema à luz da Relatividade. Segundo esta teoria, para o observador que está na Terra, uma vez que o viajante está em movimento relativamente a ele, o intervalo de tempo que medeia entre dois pulsares do coração do viajante é maior que o intervalo que medeia entre dois pulsares do seu coração. Isto é, para o observador na Terra, o ritmo biológico do viajante é mais lento do que o dele; assim, segundo o ponto de vista do gémeo na Terra, o viajante quando regressar à Terra não terá a sua idade, mas será mais novo.

2. Onde Surge o Paradoxo

Estudemos agora não o ponto de vista do observador na Terra mas sim o do viajante. Segundo este, por razões de simetria, quem se está deslocando relativamente a ele não é o foguetão, mas sim a Terra. Então do mesmo modo que no caso anterior, o viajante dirá que o coração do gémeo que permaneceu na Terra bate mais devagar: isto é, o gémeo na Terra envelhece menos do que ele, pelo que, quando regressado à Terra, esperará confirmar que o gémeo da Terra será mais novo do que ele. É isto que constitui o paradoxo chamado dos gémeos ou dos relógios.

Pretende-se através do presente trabalho, mostrar que a resolução do problema no âmbito da Teoria da Relatividade Restrita é inteiramente incoerente.

III — O TRATAMENTO USUAL DO PROBLEMA NO ÂMBITO DA TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA E OPINIÃO DE ALGUNS AUTORES QUE ADOPTAM ESTE PONTO DE VISTA

O primeiro autor a referir-se ao problema foi A. Einstein, logo no artigo em que expõe as bases da Teoria da Relatividade «Sobre a electrodinâmica dos corpos em Movimento», no qual, baseado na dilatação do tempo que acabava de expôr, prevê o que devia verificar-se com dois relógios, quando um deles viaja e volta à companhia do outro. Nesta formulação do problema, Einstein não se chega a aperceber da natureza paradoxal do resultado, dada pelo facto de compararmos o ponto de vista dos observadores solidários com cada um dos relógios.

A formulação mais vulgarmente considerada, é a que utiliza por exemplo Arzeliés no seu livro «La Cinématique Relativiste» e que podemos descrever do seguinte modo. Consideremos dois relógios idênticos A e B em repouso num referencial inercial (por exemplo a Terra, que para este efeito é assim considerada) e que estão sincronizados. Em seguida, vamos acelerar o relógio A com aceleração γ até que atinja uma velocidade v em relação a B e em seguida suspendamos a aceleração de modo que A fique animado de um movimento rectilíneo e uniforme relativamente ao referencial inercial primitivo; finalmente, ao fim de certo tempo, vamos trazer novamente A ao repouso em relação ao referencial inercial primitivo (o de B). Supomos que a duração dos períodos de aceleração é desprezável relativamente à duração dos períodos em que A tem movimento uniforme. Em mecânica clássica, quando o relógio é trazido ao repouso no ponto de partida, não marcará um intervalo de tempo diferente do marcado pelo relógio em repouso nesse ponto pelo que já vimos, mas em mecânica relativista, não se passa o mesmo: «O relógio A atrasa-se constantemente em relação ao relógio fixo e quando os dois relógios voltam de novo ao repouso relativo,aquele que se deslocou em relação ao sistema próprio está atrasado relativamente ao relógio fixo B».

O atraso é dado por $\Delta T = T_B - T_A$. Pela transformação de Lorentz já vimos que se chega à conclusão de

$$T_A = T_B \sqrt{1-\beta^2}\,, \tag{8}$$

$$\text{com}\,\beta = \frac{v}{c}\,.$$

Donde

$$T_B - T_A = T_B - T_B\sqrt{1-\beta^2} =$$

$$= T_B\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)$$

ou

$$\Delta T = T_B\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)\,. \tag{9}$$

Para velocidades suficientemente pequenas, podemos fazer um desenvolvimento em série desprezando os termos de ordem superior à segunda:

$$\sqrt{1-\beta^2} = 1 - \frac{\beta^2}{2\sqrt{1-\beta^2}} + \ldots$$

ou, ainda,

$$\sqrt{1-\beta^2} \simeq 1 - \frac{\beta^2}{2} \tag{10}$$

Quer dizer

$$\Delta T \simeq T_B\left(1 - 1 + \frac{\beta^2}{2}\right)$$

ou

$$\Delta T \simeq T_B \frac{\beta^2}{2}. \tag{11}$$

Se a distância percorrida é $2l$ (medida por B), então

$$2l = vT_B \quad \text{ou} \quad T_B = \frac{2l}{v} \tag{12}$$

e

$$\Delta T = \frac{vl}{c^2}. \tag{13}$$

E, mais adiante, afirma: «Dois relógios idênticos são comparados em épocas diferentes no mesmo sistema. Nos instantes em que são comparados estão em repouso e verificamos que o seu comportamento foi diferente — não há reciprocidade — isto é, dois acontecimentos que se produzem no mesmo ponto são separados por intervalos de tempo diferentes». E, na sequência, disto escreve: «Parece que chegamos assim a um resultado contraditório com o princípio de relatividade; a experiência parece com efeito permitir decidir, qual dos relógios esteve em movimento (e é aí que reside o paradoxo). Na realidade, a experiência permite apenas saber qual dos relógios esteve sempre em repouso num referencial inercial».

Expõe o autor em seguida várias notas em que explica algumas objecções que se podem levantar. Assim afirma que «o papel da aceleração é fundamental em Relatividade Restrita, porque é ela que modifica a marcha do relógio A e é por isso que o raciocínio recíproco não é verdadeiro, visto que B não sofre nenhuma aceleração, não se tomando contudo em conta o efeito da aceleração no cálculo porque o seu período de duração é curto». Isto é, a velocidade de rotação dos ponteiros do relógio varia muito, mas como o intervalo de tempo em que isto se dá é muito pequeno, a sua posição praticamente não varia.

É claro que quando este resultado se aplica a seres humanos, por exemplo quando se substituem os relógios A e B por dois gémeos — admitindo que o próprio ser humano é um relógio biológico — chega-se à conclusão que o gémeo que fez a viagem de ida e volta deve regressar mais novo que o que ficou na Terra, dependendo a diferença de idades da velocidade de um viajante em relação ao outro e da duração da viagem.

Posição semelhante à acabada de expor é defendida por Max Born no seu livro «Teoria da Relatividade de Einstein». Refere que «se a marcha dos relógios for perturbada pela aceleração, esta acção pode manter-se suficientemente pequena tomando uma duração da viagem suficientemente longa para que a possamos desprezar». Em seguida, considera a objecção da reciprocidade do problema que resulta de ao admitirmos os dois observadores como equivalentes, tomando o ponto de vista do viajante baseado apenas na Relatividade Restrita, chegarmos a um resultado incompatível com o primeiro: isto é, para este observador quem estaria mais novo seria o gémeo que ficou na Terra visto que para ele é a Terra que se desloca relativamente a ele e, portanto, o tempo passa mais depressa no referencial dele do que na Terra. Responde deste modo a esta objecção: «Assim pensam os espíritos superficiais. O defeito deste raciocínio vê-se imediatamente. O princípio da relatividade não envolve senão sistemas animados de movimentos rectilíneos e uniformes uns em relação aos outros; e sob a forma que foi exposta ele não é aplicável aos sistemas acelerados. Ora o sistema do viajante é acelerado e portanto não é equivalente ao outro que é um referencial inercial». Deste modo, o ponto de vista do gémeo viajante, é totalmente ignorado.

Schild, considera que o problema só é paradoxal na medida em que vem alterar os nossos hábitos de pensamento e compara-o ao problema dos antípodas, afirmando: «Muitos físicos consideram que este paradoxo só pode ser resolvido com a Teoria da Relatividade Geral. Encontram nisso grande conforto porque nada sabem de Relatividade Geral e sentem que não se devem preocupar com o problema até que decidam aprender Relatividade Geral. No entanto eles estão muito enganados. O efeito dos gémeos, é certamente um efeito de ordem de grandeza que consideramos pertencer ao domínio da Relatividade Restrita. O paradoxo portanto pode e deve ser reoslvido no âmbito desta Teoria». Podemos dizer que Schild considera que nenhum efeito físico de acelração sobre os relógios pode mudar o facto de existência do «efeito dos gémeos».

É esta também a posição manifestada por Brotas no seu artigo «O Paradoxo dos Gémeos e Tempo Formal». Do mesmo modo que Schild, este autor considera que o efeito não pode ser devido às acelerações apenas, e afirma: «O atraso do relógio do observador em movimento rectilíneo e uniforme num referencial e o atraso do relógio do observador que sofre inversão de marcha e volta ao ponto inicial, um e outro são efeitos relativistas devidos à velocidade».

R. Romer ao referir a objecção da reciprocidade realça a posição privilegiada dos referenciais inerciais. Afirma nomeadamente: «Quando A (o viajante) compara a sua idade com a de B no fim da viagem, existe um efeito observável; não pode haver desacordo entre A e B acerca de quem é mais novo». Quanto a uma segunda objecção vulgarmente levantada, que consiste em afirmar que o problema não pode ser resolvido no âmbito da Teoria da Relatividade Restrita, visto um dos gémeos sofrer acelerações que vão alterar os resultados, o autor considera a questão mais difícil de resolver afirmando: «Alguns proponentes deste tipo de argumento consideram que o tratamento adequado do problema deve ser dado usando apenas a Teoria da Relatividade Restrita, mas somente se os tempos de aceleração são considerados tão pequenos que se podem desprezar. Não é claro o que se pretende significar por «tão pequenos que sejam desprezáveis» e, de facto, os tempos de aceleração não necessitam de ser pequenos».

IV — O NOSSO PONTO DE VISTA. DEMONSTRAÇÃO DE QUE A ABORDAGEM DO PROBLEMA EM RELATIVIDADE RESTRITA É INCOERENTE.

Verificou o leitor, com certeza, no decurso do que já passámos em revista acerca do tratamento do problema no âmbito da Teoria da Relatividade Restrita, que a maioria dos diversos autores que abordam deste modo o problema, não tomam conta, nem dentro deste âmbito o podiam fazer, o ponto de vista do observador viajante. Baseiam-se no facto de o referencial em que ele está em repouso não ser sempre um referencial inercial por virtude das acelerações sofridas por este observador na inversão de marcha à partida e à chegada, e, portanto, não ser aplicável neste caso a citada teoria. Baseiam-se portanto estes autores na inequivalência dos dois referenciais.

Neste parágrafo, pretendemos em nossa opinião mostrar que este tratamento do problema leva a resultados contraditórios, não resolvendo portanto o paradoxo. Para isso vamos considerar três observadores ligados a três referenciais α, δ e γ nas seguintes condições. Os referenciais δ e γ são respectivamente os referenciais em que se encontram em repouso o observador que permaneceu na Terra (A) (gémeo 2) e o viajante (gémeo 1), que relativamente a este se desloca até um ponto B com velocidade $\vec{v}$ e, invertendo o sentido do seu movimento, volta com velocidade $\vec{v}$ novamente até A. Vamos, portanto, supor que o referencial α é tal que é inercial e coincide (desprezando a aceleração inicial) com o referencial γ no trajecto inicial até ao início da aceleração para a inversão de marcha, estando, pois, a origem do referencial α animada de uma velocidade v relativamente ao referencial δ.

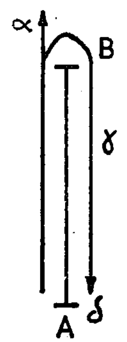

Fig. 2

Vejamos então qual o ponto de vista do observador situado em α sobre o que se passa com os gémeos 1 e 2 e comparêmo-lo com o ponto de vista do observador situado em δ, no qual o gémeo 2 está em repouso.

a) Vejamos em primeiro lugar o que se passa com o gémeo 2. Seja Δt_2 o intervalo de tempo que mediou entre a partida e a chegada para o gémeo 2 segundo o ponto de vista do observador em repouso em δ; e $\Delta t'_2$ o intervalo de tempo que mediou entre a partida e a chegada para o gémeo 2 segundo o ponto de vista do observador em repouso em α; suponhamos que d é a distância entre A e B medida no referencial δ. Então:

$$\Delta t_2 = \frac{2d}{v}, \tag{14}$$

e, por outro lado, como já vimos, quando deduzimos a fórmula da dilatação do tempo,

$$\Delta t'_2 = \frac{\Delta t_2}{\sqrt{1-\beta_2}} = \frac{2d}{v\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{15}$$

em que

$$\beta = \frac{v}{c}.$$

b) Vejamos agora o que se passa com o gémeo 1. Seja Δt_1 o tempo que mediou entre a partida e a chegada para o gémeo 1 segundo o ponto de vista do observador em repouso no referenrencial δ; e $\Delta t'_1$ o tempo que mediou entre a partida e a chegada para o gémeo 1 segundo o ponto de vista do observador em repouso em α.

Como já foi visto no decurso da discussão anterior

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 \sqrt{1-\beta^2} \, .$$

Por outro lado se for v' a velocidade de γ relativamente a α na segunda parte do processo, isto é, no regresso,

$$\beta' = \frac{v'}{c} = \frac{\dfrac{2v}{1+\beta^2}}{c} = 2\frac{\beta}{1+\beta^2} \tag{16}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \Delta t'_1 &= \frac{d}{v}\left[\sqrt{1-\beta^2} + \sqrt{(1-\beta^2)(1-\beta'^2)}\right] = \\ &= \frac{d}{v}\sqrt{1-\beta^2}\left(1+\sqrt{1-\beta^2}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Consequentemente

$$\Delta t'_1 = \frac{\Delta t_2}{2}\sqrt{1-\beta^2}\left(1+\frac{(1+\beta)(1-\beta)}{1+\beta^2}\right) .$$

Verifica-se, pois, que

$$\Delta T - \Delta T' \neq 0 \, ,$$

ou seja

$$\Delta T \neq \Delta T' \, . \tag{18}$$

Assim, usando o tratamento baseado na Teoria da Relatividade Restrita, obtemos a conclusão paradoxal de dois observadores em repouso em referenciais inerciais chegarem a resultados diferentes e, portanto, incompatíveis, acerca da diferença de idades dos dois gémeos. Vemos assim que há necessidade de utilizar outro tratamento para resolver o problema. A explicação para este resultado paradoxal, a que chegámos, reside nos efeitos que decorrem do facto do gémeo viajante sofrer acelerações, o que torna necessário proceder a um tratamento mais geral do problema baseado na Teoria da Relatividade Geral, que nos permite comparar os pontos de vista — neste âmbito equivalentes — dos dois gémeos à luz dessa Teoria.

De entre os tratamentos realizados com base na Teoria da Relatividade Geral, parecem-nos correctos os feitos por Moller e Tolman, para os quais me permito remeter os interessados neste problema.

BIBLIOGRAFIA

1 — Einstein — *Sobre a electrodinâmica dos corpos em movimento*, Anallen der Physik n.º 17, 1905 (tradução coligida no livro O Princípio da Relatividade, Ed. Fundação Gulbenkian.

2 — H. Arzeliés — La Cinematique Relativiste, Gauthier Villars, 1955.

3 — Max Born — La Theorie de La Relativité de Einstein, Gauthier-Villars, 1923.

4 — Shild — *The Clock Paradox* in the «Relativity Theory», 1950.

5 — Brotas — *O Paradoxo dos Gémeos e Tempo Formal*, Gazeta da Matemática, n.os 113-116, 1969.

6 — Romer — *Twin Paradox in Special Relativity*, American Journal of Physics, vol. 27, n.º 3, 1959.

7 — Robinson e Feenberg — *Time Dilation and Doppler Effect*, American Journal of Physics, 1957.

8 — Langevin — *L'Évolution de l'Espace et du Temps*, Scientia, t. X, 1911.

9 — Paul Couderc — *La Relativité*, col. «Que sais je», PUF, 1966.

10 — R. Dugas — Histoire de la Mécanique, Dunod, 1950.

11 — Tolman — *Relativity Thermodinamics and Cosmology*, Oxfcrd Press, 1954.

12 — Møller — *The Theory of Relativity*, Oxford Press, 1952.

13 — Mikail — *The Relativistic Clock Problem*, Proc. Camb. Phil. Soc., t. 48, 1952.

14 — Sherwin — *Some Recent Experimental Tests of the Clock Paradox*, Physical Revue, vol. 120, n.º 1, 1960.

15 — Weinberg — Gravitation and Cosmology, John Wiley, 1972.

16 — Bergman — Introduction to the Theory of Relativity, Prentice-Hall, 1950.

17 — P. Macedo — O Paradoxo dos Relógios em Teoria da Relatividade, Monografia da Licenciatura, Coimbra, 1976.