GAZETA DE FÍSICA

Vol. V, Fasc. 6 Agosto de 1972

Representação gráfica, um instrumento de trabalho

por EDUARDO MARTINHO

Introdução

Ao pretender-se tirar conclusões de natureza quantitativa, ou simplesmente qualitativa, sobre a dependência relativa de duas ou mais grandezas, há muitas vezes interesse em traduzir os resultados numéricos de que se disponha sob a forma de gráficos. Com efeito, a representação gráfica de resultados numéricos, além de pôr em destaque os aspectos característicos da dependência entre as grandezas com mais evidência do que a leitura do correspondente conjunto de valores, permite, quando se trate de resultados experimentais, uma análise numérica rápida e relativamente precisa de muitos problemas.

Importa salientar que a representação gráfica, como instrumento de trabalho valioso, tem um campo de aplicação mais vasto e diferenciado, impossíxel de abarcar em meia dúzia de páginas. O recurso à representação gráfica e esquemática como meio de fomentar uma maior «aproximação» entre os nossos estudantes e a fenomenologia física de base, é um exemplo de domínio que teria grande interesse desenvolver.

A informação que se pode obter de um gráfico é tanto mais completa e significativa quanto mais funcional e objectivo for o gráfico. Para que um gráfico desempenhe convenientemente a sua função, torna-se necessário seguir determinadas normas. Com o presente artigo pretende-se precisamente salientar algumas regras básicas a respeitar no traçado de gráficos, assim como chamar a atenção do leitor para aspectos relevantes da utilização de gráficos, em particular no que se refere a processos de linearização. Finalmente, para concretizar ideias, apresenta-se um exemplo de análise gráfica de resultados experimentais.

Normas

Suponhamos que se tem um conjunto de valores numéricos respeitantes à variação de y com x (x designa a variável independente e y a variável dependente), e que se pretende representá-lo gràficamente. As normas mais importantes a que deve obedecer em geral o traçado do gráfico, são as seguintes:

1. É conveniente marcar os valores de x em abcissas e os valores de y em ordenadas. Junto dos respectivos eixos deve caracterizar-se as grandezas em

causa (mediante uma palavra ou conjunto de palavras e/ou símbolo da grandeza) e deve indicar-se também as unidades em que estão expressas essas grandezas.

2. As escalas devem ser escolhidas de acordo com a gama de valores numéricos das variáveis, sem esquecer no entanto o que se pretende com o gráfico (por exemplo, as escalas lineares não têm que começar necessàriamente em *zero*, mas se se pretender verificar se os pontos experimentais definem uma linha passando pela origem do referencial, isto é, pelo ponto (0;0), então é óbvio que este ponto deve figurar no gráfico). Se as escalas forem demasiado amplas, os pontos experimentais aparecerão muito dispersos e poderá haver dificuldade na definição visual da linha que melhor se ajusta ao conjunto desses pontos. Se as escalas forem demasiado compactas, a concentração excessiva dos pontos experimentais poderá eventualmente mascarar uma variação particular que interessaria evidenciar.

Em geral, ao fixar as escalas de um gráfico, haverá pois conveniência em estabelecer um compromisso entre o número de algarismos significativos a considerar na marcação dos pontos experimentais, a dispersão relativa destes pontos e o próprio tamanho do gráfico. Isto exige um certo sentido de equilíbrio que se adquire fundamentalmente pela prática. Ainda assim, com frequência o «melhor» gráfico não resulta à primeira tentativa.

Quando se utiliza papel com escala(s) linear(es), há também que fixar as escalas por forma a poder-se interpolar fàcilmente os valores, tanto na marcação dos pontos experimentais como na leitura do gráfico. Por exemplo, é incómodo trabalhar com uma escala milimétrica em que se fez corresponder 1 unidade a 3 centímetros: 1 milímetro da escala ficará a corresponder a 0,0333... dessa unidade, o que, òbviamente, é indesejável.

3. Nos eixos deve indicar-se exclusivamente os valores que caracterizam as escalas (não se deve indicar nos eixos os valores numéricos dos pontos a marcar, nem tão pouco desenhar as linhas em cujo cruzamento se situa o ponto experimental a assinalar).

4. Para marcar um par de valores $(x; y)$ num gráfico, basta assinalá-lo mediante um pequeno símbolo (cruz, circunferência, quadrado, triângulo, etc.). Tornando-se necessário traçar mais do que uma curva num mesmo gráfico, os pontos de cada conjunto de valores numéricos devem ser sinalizados com símbolos diferentes, especialmente se houver uma sobreposição de curvas que dificulte a a sua individualização visual.

5. Ao traçar a linha que melhor se ajusta aos pontos experimentais, não se deve «pretender» que ela passe necessàriamente por todos os pontos. Deve haver fundamentalmente a preocupação de ajustar a linha mais simples que melhor traduza a dependência global relativa das grandezas em causa. É que: 1) na prática não é possível obter medidas *exactas*, isto é, a um ponto experimental está sempre associada uma margem de erro maior ou menor, portanto é de esperar uma certa dispersão dos pontos em torno da curva que traduz a lei subjacente; 2) em consequência, no ajuste de curvas a pontos experimentais, convirá começar por admitir a existência de relações simples entre as grandezas (é a Natureza, na sua complexidade, que nos aponta este caminho preferencial, o da simplicidade!).

6. Todo o gráfico deve ter uma legenda que o identifique e esclareça completamente (neste particular, é preferível

pecar por excesso de pormenores do que por defeito). É habitual colocar a legenda sob o eixo das abcissas ou num espaço (suficientemente) livre do próprio gráfico.

Como eventual utilizador de gráficos, caberá òbviamente ao leitor usar o seu sentido crítico com vista à melhor adaptação das normas enunciadas (ou outras similares) à resolução do seu problema específico. As normas são boas enquanto servem o utilizador, mas são de adaptar ou de substituir quando o limitam inconsequentemente...

Tipos de papel. Linearização de gráficos

No parágrafo anterior chamou-se a atenção para a conveniência de escolher as escalas em função da gama dos valores numéricos a representar gràficamente. Isto pressupõe complementarmente uma escolha prévia do tipo de papel mais adequado ao traçado do gráfico em causa: com duas escalas lineares (papel milimétrico), com uma escala logarítmica e outra linear (papel semilog ou log-lin), com ambas as escalas logarítmicas (papel log--log), etc. As folhas de papel de gráfico podem ter vários formatos: A5, A4 (21 cm × 30 cm), A3, etc. As escalas logarítmicas podem ter várias décadas, completas ou não. De notar que uma escala logarítmica nunca pode começar em zero, pois $\log 0 = ln\, 0 = -\infty$.

O tipo de papel de gráfico que se usa mais frequentemente é o papel milimétrico, mas em certos casos convém utilizar outros. Vejamos alguns desses casos, a título de exemplo.

a) Quando a relação entre as variáveis x e y é de tipo exponencial (como a evolução temporal da actividade de uma fonte radioactiva, a variação da intensidade de um feixe de radiação com a espessura de um absorvente, etc.), isto é,

$$(1) \qquad y = y_0\, e^{\alpha x} \qquad (\alpha \neq 0),$$

e se pretende, a partir de um conjunto de valores experimentais, determinar α e/ou y_0, convirá fazer o gráfico em papel semilog. Com efeito, logaritmizando a expressão (1), tem-se [1]

$$(2) \qquad ln\, y = ln\, y_0 + \alpha x;$$

assim, em papel semilog, e marcando y na escala logarítmica, o gráfico de (1) é uma recta cujo declive vale α e cuja ordenada na origem vale y_0. Como fàcilmente se vê, o valor de α é dado por

$$\alpha = \frac{ln\, y_2 - ln\, y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ln\,(y_2/y_1)}{x_2 - x_1} = \frac{2{,}3026 \log (y_2/y_1)}{x_2 - x_1},$$

em que $(x_1 ; y_1)$ e (x_2 , y_2) são dois pontos da recta ajustada aos pontos experimentais.

Em papel milimétrico o gráfico de (1) seria evidentemente o de uma exponencial, e a determinação de α e/ou y_0 seria menos rápida e provàvelmente menos precisa. O interesse em linearizar um gráfico reside precisamente no facto de ser mais fácil «trabalhar» com uma linha recta do que com uma linha curva.

Para o leitor menos familiarizado com escalas logarítmicas, convirá talvez acrescentar o seguinte. É de notar que a relação (2) pode escrever-se sob a forma

$$(3) \qquad z = z_0 + \alpha x,$$

com $z = ln\, y$ e $z_0 = ln\, y_0$, que é visìvelmente a equação da recta referida.

(1) Pode aplicar-se indiferentemente logaritmos decimais ou naturais, porque diferem apenas por um factor constante.

Tem-se assim que a marcação directa de um valor de y, por exemplo y^*, na escala logarítmica, é equivalente à marcação do valor $z^* = ln\, y^*$ numa escala linear. Em qualquer dos casos a marcação dos pontos segundo a escala logarítmica é feita com base em segmentos de recta de comprimento proporcional aos logaritmos dos valores correspondentes a esses pontos. A vantagem de utilizar a escala logarítmica deriva de não ser necessário calcular logaritmos para atingir o fim desejado, a linearização do gráfico, dado que nessa escala a distribuição dos valores obedece já à devida proporcionalidade (logarítmica). A marcação dos pontos segundo a escala linear (valores de x) é evidentemente feita com base em segmentos de recta de comprimento proporcional aos próprios valores (de x) correspondentes a esses pontos.

b) Convém também utilizar papel semilog quando é muito vasta a gama de valores a marcar num dos eixos coordenados. Se, por exemplo, y representar o fluxo de neutrões térmicos (com energias da ordem de três dezenas de meV) num ponto de um meio, como a água, e x designar a distância desse ponto à fonte de neutrões, os valores de y podem variar de 4 ordens de grandeza (de 10^5 a 10 neutrões $cm^{-2}\, s^{-1}$, por exemplo) enquanto x varia apenas de 1 a 25 cm. Num caso como este, os valores de y devem ser marcados numa escala logarítmica e os valores de x numa escala linear. Se se fizesse o gráfico em papel milimétrico, mesmo fazendo corresponder a 1 mm 100 neutrões $cm^{-2}\, s^{-1}$, seria necessária uma folha de papel com 1 m de comprimento, o que é pouco prático.

c) Se compreenderem várias ordens de grandeza as gamas de valores a marcar tanto em ordenadas como em abcissas, vê-se agora fàcilmente que há conveniência em utilizar papel com ambas as escalas logarítmicas, para reduzir o gráfico a proporções convenientes. É o que acontece, por exemplo, quando se pretende representar gràficamente a secção eficaz de absorção (ou de outro processo nuclear) de certos núcleos para neutrões com energias compreendidas entre uma dezena de meV e alguns MeV (espectro neutrónico de um reactor nuclear térmico).

d) Vejamos uma outra situação, de natureza diferente, em que se deve empregar papel log-log. Em física é necessário com frequência verificar experimentalmente relações do tipo

$$y = k \cdot x^{\beta}, \tag{4}$$

em que β e/ou k são constantes (reais, quaisquer) a determinar. Logaritmizando a expressão (4), tem-se

$$\log y = \log k + \beta \log x. \tag{5}$$

Assim, a dependência de y com x em papel log-log traduz-se gràficamente por uma recta de declive igual a β (2). De notar que, como as escalas são idênticas no papel log-log, os seus eixos coordenados são do tipo dos do chamado «círculo trigonométrico», e β pode ser determinado mediante a razão dos comprimentos dos catetos de um triângulo rectângulo desenhado convenientemente sobre o gráfico. A outra maneira de calcular β é análoga à indicada na alínea *a*), tendo agora em conta a expressão (5):

$$\beta = \frac{\log (y_2/y_1)}{\log (x_2/x_1)}.$$

É possível ainda linearizar o gráfico correspondente à expressão (4) por outra

(2) Em linguagem corrente é usual dizer-se que «é linear a dependência de y com x em papel log-log». No caso da expressão (1) dir-se-à que «é linear a dependência de y com x em papel semilog». É claro que em ambos os casos a dependência de y com x *não é* linear; os pontos $(x; y)$ é que se distribuem linearmente em cada um dos gráficos.

via: marcando, em papel milimétrico, y em ordenadas e x^{β} em abcissas. Neste caso β funciona como parâmetro conhecido e k representa o declive da recta.

Como se vê, dado um conjunto de valores experimentais e conhecida a forma da lei de variação das grandezas em causa, pela conjugação dos dois processos de linearização indicados acima é possível inferir os valores dos parâmetros da lei, β e k no caso da expressão (4).

Exemplo de análise gráfica dos resultados de uma experiência

I) Dados. Objectivo

Na tabela 1 indicam-se os resultados de uma experiência [3] sobre o tempo que a água contida num recipiente leva a escoar-se através de um orifício feito no

Tabela 1 — Tempo de escoamento, t (s)

d (cm) ↓ \ h (cm) →	30	10	4	1
1,5	73,0	42,0	26,7	13,5
2	41,2	23,7	15,0	7,2
3	18,4	10,5	6,8	3,7
5	6,8	3,9	2,2	1,5

fundo do recipiente. Naturalmente o tempo de escoamento depende do tamanho do orifício e da quantidade de água contida no recipiente. Para deduzir a dependência do tempo de escoamento com o tamanho do orifício, tomaram-se quatro recipientes cilíndricos de água com iguais dimensões e esvaziaram-se através de aberturas circulares com diferentes diâmetros. Para determinar a dependência do tempo de escoamento com a quantidade de água, esvaziaram-se os mesmos recipientes com diferentes alturas de água.

(3) Guia do laboratório, PSSC.

O problema que se pretende resolver é o seguinte: qual a relação matemática entre o tempo de escoamento, t, o diâmetro do orifício, d, e a altura de água, h? Como t é variável dependente e d e h são as variáveis independentes, o problema pode pôr-se equivalentemente nos seguintes termos: com base nos resultados experimentais contidos na Tabela 1, estabeleça gràficamente a relação $t = f(h, d)$.

II) Análise dos dados. Resultado final

Para se ter uma ideia do tipo de dependência entre o tempo de escoamento e a altura de água, podemos começar por fazer um gráfico em papel milimétrico de t em função de h, para um valor constante do diâmero do orifício ($d = 1{,}5$ cm, por exemplo, dado que lhe correspondem valores mais elevados de t, sobre os quais portanto deverá ser menor a incidência de erros experimentais). Este gráfico está representado na figura 1. Repare-que o ponto (0;0) pertence à curva; de facto, para $h = 0$ cm tem-se $t = 0$ s.

O gráfico sugere-lhe algum tipo de dependência entre t e h? No caso negativo, rode o gráfico de 90°. Não lhe parece que a curva é de tipo parabólico? Se assim for [4], $h \propto t^2$, ou seja, $t \propto h^{1/2}$. Como não sabemos se o expoente de h vale exactamente $\frac{1}{2}$, escrevamos $t \propto h^{\alpha}$, sendo α uma constante a determinar.

Se $t \propto h^{\alpha}$, então a dependência de t com h em papel log-log deve traduzir-se

(4) $\propto$ é um símbolo que significa «proporcional a».

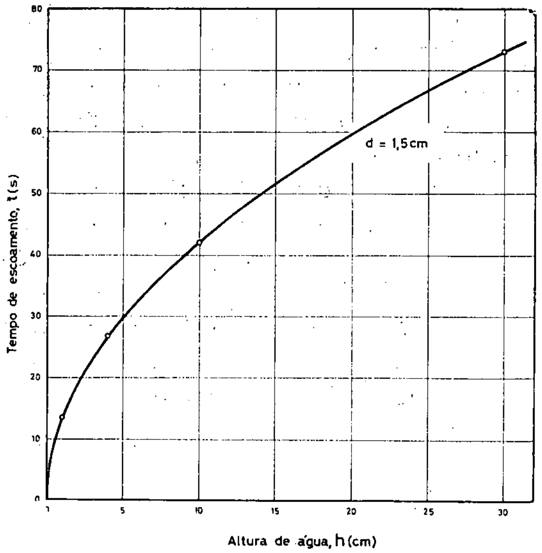

Fig. 1 — Dependência típica do tempo de escoamento com a altura de água. Os pontos experimentais correspondem ao diâmetro do orifício $d = 1{,}5$ cm.

gràficamente por uma recta de declive α. Na figura 2 representa-se este gráfico, para

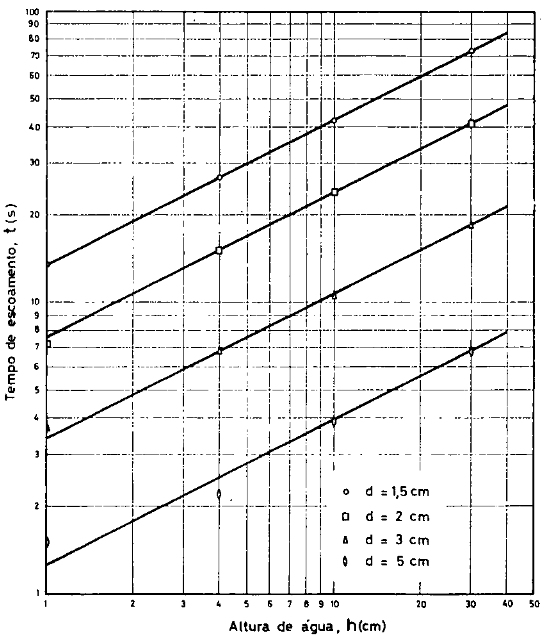

Fig. 2 — Variação do tempo de escoamento com a altura de água, em papel log-log, para os diferentes valores do diâmetro do orifício. O declive das rectas ajustadas aos pontos experimentais vale 1/2, portanto $t \propto \sqrt{h}$.

os diferentes valores de d. As rectas que melhor se ajustam aos quatro conjuntos de pontos experimentais têm de facto declive igual a $\frac{1}{2}$, como se admitiu face à figura 1. Em resumo:

$$t \propto \sqrt{h}. \tag{6}$$

NOTA. Como certamente já reparou, a dispersão dos pontos experimentais em torno das rectas ajustadas é maior para valores de d mais elevados, isto é, para valores de t mais baixos. Isto deve-se fundamentalmente à natureza das escalas logarítmicas. Com efeito, a um mesmo desvio absoluto do ponto experimental (em relação ao ponto de igual abcissa da recta ajustada) correspondem distâncias diferentes consoante a zona da escala em que figurar o ponto experimental. Por exemplo, se a um desvio de 0,5 s corresponder um afastamento de 1 mm na zona da escala entre 9 e 10 s, ao mesmo desvio corresponderá um afastamento da ordem de 7 mm na zona da escala compreendida entre 1 e 2 s. O leitor poderá confirmar estes valores, efectuando medições adequadas sobre a figura 2.

Investiguemos agora a dependência do tempo de escoamento com o diâmetro do orifício. Pelas razões apontadas acima, façamos um gráfico em papel milimétrico de t em função de d, para $h = 30$ cm (Fig. 3). Verifica-se que t decresce bastante acentuadamente quando d aumenta, o que sugere uma relação inversa ($t \propto d^{-\beta}$) ou exponencial ($t \propto e^{-\gamma d}$).

Que o decrescimento não é exponencial pode verificar-se fazendo o gráfico de t em função de d, em papel semilog (Fig. 4): a dependência não é linear.

Para averiguar se $t \propto d^{-\beta}$, façamos um gráfico de t em função de d, em papel log-log. Na figura 5 representa-se este gráfico, para os diferentes valores de h

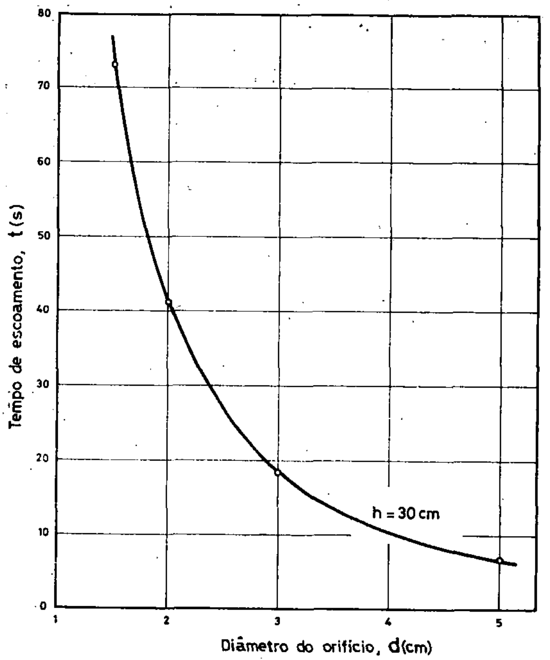

Fig. 3 — Dependência típica do tempo de escoamento com o diâmetro do orifício. Os pontos experimentais correspondem à altura de água $h = 30$ cm.

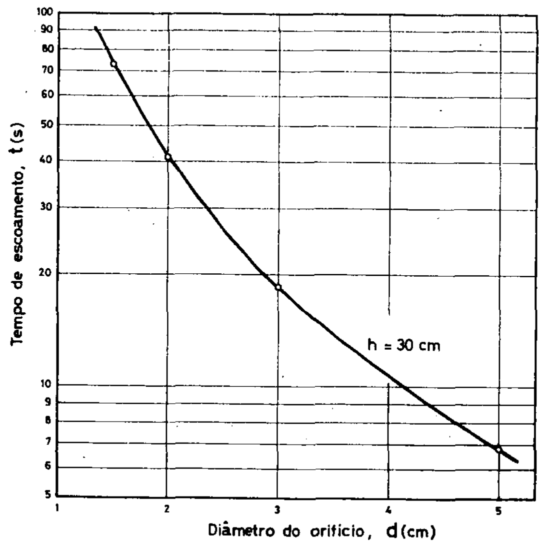

Fig. 4 — Variação do tempo de escoamento com o diâmetro do orifício em papel semilog, para um valor constante da altura de água ($h = 30$ cm). A dependência não é linear, portanto o tempo de escoamento não varia exponencialmente com o diâmetro do orifício.

A dependência é linear; o declive das rectas que melhor se ajustam aos pontos experimentais vale -2. Tem-se assim que:

$$t \propto \frac{1}{d^2}. \tag{7}$$

Repare-se que $t \propto d^{-2}$ equivale a $t \propto A^{-1}$ designando A a área do orifício. Na realidade era de admitir que o tempo de escoamento estivesse relacionado de uma

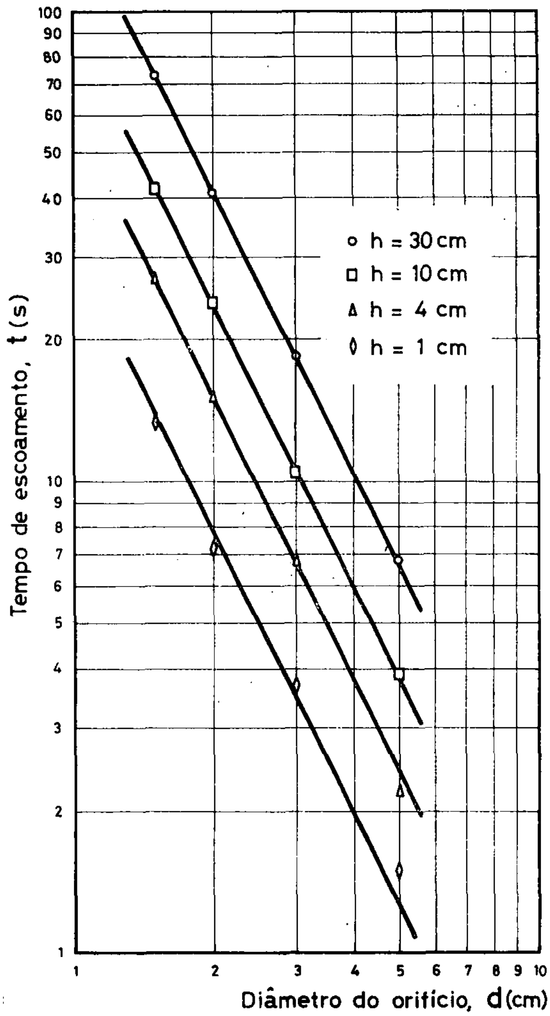

Fig. 5 — Variação do tempo de escoamento com o diâmetro do orifício, em papel log-log, para os diferentes valores da altura de água. O declive das rectas ajustadas aos pontos experimentais vale -2, portanto $t \propto d^{-2}$.

maneira simples com a área do orifício, porque, quanto maior é esta área, maior é o fluxo de água no escoamento.

Atendendo a que as relações (6) e (7) se verificam simultâneamente, tem-se que $t \propto h^{1/2} \cdot d^{-2}$, ou seja

$$t = k \frac{\sqrt{h}}{d^2}, \tag{8}$$

designando k a constante de proporcionalidade. Para determinar esta constante podemos representar gràficamente, em papel milimétrico, t em função da variável $z = \sqrt{h} \cdot d^{-2}$ (Fig. 6). Obtém-se uma recta de declive $k = 30{,}0\ \mathrm{cm^{3/2}s}$ passando pela origem. De notar que este valor é válido para os recipientes em causa e para o escoamento de água. Se a experiência tivesse sido realizada com um líquido de viscosidade diferente, o valor de k seria diferente daquele.

Em conclusão: a solução do problema que nos propusemos resolver gràficamente traduz-se por

$$t = 30{,}0 \frac{\sqrt{h}}{d^2}. \tag{9}$$

A partir desta relação podemos agora predizer os resultados que se obteriam se realizássemos a experiência em condições distintas das que conduziram aos resultados donde partimos (Tabela 1). É previsível, por exemplo, que o tempo de escoamento de uma altura de água igual a 20 cm por um orifício de diâmetro 4 cm, seja da ordem de 8,4 s, isto evidentemente para um recipiente cilíndrico igual ao utilizado na experiência. Se o diâmetro do recipiente fosse diferente, é óbvio que o tempo de escoamento seria diferente de 8,4 s. Como se vê, o problema comporta mais variáveis do que as indicadas na Tabela 1.

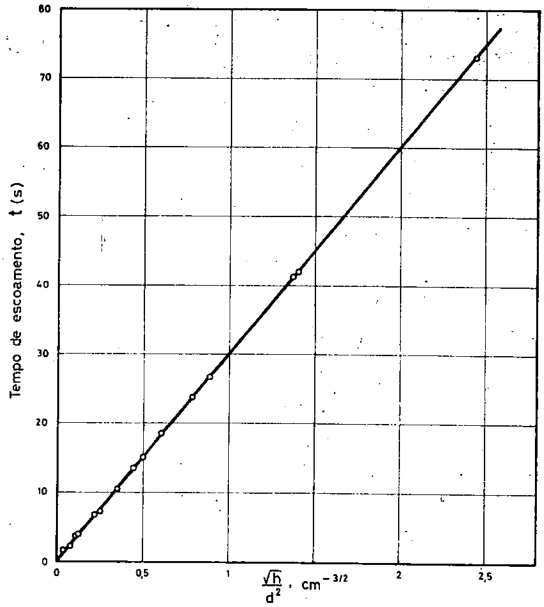

Fig. 6—O tempo de escoamento varia linearmente com $\sqrt{h} \cdot d^{-2}$. O declive da recta ajustada aos pontos experimentais vale $30{,}0\ \mathrm{cm^{3/2}\,s}$; este é o valor da constante de proporcionalidade k referida no texto [expressão (8)].

Resolução de circuitos eléctricos

pelo Eng.º P. Martins da Silva
(Laboratório de Física da Faculdade de Ciências de Lisboa)

1. Introdução

A resolução de um circuito electrico, traduzida no cálculo das intensidades das correntes que percorrem os seus diversos ramos, é, em geral, trabalhosa, obrigando à aplicação repetida das leis físicas que regulam a circulação das correntes pelos diversos ramos do circuito. Mediante o método que se descreve, o problema físico