maneira simples com a área do orifício, porque, quanto maior é esta área, maior é o fluxo de água no escoamento.

Atendendo a que as relações (6) e (7) se verificam simultâneamente, tem-se que $t \propto h^{1/2} \cdot d^{-2}$, ou seja

$$t = k \frac{\sqrt{h}}{d^2}, \tag{8}$$

designando k a constante de proporcionalidade. Para determinar esta constante podemos representar gràficamente, em papel milimétrico, t em função da variável $z = \sqrt{h} \cdot d^{-2}$ (Fig. 6). Obtém-se uma recta de declive $k = 30{,}0\,\text{cm}^{3/2}\text{s}$ passando pela origem. De notar que este valor é válido para os recipientes em causa e para o escoamento de água. Se a experiência tivesse sido realizada com um líquido de viscosidade diferente, o valor de k seria diferente daquele.

Em conclusão: a solução do problema que nos propusemos resolver gràficamente traduz-se por

$$t = 30{,}0 \frac{\sqrt{h}}{d^2}. \tag{9}$$

A partir desta relação podemos agora predizer os resultados que se obteriam se realizássemos a experiência em condições distintas das que conduziram aos resultados donde partimos (Tabela 1). É previsível, por exemplo, que o tempo de escoamento de uma altura de água igual a 20 cm por um orifício de diâmetro 4 cm, seja da ordem de 8,4 s, isto evidentemente para um recipiente cilíndrico igual ao utilizado na experiência. Se o diâmetro do recipiente fosse diferente, é óbvio que o tempo de escoamento seria diferente de 8,4 s. Como se vê, o problema comporta mais variáveis do que as indicadas na Tabela 1.

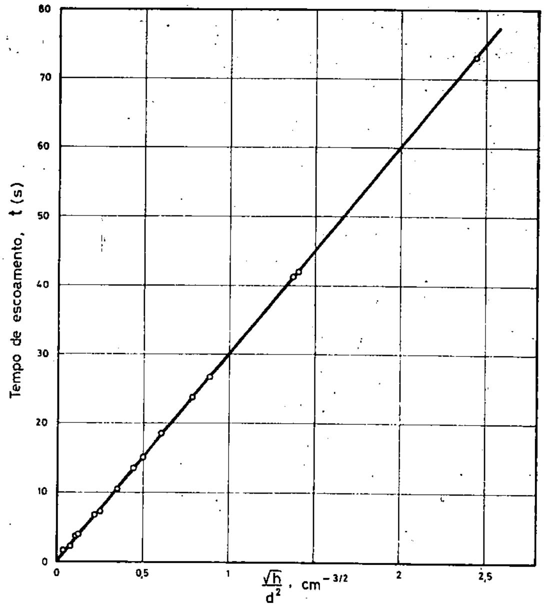


Fig. 6—O tempo de escoamento varia linearmente com $\sqrt{h} \cdot d^{-2}$. O declive da recta ajustada aos pontos experimentais vale $30{,}0\,\text{cm}^{3/2}\,\text{s}$; este é o valor da constante de proporcionalidade k referida no texto [expressão (8)].

Resolução de circuitos eléctricos

pelo Eng.º P. Martins da Silva
(Laboratório de Física da Faculdade de Ciências de Lisboa)

1. Introdução

A resolução de um circuito electrico, traduzida no cálculo das intensidades das correntes que percorrem os seus diversos ramos, é, em geral, trabalhosa, obrigando à aplicação repetida das leis físicas que regulam a circulação das correntes pelos diversos ramos do circuito. Mediante o método que se descreve, o problema físico reduz-se à aplicação de uma fórmula, portanto a uma questão trivial de cálculo numérico, passível de resolução automática fácil.

A exposição sintética do método é complementada por um exemplo de aplicação, que se quis o mais realista possível. Propõe-se o cálculo dos valores das intensidades das correntes nos diversos ramos de uma rede de distribuição de energia eléctrica, quando ocorre um curto-circuito num dado ponto da rede; o conhecimento dos valores destas intensidades é essencial para dimensionar os diversos órgãos que se integram na rede, em particular aqueles que um curto-circuito pode afectar mais profundamente (disjuntores e transformadores de medida de corrente).

2. Descrição do método

Considere-se o circuito eléctrico dividido nas suas malhas fundamentais, isto é, nos contornos fechados em número suficiente para que todos os ramos estejam representados, e designem-se por correntes de malha as correntes fictícias que percorrem estes contornos. Designando por i_j' a corrente na malha genérica j, a corrente i_k num ramo k pode exprimir-se em função das correntes fictícias das malhas:

$$i_k = \sum_j i_j' \cdot C_{jk} \tag{1}$$

ou, em notação matricial:

$$\overline{i} = \overline{\overline{C}} \cdot \overline{i'} \tag{2}$$

em que $\overline{\overline{C}}$ é a matriz de transformação das correntes das malhas nas correntes nos ramos.

Sejam $\overline{u'}$ e $\overline{\overline{Z'}}$, respectivamente, as matrizes das tensões e impedâncias das malhas, definidas como se indica:

$$\overline{u'} = \overline{\overline{Z'}} \cdot \overline{i'} \quad \therefore \quad \overline{i'} = (\overline{\overline{Z'}})^{-1} \cdot \overline{u'}. \tag{3}$$

Obtém-se imediatamente a matriz que se pretendia, das correntes nos ramos

$$\overline{i} = \overline{\overline{C}} \cdot (\overline{\overline{Z'}})^{-1} \cdot \overline{u'}. \tag{4}$$

Com vista a obter fórmulas simples que permitam determinar as matrizes $\overline{u'}$ e $\overline{\overline{Z'}}$, considere-se um circuito onde cada ramo é constituído por um gerador de força electromotriz u_k, associado em série com uma impedância Z_k. A partir deste circuito construa-se um outro (circuito secundário) estabelecendo ligações de impedância nua entre os diversos nós terminais de cada ramo; de modo que, para o circuito secundário, o número de ramos seja igual ao número de malhas. Seja $\overline{\overline{M}}$ a matriz (quadrada) que, para o circuito secundário, desempenha as funções da matriz $\overline{\overline{C}}$ definida atrás (2), isto é, permite converter as correntes das malhas nas correntes dos ramos:

$$\overline{s} = \overline{\overline{M}} \cdot \overline{s'}. \tag{5}$$

Para este circuito, òbviamente, a potência média fornecida pelos geradores nele incluídos é igual à potência média dissipada nos seus elementos passivos. Relativamente a cada ramo, a potência média fornecida pelo gerador respectivo vale:

$$p_k = \frac{1}{4}(u_k \cdot s_k^* + u_k^* \cdot s_k) \tag{6}$$

em que o símbolo $*$ indica que se trata do conjugado da grandeza considerada. Para a totalidade do circuito, tem-se, portanto:

$$p = \frac{1}{4}(\tilde{\overline{u}} \cdot \overline{s}^* + \tilde{\overline{u}}^* \cdot \overline{s}) \tag{7}$$

sendo $\tilde{\overline{u}}$ a matriz transposta de $\overline{u}$. Designando por $\overline{e'}$ a matriz das tensões das malhas do circuito secundário, a potência dissipada poderá determinar-se pela expressão (8)

$$(8) \qquad p = \frac{1}{4}(\tilde{\bar{e}}' \cdot \bar{s}'^* + \tilde{\bar{e}}' \cdot \bar{s}')$$

logo:

$$\tilde{\bar{u}} \cdot \bar{s}^* + \tilde{\bar{u}}^* \cdot \bar{s} = \tilde{\bar{e}}' \cdot \bar{s}'^* + \tilde{\bar{e}}'^* \cdot \bar{s}'$$

$$\tilde{\bar{u}} \cdot (\bar{\bar{M}} \cdot \bar{s}')^* + \tilde{\bar{u}}^* \cdot (\bar{\bar{M}} \cdot \bar{s}') = \tilde{\bar{e}}' \cdot \bar{s}'^* + \tilde{\bar{e}}'^* \cdot \bar{s}'.$$

Como a matriz $\bar{\bar{M}}$ é real, tem-se:

$$(9) \qquad \tilde{\bar{e}}' = \tilde{\bar{u}} \cdot \bar{\bar{M}} \;\therefore\; \bar{e}' = \tilde{\bar{\bar{M}}} \cdot \bar{u}$$

relação que exprime, para o circuito secundário, as tensões das mahlas nas tensões dos ramos. Por se tratar de uma relação topológica, permanece inalterável mesmo ao considerar-se que tendem para infinito as ligações estabelecidas entre os nós (ligações que permitiram construir o circuito secundário); no limite, obtém-se o circuito inicia, pelo que se tem:

$$(10) \qquad \bar{u}' = \tilde{\bar{\bar{C}}} \cdot \bar{u}$$

aproveitando da matriz $\bar{\bar{M}}$ só a parte agora com interesse e que é, precisamente, a matriz $\bar{\bar{C}}$.

Atendendo às relações (5), (9) e a que

$$(11) \qquad \bar{u} = \bar{\bar{Z}} \cdot \bar{s}$$

tem-se:

$$(12) \qquad \bar{e}' = \tilde{\bar{\bar{M}}} \cdot \bar{\bar{Z}} \cdot \bar{\bar{M}} \cdot \bar{s}'$$

sendo $\bar{\bar{Y}}'$ a matriz das impedâncias de malhas da rede secundária tem-se:

$$(13) \qquad \bar{e}' = \bar{\bar{Y}}' \cdot \bar{s}'.$$

De (12) e de (13) resulta:

$$\bar{\bar{Y}}' = \tilde{\bar{\bar{M}}} \cdot \bar{\bar{Z}} \cdot \bar{\bar{M}}.$$

Por considerações análogas às que permitiram obter $\bar{u}'$, resulta $\bar{\bar{Z}}'$ a partir de $\bar{\bar{Y}}'$, pelo que:

$$(14) \qquad \bar{\bar{Z}}' = \tilde{\bar{\bar{C}}} \cdot \bar{\bar{Z}} \cdot \bar{\bar{C}}.$$

Substituindo (10) e (14) em (4), tem-se, finalmente, a expressão:

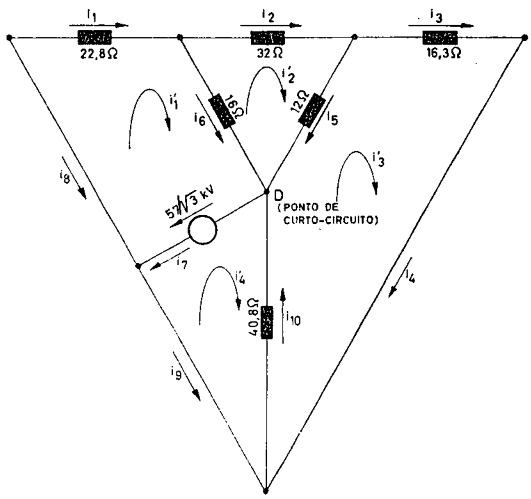
$$(15) \qquad \bar{i} = \bar{\bar{C}} \cdot (\tilde{\bar{\bar{C}}} \cdot \bar{\bar{Z}} \cdot \bar{\bar{C}})^{-1} \tilde{\bar{\bar{C}}} \cdot \bar{u}$$

que traduz o processo de determinar a matriz das correntes nos ramos.

3. Exemplo de aplicação

Como se referiu na **Introdução**, apresenta-se, como exemplo de aplicação, o cálculo das intensidades das correntes que percorrem uma dada rede de distribuição de energia eléctrica, quando ocorre um curto-circuito num ponto da rede.

Na figura junta representa-se o modelo da rede, correspondente a uma fase, sobre o qual será realizado o cálculo, e que foi construído com base em determinadas hipóteses simplificativas, aceites correntemente, tendo-se reduzido todas as impedâncias de acordo com a tensão ($57/\sqrt{3}\,kV$) no ponto D onde ocorre o curto-circuito, e aplicado o teorema de Thevénin.



Modelo da rede, correspondente a uma fase.

Arbitrando os sentidos indicados para as correntes nos ramos e nas malhas, tem-se a seguinte igualdade, a qual define a matriz $\bar{\bar{C}}$:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i'_1 \\ i'_2 \\ i'_3 \\ i'_4 \end{bmatrix}$$

A matriz $\bar{\bar{Z}}$ das impedâncias nos ramos é uma matriz diagonal, dado que não se consideram influências mútuas entre os ramos:

$$\bar{\bar{Z}} = \begin{bmatrix} 22{,}8 & & & & & & & & & \\ & 32 & & & & & & & & \\ & & 16{,}3 & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & \\ & & & & 12 & & & & & \\ & & & & & 16 & & & & \\ & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & 40{,}8 \end{bmatrix}$$

A matriz $\bar{u}$ das tensões nos ramos é, também, obtida imediatamente

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 57.10^3/\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando a expressão (15), obtém-se então a matriz das correntes nos ramos, que traduz, portanto, o resultado final da análise do circuito.

$$\bar{i} = \begin{bmatrix} 783 \\ 45 \\ -1150 \\ -1150 \\ 1195 \\ 738 \\ 2740 \\ -783 \\ 1957 \\ 807 \end{bmatrix}$$

O sinal (—) que afecta alguns dos valores das intensidades de corrente significa que os sentidos que foram, arbitràriamente, fixados para as correntes em causa são contrários aos sentidos verdadeiros dessas correntes.