

em que n é a densidade do plasma (número de partículas por unidade de volume).

Ora os valores de n não excedem os 10^{14} (densidade inferior por um factor de 10^6 à densidade do ar a P. T. N.), o que dá para τ o seguinte limite inferior aproximado:

$$\tau > 1 \text{ s.}$$

Até agora os melhores valores que se conseguiram experimentalmente são da

ordem dos 10^{-2} s estando-se, portanto, ainda abaixo do limite de Lawson por um factor de, pelo menos, 10^2 .

A geometria do confinamento será provavelmente toroidal, havendo já algum trabalho teórico (bastante recente) em que é encarado o uso de supermagnetes na produção do campo magnético, numa tal geometria.

[1] J. REECE ROTH, Rev. Sci. Inst. 36 n.º 10 (1965) p. 1481-1485.

Problema estatístico associado à detecção de radiações Referência à radiação X e gama

por DIRCE MILHEIRO CALDAS GUIMARÃES

(Equiparada a bolsreira no País. Bolsreira do I. A. C.)

A detecção de radiação X, bem como de radiações de origem nuclear, tem como fundamento a interacção da radiação com a matéria.

Actualmente, a espectrometria de raios X e a de raios gama assenta quase inteiramente em duas espécies de sistemas detectores — os detectores de cintilação e os detectores de semiconductor.

Faz-se a seguir uma breve referência a cada um destes tipos de detectores para se verificar que dão origem a perturbações aleatórias — a somar a uma grandeza a medir que por si apresenta já uma distribuição estatística e não um valor bem determinado.

Por último indica-se o modo de corrigir a perturbação introduzida pelo detector nos resultados experimentais.

1. Detectores de cintilação

Os raios X, ou os raios gama, na passagem através do meio material que constitui essencialmente o detector, trans-

ferem parte ou toda a sua energia para electrões (por efeito fotoeléctrico ou por efeito Compton). Por sua vez, estes electrões dissipam a sua energia por excitação de átomos ou moléculas do meio. Designa-se por cintilador o meio material em que se dá esta interacção; pelo facto de ser luminescente, ele é também muitas vezes denominado «phosphor», visto se dar emissão de radiação electromagnética no processo de retorno de moléculas ou átomos às condições iniciais, após terem sofrido excitação.

Os fotões assim produzidos vão incidir num cátodo fotossensível que faz parte de um fotomultiplicador.

Este dispositivo é constituído por dois sistemas electrónicos montados na mesma unidade: (a) o referido cátodo fotossensível que converte os fotões em fotoelectrões; (b) um tubo multiplicador onde o número de electrões é repetidamente multiplicado por emissão secundária a partir de eléctrodos que se denominam dínodos. Dez a catorze dínodos sucessivos

multiplicam o número de electrões por um factor da ordem de 10^5 — 10^8 e, finalmente, um impulso de tensão é recebido no ânodo.

Como factor de perturbação no processo de transmissão de energia citamos o ruído do fotomultiplicador; trata-se de uma distribuição de impulsos, observada na ausência de radiação incidente no detector, e que resulta de electrões solitários que atingem o primeiro dínodo, sendo particularmente importante a emissão termiónica.

No seu vasto campo de aplicação, utilizam-se cintiladores orgânicos e inorgânicos. (Observe-se que este tipo de aparelhos é também utilizado na espectrometria de partículas materiais altamente ionizantes e de raios beta). Os iodetos de sódio e césio activados com tálio são particularmente adequados à detecção de raios X e gama porque têm uma elevada eficiência para detecção fotoeléctrica.

2. Detectores de semiconductor

Pode considerar-se um detector de semiconductor como o equivalente, no estado sólido, ao detector por ionização gasosa.

Radiação gama, radiação X ou partículas carregadas perdem energia na interacção com o meio que constitui o detector. Estas interacções levam electrões da banda de valência, ou electrões mais profundamente ligados, para a banda de condução. Os electrões de mais elevada energia interactuam com outros electrões e depois de um intervalo de tempo muito curto, da ordem de 10^{-12} s, é atingida uma situação estacionária quando a banda de condução fica totalmente preenchida. Um campo eléctrico orienta estas cargas através do material, de modo que é obtido um impulso eléctrico que permite detectar e medir a radiação incidente.

A vantagem da utilização dos detectores de semiconductor reside na mais elevada resolução em energia. É da ordem de 3 eV a energia necessária para a produção de um par electrão-lacuna positiva num detector de semiconductor, enquanto que no caso de um detector por ionização gasosa são necessários cerca de 30 eV para criar um par electrão-ião positivo. Nos detectores de cintilação, a transferência de energia através do processo de cintilação é relativamente ineficiente: são necessários cerca de 300 eV para criar um fotoelectrão no fotocátodo.

A recolha completa da carga produzida pela radiação não é um problema simples. Além disso, a aplicação de um campo eléctrico ao detector provoca a orientação de electrões móveis, excitados termicamente, e que são arrastados pelo campo eléctrico do mesmo modo que os electrões produzidos pela radiação.

Para que este efeito resulte desprezável é exigido um semiconductor quase intrínseco com um suficiente intervalo de banda proibida. Com um tal material, o funcionamento do detector a uma temperatura suficientemente baixa, reduz a densidade dos transportadores de carga gerados termicamente a um valor insignificante.

O facto de, até agora, o germânio e o silício serem os únicos materiais utilizados para a construção de contadores de ionização do estado sólido resulta da pureza e da perfeição cristalina com que esses materiais são actualmente obtidos.

3. Correção dos resultados experimentais. Convolução de distribuições

Uma determinada radiação X ou gama detectada apresenta uma repartição de intensidade em torno de um comprimento

de onda λ_0 para o qual a intensidade é máxima.

Na figura indica-se a «largura a meia altura», $\Delta\lambda$, da risca que supomos observada.

A risca emitida não é monocromática, mas uma parte da largura experimentalmente medida é devida aos efeitos de alargamento dos aparelhos utilizados.

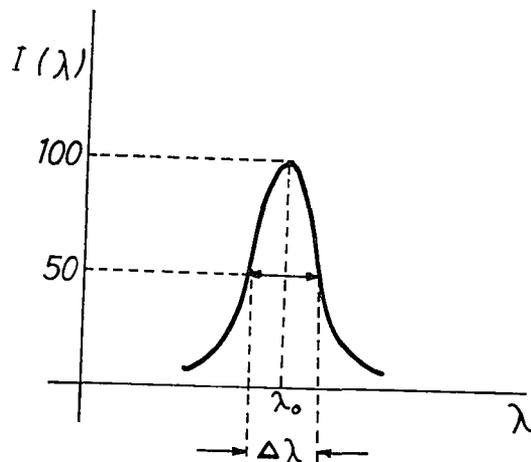


fig.1

Aquilo que pretendemos determinar é o que chamamos a *largura verdadeira* de uma risca espectral: a que nos seria dada por um dispositivo ideal com um efeito de alargamento nulo.

Analisemos, do ponto de vista estatístico, o problema em causa. Obtemos experimentalmente valores de uma variável aleatória que corresponde à soma de duas outras — a distribuição «verdadeira», expressa em comprimentos de onda, da risca observada e a distribuição introduzida pelo instrumento de medida. Pretendemos deduzir os valores «verdadeiros» dos valores medidos experimentalmente.

a) *Distribuição de uma variável aleatória.*

Consideremos a variável aleatória X e um número real x , que pode assumir

qualquer valor entre $-\infty$ e $+\infty$, e estudemos a probabilidade do acontecimento $X < x$.

Esta probabilidade é uma função de x e denomina-se a função distribuição de X

$$(1) \quad F(x) = P(X < x).$$

Têm especial interesse as funções distribuição $F(x)$ que são contínuas e possuem derivada.

A primeira derivada

$$(2) \quad f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$

chama-se a função densidade de probabilidade de X .

Note-se que

$$(3) \quad \begin{aligned} dF(x) &= f(x) dx = F(x+dx) - F(x) = \\ &= P(X < x+dx) - P(X < x) = \\ &= P(x \leq X < x+dx). \end{aligned}$$

No limite, $x \rightarrow \infty$, teremos

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} P(X < x) = 1.$$

No limite, $x \rightarrow -\infty$, teremos analogamente

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P(X < x) = 0.$$

(Observe-se que

$$P(X \geq x) = 1 - F(x) = 1 - P(X < x)$$

ou

$$P(X < x) = 1 - P(X \geq x).$$

Sendo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(X \geq x) = 1$$

teremos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} P(X < x) = \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} P(X \geq x) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Poderemos escrever

$$(6) \quad P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

e também

$$(7) \quad P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx = \\ = F(b) - F(a).$$

Temos ainda o resultado, atendendo a (4) e (5),

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = [F(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

b) *Função distribuição e densidade de probabilidade de duas variáveis aleatórias.*

Consideremos agora a probabilidade de ser simultaneamente $X < x$ e $Y < y$, problema de significado idêntico ao considerado para uma variável.

Em casos de interesse prático verificam-se sempre as condições para a existência de uma função distribuição F tal que

$$(9) \quad F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Se F é uma função continua de x e y , a densidade de probabilidade das duas variáveis X e Y associadas é

$$(10) \quad f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} F(x, y).$$

Então

$$(11) \quad P(a \leq X < b, c \leq Y < d) = \\ = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy.$$

Pode dar-se o caso de só ser de interesse o comportamento de X .

Integramos (11) ao longo de todo o campo de variação de y e obtemos

$$P(a \leq x < b, -\infty < y < \infty) = \\ = \int_a^b \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b g(x) dx$$

sendo

$$(12) \quad g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

$g(x)$ é a densidade de probabilidade de x e denomina-se distribuição marginal de X .

A correspondente distribuição marginal de Y é

$$(13) \quad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

As variáveis aleatórias X e Y dizem-se independentes se

$$(14) \quad f(x, y) = g(x) \cdot h(y).$$

c) *Convolução de distribuições.*

Voltemos ao problema de detecção de radiações que estamos a considerar.

Designemos por X a variável aleatória associada à distribuição «verdadeira» de determinada radiação incidente no detector e por Y a variável aleatória associada ao processo de detecção dessa radiação.

A distribuição detectada corresponderá a uma variável aleatória que é a soma das variáveis X e Y .

$$(15) \quad U = X + Y.$$

As variáveis aleatórias X e Y são independentes. A densidade de probabilidade das duas variáveis associadas será dada, atendendo a (14), pelo produto

$$(16) \quad f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y).$$

A função distribuição de U será

$$(17) \quad F(u) = P(U < u) = P(X + Y < u).$$

Para a calcularmos podemos servir-nos do seguinte diagrama auxiliar

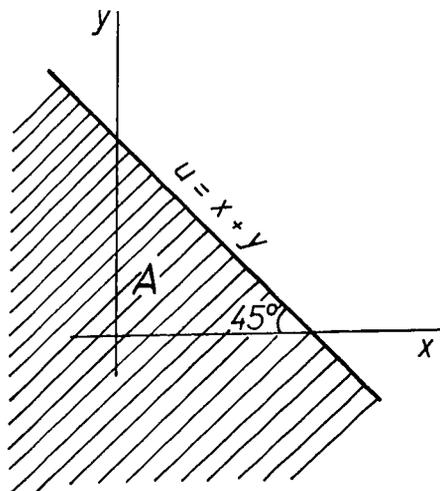


fig. 2

estendendo o integral da equação (16) à área tracejada.

Vem

$$\begin{aligned} F(u) &= \int \int_A f_x(x) \cdot f_y(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx \int_{-\infty}^{u-x} f_y(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y) dy \int_{-\infty}^{u-y} f_x(x) dx. \end{aligned}$$

A densidade de probabilidade é então obtida por diferenciação de $F(u)$

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{dF(u)}{du} = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \cdot f_y(u-x) dx = \\ (18) \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y) \cdot f_x(u-y) dy. \end{aligned}$$

Estas expressões designam-se por «folding integrals» por estabelecerem a forma que assume a densidade de probabilidade

correspondente à soma ou junção de duas variáveis aleatórias. Os integrais (18) constituem a *convolução* das distribuições das variáveis X e Y .

Pretendemos conhecer a distribuição da variável aleatória X , isto é, a distribuição da intensidade de dada radiação antes da perturbação introduzida pelo detector.

Experimentalmente, determinamos a distribuição da variável aleatória U , a soma das variáveis X e Y , correspondendo Y à perturbação inerente ao instrumento de medida.

A equação (escolhemos o primeiro dos integrais (18))

$$(19) \quad f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \cdot f_y(u-x) dx$$

é uma equação integral de Fredholm da 1.^a espécie.

Atribuem-se às funções f_x e f_y formas indicadas por estudos prévios, tanto teóricos como experimentais, da forma das riscas espectrais e da resposta fornecida pelo detector.

A partir de (19), mediante soluções aproximadas com intervenção de computador, calculam-se os valores da variável X que correspondem a valores experimentais da variável U .

Assim é corrigida, tanto quanto possível, a perturbação inerente à presença do detector e ao seu poder de resolução finito.

REFERÊNCIAS

- BIRKS, J. B., *The Theory and Practice of Scintillation Counting*, Pergamon Press, New York, 1964.
- DEARNALEY, G., and NORTHROP, D. C., *Semiconductor Counters for Nuclear Radiation*, EFN Spon., London, 1966.
- BRANDT, SIEGMUND, *Statistical and Computational Methods in Data Analysis*, North-Holland Publish. Comp., London, 1970.
- M. PAGANINI FIORATTI and S. RICCI PIERMATTEI, *Nucl. Inst. & Meth.* **98** (1972) 131-134.