

que lhes ocorra, daqui lhes dirijo um apelo:

Dêem «aos estudantes do 3.º ciclo liceal um livro de Física respeitador das suas capacidades intelectuais». Com isso prestariam um bom serviço à causa da educação nacional

que parece preocupá-los tanto. Mas se o não conseguirem por ser árdua a tarefa, então aprendam a respeitar mais o trabalho dos que há muitos anos vêm amanhando o terreno deste sector de actividade e se não limitam a ser seus fugidios traseuntes ou meros espectadores.

Dedução das Equações de Navier-Stokes e suas Aplicações

por C. M. PASSOS MORGADO

SUMÁRIO

Apresenta-se a dedução das equações gerais de Navier-Stokes e mostra-se a necessidade da sua simplificação para a resolução dos problemas da Mecânica de Fluidos. A partir das equações de Navier-Stokes deduzem-se as equações dos movimentos lentos e faz-se a sua aplicação ao problema de Stokes (esfera em corrente uniforme).

I. A DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Para a dedução destas equações seguimos de perto Schlichting (ref. 1).

1. As Equações da continuidade e da quantidade de movimento em fluidos.

O caso geral dum movimento tridimensional dum fluido fica completamente definido se conhecermos o vector velocidade $\vec{V} = \hat{i}u + \hat{j}v + \hat{k}w$, a pressão p e a densidade ρ em qualquer ponto do domínio fluido. Há portanto cinco incógnitas do problema, — u, v, w, p e ρ — para a deter-

minação das quais são necessárias cinco equações. Elas são:

- a) A equação da continuidade que traduz a conservação da massa.
- b) A equação fundamental da dinâmica (equação da quantidade de movimento) que traduz a conservação da quantidade de movimento. É uma equação vectorial que na forma escalar dá três equações.
- c) A equação de estado $p = f(\rho)$ fornecida pela termodinâmica. Notemos desde já que para um fluido incompressível ρ é constante e independente do tempo e do espaço.

Para a dedução da equação da continuidade consideremos um volume infinitesimal $d\tau$. A massa que, por unidade de tempo, sai através da superfície elementar que limita o volume $d\tau$ é $\text{div}(\rho \vec{V}) d\tau$; a diminuição da massa, por unidade de tempo, dentro do volume $d\tau$ resulta da variação da sua densidade e é $-\frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$. Como há conservação da massa tem-se:

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

o prazer de conduzir...



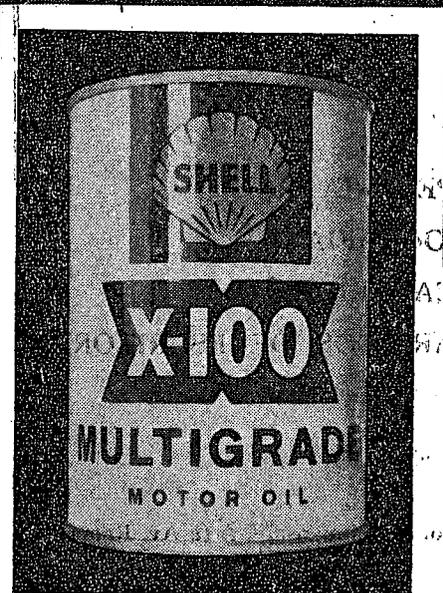
REPARE COMO O MOTOR DO SEU CARRO

ARRANCA MELHOR DE MANHÃ, COMO RESPONDE MELHOR
AO ACELERADOR, E AINDA COMO POUPA

GASOLINA E A BATERIA!

BENEFICIE DAS VANTAGENS

QUE LHE OFERECE O SHELL X-100 MULTIGRADE.





KORES, LDA.

FÁBRICA DE:

- PAPEIS QUÍMICOS
- FITAS PARA MÁQUINAS
- STENCILS
- TINTAS PARA DUPLICADORES

CABO RUIVO

LISBOA

TELEF. 77 66 82

Correia & Polónia, L.^{da}

- PAPELARIA
- TIPOGRAFIA
- ENCADERNAÇÃO
- E ARTIGOS DE ESCRITÓRIO

Rua Conde Sabugosa, 7-A (à Av. Roma)
LISBOA

Tipografia // Litografia // Encadernação

S O C I E D A D E
T I P O G R Á F I C A

«A Mundial»

LIMITADA

ESCRITÓRIO:

AVENIDA ALMIRANTE REIS, 45-A

TELEFONE 83 36 66

LISBOA 1

OFICINAS: NOVAS INSTALAÇÕES,
REGUEIRÃO DOS ANJOS, 36

que é a forma mais geral da equação da continuidade. Para fluido incompressível vem simplesmente

$$(1, a) \quad \text{div } \vec{V} = 0.$$

A equação da quantidade de movimento resulta imediatamente da segunda lei de Newton, segundo a qual, o produto da massa pela aceleração é igual à soma de todas as forças externas que actuam sobre o corpo. No caso dos fluidos há a considerar dois tipos de forças actuantes: as que actuam por toda a massa de fluido (*forças gravitacionais ou mássicas*) e as que actuam sobre a superfície devidas à pressão e fricção internas (*forças de superfície*). Seja $\vec{F} = \rho \vec{g}$ a força gravitacional por unidade de volume (\vec{g} é o vector aceleração devido à gravidade) e \vec{P} a força de superfície por unidade de volume. Então a equação da quantidade de movimento é dada por

$$(2) \quad \rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \vec{P}$$

onde

$$(2, a) \quad \vec{F} = \hat{i} X + \hat{j} Y + \hat{k} Z \quad (\text{forças mássicas})$$

e

$$(2, b) \quad \vec{P} = \hat{i} P_x + \hat{j} P_y + \hat{k} P_z \quad (\text{forças de superfície})$$

A derivada de \vec{V} em ordem a t é a derivada total; a sua expressão é evidentemente

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{d\vec{V}}{dt} &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} = \\ &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}. \end{aligned}$$

As forças mássicas são forças externas, dependentes apenas da massa e independentes do estado de deformação do fluido; as forças de superfície, pelo contrário, dependem do estado de deformação (campo de velocidades) do fluido. É por isso necessário

determinar a relação entre as deformações e as forças de superfície que as produzem, a qual, desde já se faz notar, só pode ser dada empiricamente.

Para corpos elásticos esta relação é dada pela lei de Hooke; para líquidos e gases pela lei de Stokes. *A única diferença destas leis é que, enquanto para um corpo elástico os esforços (força por unidade de superfície) são proporcionais às deformações, para um fluido são proporcionais às velocidades das deformações.*

Por ser mais simples, começaremos por determinar a relação entre os esforços e as deformações para um corpo elástico (Lei de Hooke); daqui se deduz imediatamente a mesma relação para fluidos (Lei de Stokes). Foi este o procedimento usado por Stokes, embora a lei de Stokes se possa deduzir a partir da teoria cinética.

2. Os esforços num corpo deformável.

Consideremos um volume elementar paralelepédico $d\tau = dx dy dz$ dum corpo deformável; nas duas faces, de áreas $dy dz$, perpendiculares ao eixo dos xx , actuam os

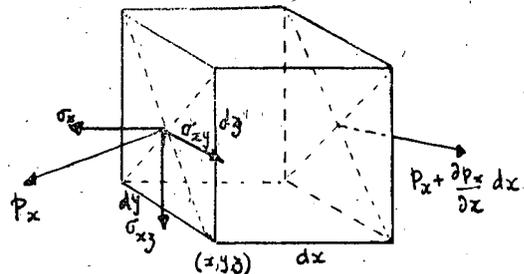


Fig. 1

esforços (força por unidade de superfície) \vec{p}_x e $\vec{p}_x + \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} dx$ onde o índice x significa que a face considerada é perpendicular ao eixo dos xx . A força de superfície resultante destas duas faces é $\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} dx dy dz$. De um modo semelhante se tem para os pares

de faces perpendiculares aos eixos dos yy e dos zz , $\frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} dx dy dz$ e $\frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} dx dy dz$.

Portanto a força de superfície \vec{P} por unidade de volume é

$$(4) \quad \vec{P} = \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}$$

As grandezas \vec{p}_x , \vec{p}_y e \vec{p}_z são vectores e como tal cada uma delas pode ser decomposta em 3 componentes. Consideremos por exemplo \vec{p}_x ; uma das suas componentes é normal à face de área $dy dz$, designa-se por *esforço normal*, e o seu símbolo é σ_x ; as outras duas são tangenciais a esta face, designam-se por *esforços cortantes*, e os seus símbolos são respectivamente τ_{xy} , para a paralela ao eixo dos yy , e τ_{xz} para a paralela ao eixo dos zz . Temos portanto

$$\vec{p}_x = \hat{i} \sigma_x + \hat{j} \tau_{xy} + \hat{k} \tau_{xz}$$

e dum modo semelhante

$$(5) \quad \begin{aligned} \vec{p}_y &= \hat{i} \tau_{yx} + \hat{j} \sigma_y + \hat{k} \tau_{yz} \\ \vec{p}_z &= \hat{i} \tau_{zx} + \hat{j} \tau_{zy} + \hat{k} \sigma_z \end{aligned}$$

o que mostra serem necessárias nove componentes para a determinação da força de superfície \vec{P} .

A condição de equilíbrio do volume elementar $d\tau$ dá, tomando momentos respectivamente em relação aos eixos dos xx , dos yy e dos zz

$$(6) \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

De (6), (5) e (4) resulta para força de superfície por unidade de volume

$$(7) \quad \begin{aligned} \vec{P} &= \hat{i} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \text{ componente se-} \\ &\quad \text{gundo o eixo} \\ &\quad \text{dos } xx \\ &+ \hat{j} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \text{ componente se-} \\ &\quad \text{gundo o eixo} \\ &\quad \text{dos } yy \\ &+ \hat{k} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \text{ componente} \\ &\quad \text{segundo o eixo} \\ &\quad \text{dos } zz \\ &= \hat{i} P_x + \hat{j} P_y + \hat{k} P_z \text{ (ver fórmula 2 b).} \end{aligned}$$

Substituindo (7) em (2) temos na forma escalar

$$(8) \quad \begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= X + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{dv}{dt} &= Y + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{dw}{dt} &= Z + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Para um *fluido perfeito* (viscosidade nula) são nulos todos os *esforços cortantes*; os *esforços normais* são diferentes de zero, iguais para todas as direcções e o seu valor comum com sinal contrário é a pressão no ponto x, y, z :

$$(9) \quad \begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} &= 0 \\ \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z &= -p \end{aligned}$$

A pressão num ponto é portanto igual à média, com sinal contrário, dos três esforços normais em três direcções perpendiculares entre si. Para um *fluido viscoso* é conveniente introduzir a média dos três esforços normais entre si.

Pode demonstrar-se que esta média é invariante para uma rotação de eixos (veja-se por exemplo Lamb) e o seu valor com sinal contrário é a pressão num ponto do fluido, isto é,

$$(10) \quad \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \bar{\sigma} = -p$$

As equações (8) contêm seis esforços $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$; é necessário determinar agora a relação entre eles e as deformações a fim de introduzirmos em (8) as componentes u, v e w da velocidade \vec{V} .

Antes de determinarmos esta relação vamos fazer o estudo das deformações.

3. O estudo das deformações.

Consideremos um *sólido elástico* que, por intermédio dos esforços que sobre ele actuam, se vai deformar. Qualquer segmento elementar deste sólido vai sofrer com a deformação um *deslocamento linear* e um *deslocamento*

angular finitos. Se, em vez dum sólido elástico considerarmos um fluido a deformação persiste enquanto actuar o esforço que a produz; neste caso, qualquer segmento do fluido fica sujeito a uma *velocidade de deslocamento linear* e uma *velocidade de deslocamento angular*.

Por ser mais simples, começaremos por fazer o estudo das deformações dum sólido elástico, as quais, quer se considere um sólido ou um fluido, se podem fazer por dois processos. O primeiro define a deformação dum

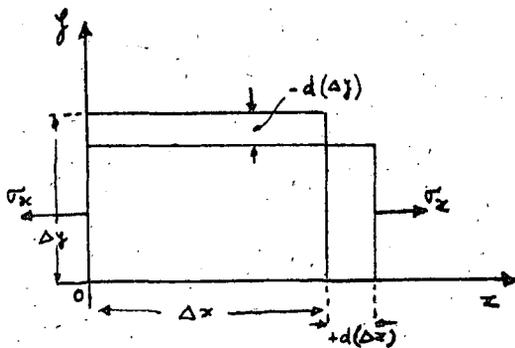


Fig. 2

volume elementar pelas três elongações ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z e pelos três deslocamentos angulares γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} , isto é, seis deformações ao todo. As grandezas ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z são definidas como o quociente do aumento de comprimento, devido aos esforços normais, pelo comprimento inicial, isto é, (ver fig. 2)

$$\epsilon_x = \frac{d(\Delta x)}{\Delta x}; \quad \epsilon_y = \frac{d(\Delta y)}{\Delta y}; \quad \epsilon_z = \frac{d(\Delta z)}{\Delta z}$$

quando Δx , Δy , Δz tendem para zero. Os deslocamento angulares γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} representam a variação, devido aos esforços cortantes, dum ângulo que era inicialmente recto; por exemplo γ_{xy} representa a variação do ângulo recto formado pelos eixos dos xx e dos yy , isto é, (ver fig. 3)

$$\gamma_{xy} = \theta_1 + \theta_2.$$

O quociente entre as variações de volume e o volume inicial — dilatação unitária e —

vale

$$(11) \quad e = \frac{d(\Delta V)}{\Delta V} = \frac{d(\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} = \frac{d(\Delta x)}{\Delta x} + \frac{d(\Delta y)}{\Delta y} + \frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z.$$

O segundo processo de definir a deformação consiste no uso do vector deslocamento

$$\vec{s} = \hat{i}\xi + \hat{j}\eta + \hat{k}\zeta$$

dum ponto. Se as coordenadas dum ponto antes da deformação forem x, y, z serão $x + \xi$; $y + \eta$; $z + \zeta$ depois da deformação; e a deformação fica completamente definida se forem conhecidas as componentes

$$\xi = \xi(x, y, z); \quad \eta = \eta(x, y, z); \quad \zeta = \zeta(x, y, z)$$

do vector deslocamento para qualquer ponto x, y, z .

Evidentemente, é possível definir ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} em função de ξ , η e ζ . Consideremos por exemplo ϵ_x e γ_{xy} ; temos $d(\Delta x) = \xi(x + \Delta x) - \xi(x)$ e portanto quando $\Delta x \rightarrow 0$

$$\epsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Para pequenas deformações é

$$\gamma_{xy} = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

como se tira imediatamente da fig. 3. De um modo semelhante podemos escrever

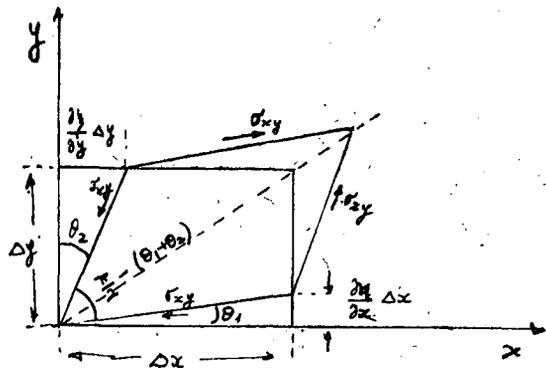


Fig. 3

$$(12a) \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial \zeta}{\partial y}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}; \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ e = \text{div } \vec{s} \end{array} \right.$$

Para um fluido, em vez do vector deslocamento $\vec{s} = \hat{i}\xi + \hat{j}\eta + \hat{k}\zeta$, consideramos o vector velocidade de deslocamento

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{V} = \hat{i}u + \hat{j}v + \hat{k}w$$

e portanto vem, como para um sólido elástico:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

não sendo necessário (não fazia sentido, aliás) a restrição de pequenas deformações; γ_{xy} é agora a velocidade de deslocamento angular. Para as outras deformações resulta dum modo semelhante

$$(12b) \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ e = \text{div } \vec{V} \end{array} \right.$$

Note-se que passamos de (12a) para (12b) substituindo os deslocamentos pelas velocidades dos deslocamentos.

4 — Relação entre esforço e deformação para corpos elásticos (Lei de Hooke).

Para corpos elásticos a relação entre o esforço e a deformação é dada pela lei de Hooke segundo a qual os esforços são pro-

porcionais às deformações. A relação entre os esforços cortantes e os deslocamentos angulares é então

$$(13) \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}; \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

onde G é o módulo de Coulomb (módulo de torsão).

As relações entre as elongações $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ e os esforços normais $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ são ligeiramente mais complicadas devido ao facto da elongação numa direcção provocar encurtamento nas direcções perpendiculares. Por exemplo, devido ao esforço τ_x o alongamento ϵ_x é $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ onde E é o módulo de Young; o encurtamento resultante segundo a direcção dos yy é $\epsilon_y = -\nu\epsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_x$ onde ν é a razão de Poisson.

Portanto a elongação segundo a direcção dos xx , tomando em consideração o encurtamento proveniente dos esforços σ_y e σ_z é

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

e dum modo semelhante

$$(14) \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)].$$

Pode mostrar-se (ver Tomo I pág. 125 do Curso Geral de Física do Prof. Amaro Monteiro ou qualquer livro de elasticidade) que entre o módulo de Young E , o módulo de Coulomb G e a razão de Poisson existe a seguinte relação

$$(15) \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

O nosso objectivo é determinar os esforços normais em função das elongações. Para isso somemos ordenadamente as equações (14); obtemos

$$(16) \quad e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \text{div } \vec{s}$$

que mostra ser nula a dilatação unitária para $\nu = \frac{1}{2}$. As equações (15) e (16) dão

$$(17) \quad \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{Ee}{1-2\nu} = \frac{2G(1+\nu)}{1-2\nu} e$$

que combinada com a primeira das equações (14) dá.

$$E \epsilon_x = (1 + \nu) \sigma_x - \nu \frac{Ee}{1-2\nu}$$

ou

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon_x + \frac{\nu e}{1-2\nu} \right) = 2G \left(\epsilon_x + \frac{\nu e}{1-2\nu} \right)$$

É conveniente introduzir nesta equação a média $\bar{\sigma}$ dos esforços normais; temos então

$$\sigma_x = 2G \epsilon_x + \bar{\sigma} + 2G \frac{\nu e}{1-2\nu} - \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

a qual dá, depois de substituir os termos entre parêntesis por $\frac{2G(1+\nu)}{1-2\nu} e$, segundo (17)

$$(18a) \quad \sigma_x = \bar{\sigma} + 2G \epsilon_x - \frac{2}{3} G e$$

Semelhantemente se obtêm mais duas relações para σ_y e σ_z

$$(18b) \quad \sigma_y = \bar{\sigma} + 2G \epsilon_y - \frac{2}{3} G e$$

$$(18c) \quad \sigma_z = \bar{\sigma} + 2G \epsilon_z - \frac{2}{3} G e$$

Substituindo finalmente (12a) em (13) e em (18a, b, c) obtêm-se os esforços em função das três componentes ξ, η e ζ do deslocamento

$$(19) \quad \begin{cases} \sigma_x = \bar{\sigma} + 2G \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{2}{3} G \text{div } \vec{s} \\ \sigma_y = \bar{\sigma} + 2G \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{2}{3} G \text{div } \vec{s} \\ \sigma_z = \bar{\sigma} + 2G \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{2}{3} G \text{div } \vec{s} \\ \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right); \\ \tau_{yz} = G \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right); \\ \tau_{zx} = G \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \end{cases}$$

que na forma matricial tomam a forma

$$(20) \quad \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} - \frac{2}{3} G \begin{bmatrix} \text{div } \vec{s} & 0 & 0 \\ 0 & \text{div } \vec{s} & 0 \\ 0 & 0 & \text{div } \vec{s} \end{bmatrix}$$

As equações (19) e (20) exprimem a *lei de Hooke* na sua forma mais geral. Repetimos mais uma vez que a sua obtenção se baseou na hipótese das deformações serem proporcionais aos esforços.

5. Relação entre esforço e deformação para líquidos e gases. Lei de Stokes.

A *Lei de Stokes* — relação entre esforços e velocidades de deformação — obtém-se imediatamente de (20) substituindo o módulo de Coulomb G pelo coeficiente de viscosidade μ , a média aritmética dos esforços normais $\bar{\sigma}$, pela pressão $-p$ do fluido e as deformações pelas velocidades das deformações.

A forma matricial da Lei de Stokes é portanto:

$$(21) \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \mu \begin{bmatrix} \text{div } \vec{V} & 0 & 0 \\ 0 & \text{div } \vec{V} & 0 \\ 0 & 0 & \text{div } \vec{V} \end{bmatrix}$$

Já dissemos que na ausência de viscosidade os únicos esforços existentes são os esforços normais com o valor comum $-p$. Escrevendo então

$$(22) \quad \sigma_x = -p + \sigma'_x; \quad \sigma_y = -p + \sigma'_y; \\ \sigma_z = -p + \sigma'_z$$

logo se vê que $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ são os esforços devido à viscosidade do fluido e as suas expressões em função das velocidades de deformação são:

$$(23) \quad \sigma'_x = \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \text{div } \vec{V} \right) \\ \sigma'_y = \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \text{div } \vec{V} \right) \\ \sigma'_z = \mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \text{div } \vec{V} \right) \\ \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

6. As equações de Navier-Stokes.

Substituindo (22) em (10) vem:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{dv}{dt} &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{dw}{dt} &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \right.$$

Lançando agora mão das equações (23) obtemos a resultante das forças de superfície em função das componentes da velocidade. Por exemplo, para a componente da força de superfície segundo o eixo dos xx temos (segundo 7)

$$P_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

que, usando as equações 23, dá

$$(25) \quad P_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \text{div } \vec{V} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]$$

existindo mais duas relações semelhantes para P_y e P_z . No caso geral dum fluido compressível a viscosidade μ deve ser considerada não como uma constante mas sim como função das coordenadas espaciais x, y, z ; na verdade μ varia consideravelmente com a temperatura a qual pode sofrer variações apreciáveis devido às variações da velocidade, pressão e calor resultante da fricção interna do fluido. A relação entre a viscosidade e a temperatura obtem-se experimentalmente.

Substituindo (25) e as duas relações semelhantes para P_y e P_z em (8) vem

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{du}{dt} = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \\ \rho \frac{dv}{dt} = Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ \rho \frac{dw}{dt} = Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \end{array} \right.$$

Estas equações diferenciais formam a base de toda a Mecânica de Fluidos e são chamadas as equações de Navier-Stokés. As equações de Navier-Stokes juntamente com a equação da continuidade não são suficientes para a determinação completa do movimento dum fluido compressível pois as variações de pressão e densidade causam variações de temperatura sendo por isso necessário recorrer às leis da Termodinâmica. Em primeiro lugar a Termodinâmica fornece-nos a equação de estado $\varphi(p, \rho, T)$ que para os gases perfeitos torna a forma

$$(27) \quad p - \rho g R T = 0$$

onde R é a constante dos gases e T a temperatura absoluta; se o processo não for isotérmico é necessário lançar mão do Primeiro Princípio da Termodinâmica o qual estabelece, como sabemos, uma relação entre o calor e a energia mecânica dando uma equação diferencial para a distribuição da temperatura. É ainda necessária uma equação que relacione a viscosidade com a temperatura, isto é, $\mu = \mu(T)$; esta equação é obtida empiricamente.

Temos portanto ao todo 7 incógnitas — u, v, w, p, ρ, T e μ — e sete equações. Para um processo isotérmico estas reduzem-se a 5 (3 equações de Navier-Stokes, a equação da continuidade e a equação de estado) com as cinco incógnitas correspondentes u, v, w, p e ρ .

7. Corrente incompressível.

O sistema de equações anterior simplifica-se consideravelmente no caso dum fluido incompressível ($\rho = \text{const}$) mesmo que a temperatura não seja constante. Neste caso

é $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ e como as variações de temperatura são geralmente pequenas a viscosidade pode ser considerada constante. A equação da energia e a equação de estado não são necessárias neste caso; a determinação do campo da corrente é pois independente das equações da Termodinâmica.

As equações (26, a, b, c) e a equação da continuidade tomam neste caso, como facilmente se vê, a forma

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{du}{dt} = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{dv}{dt} = Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{dw}{dt} = Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \end{array} \right.$$

havendo portanto 4 equações para a determinação das quatro incógnitas u, v, w, p . Na forma vectorial as equações de Navier-Stokes para fluido incompressível escrevem-se

$$(29) \quad \rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

onde o símbolo ∇^2 é o Laplaciano.

As equações que vimos considerando (equações de Navier-Stokes) foram obtidas sucessivamente por Navier (1872), Cauchy e Poisson baseadas em hipóteses sobre as forças intermoleculares; mais tarde B. de Saint-Venant (1843) e G. G. Stokes (1845) deduziram-nas de um modo semelhante ao apresentado, isto é, baseando-se na linearidade entre os esforços e as velocidades das deformações.

8. A hipótese fundamental dos fluidos reais.

As soluções das equações anteriores têm evidentemente de satisfazer as condições fronteiras. Para fluidos reais tem lugar a seguinte condição fronteira: «a velocidade dum fluido relativamente à fronteira sólida que com ele contacta é nula». Portanto, na superfície dum sólido em contacto com um fluido real temos:

$$(30) \quad v_n = 0, \quad v_t = 0$$

onde v_n e v_t são as componentes normal e tangencial da velocidade (ver Goldstein, «Modern Developments in Fluid Dynamics», Vol. II, pag. 676-680).

II. MOVIMENTOS LENTOS. APLICAÇÃO AO PROBLEMA DE STOKES

1. As equações diferenciais dos movimentos lentos.

As equações de Navier-Stokes são não lineares e por isso a sua solução apresenta dificuldades enormes. São poucos e geralmente simples os problemas de Mecânica de Fluidos resolvidos fazendo uso das equações de Navier-Stokes na sua forma completa; a resolução dos problemas da Mecânica de Fluidos baseia-se em simplificações das equações de Navier Stokes obtendo-se soluções válidas dentro de determinados limites. Há dois casos de simplificação das equações de Navier-Stokes de especial importância. O primeiro corresponde a serem as forças de viscosidade muito maiores que as forças de inércia; como as forças de inércia são proporcionais ao quadrado da velocidade (ρU^2 pode considerar-se como representando a força de inércia por unidade de área) e as de viscosidade são apenas proporcionais à velocidade ($\frac{\mu U}{L}$ pode considerar-se como repre-

sentando a força de viscosidade por unidade de área) este movimento é necessariamente lento. Por outras palavras em movimentos lentos a razão não dimensional $\frac{\rho U^2}{\mu U} =$

$$= \frac{\rho U L}{\mu}, \text{ conhecida por número de Rey-}$$

nolds é pequena. O segundo caso corresponde a serem as forças de inércia maiores que as de viscosidade.

É o primeiro caso que vamos considerar fazendo em seguida uma aplicação ao problema de Stokes: *campo resultante duma corrente uniforme de velocidade U , a infinito, sobre uma esfera colocada no seu interior.* O problema de Stokes representa a solução mais antiga, que se conhece, dos movimentos lentos (1851).

Não considerando as forças mássicas, (equivalente a não considerar a impulsão) e supondo, então, desprezáveis as forças de inércia, as equações de Navier-Stokes e a equação da continuidade escrevem-se, como resulta imediatamente de (28) ou (29)

$$(31 a) \quad \text{grad } p = \mu \nabla^2 \vec{V}$$

$$(31 b) \quad \text{div } \vec{V} = 0$$

ou, na forma cartesiana

$$(31 a') \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{cases}$$

$$(31 b') \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Pode eliminar-se em (31 a) a pressão; na verdade aplicando o operador rotacional a ambos os membros e notando que

$$\text{rot grad } p = 0$$

vem

$$(32) \quad \vec{\nabla} \wedge (\nabla^2 \vec{V}) = 0.$$

Sabemos do cálculo vectorial que

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$$

e por ser segundo (31 b) $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ vem

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = -\nabla^2 \vec{V}$$

Portanto (32) escreve-se

$$(33) \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \omega) = 0 \\ \text{com } \omega = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \end{cases}$$

É fácil mostrar que em movimentos lentos a pressão satisfaz a equação de Laplace, isto é, $\nabla^2 p = 0$. Na verdade aplicando o operador div a ambos os membros da equação (31 a) e notando que os operadores div e ∇^2 são comutativos vem atendendo a (31 b)

$$\text{div grad } p = 0$$

ou

$$(34) \quad \nabla^2 p = 0.$$

Em resumo: Os movimentos lentos satisfazem as seguintes equações

$$(35) \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \omega) = 0 \\ \omega = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \\ \nabla^2 p = 0 \end{cases}$$

2 — As equações do problema de Stokes.

O problema que vamos estudar em seguida é o do movimento dum corrente uniforme de velocidade U a infinito sobre uma esfera de raio a em repouso no seio a corrente; devido à relatividade do movimento podemos considerar a corrente em repouso a infinito e a esfera movendo-se no seu interior com velocidade U em sentido oposto ao da corrente.

Por causa da simetria esférica do problema em questão é vantajoso o uso de coordenadas esféricas. A figura junta mostra as coordenadas esféricas utilizadas assim como um sistema de eixos triortogonais, ligado à esfera, cuja origem coincide com o centro

desta; o eixo dos xx tem o sentido da corrente uniforme.

Para qualquer problema de simetria axial é evidentemente $v_\phi = 0$ e as componentes

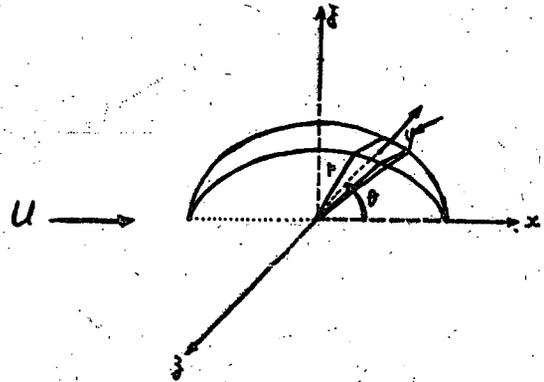


Fig. 4

v_θ e v_r da velocidade podem definir-se a partir duma só função — a função de corrente de Stokes — que vamos introduzir.

Seja O a origem das coordenadas e Ox o eixo de simetria axial; seja P um ponto genérico do campo da corrente e una-se O a P por uma curva qualquer C . Designemos por $2\pi\psi_P$ o volume de fluido que, no sentido retrógrado, atravessa a curva C por unidade de tempo; evidentemente, o seu valor é independente da curva C e depende apenas do ponto P . Para um ponto P' o volume de fluido que no sentido retrógrado

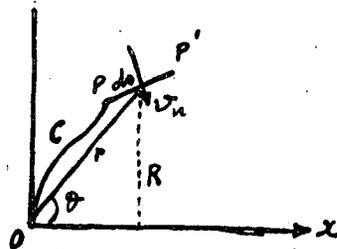


Fig. 5

atravessa a curva C por unidade de tempo será $2\pi\psi_{P'}$. Sendo P e P' dois pontos próximos resulta imediatamente como se vê da figura

$$(36) \quad 2\pi(\psi_{p'} - \psi_p) = 2\pi R ds v_n$$

isto é,

$$(36 a) \quad v_n = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial s}$$

Considerando sucessivamente ds igual a $r d\theta$ e dp vem:

$$(37) \quad \begin{cases} v_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{r d\theta} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$$

Consideremos agora as equações (33); em coordenadas esféricas o rotacional dum vector \vec{A} ($\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$) é como sabemos dado por:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ r^2 \sin \theta & r \sin \theta & r \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix}$$

Portanto temos para $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{V}$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} = \text{rot } \vec{V} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ r^2 \sin \theta & r \sin \theta & r \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ v_r & r v_\theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\hat{\phi}}{r} \left[v_\theta + r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

e introduzindo a função de corrente ψ , de acordo com as equações (37), vem:

$$\vec{\omega} = \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \psi = \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} D^2 \psi$$

Determinemos agora $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega})$. Primeiramente temos:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} &= \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ r^2 \sin \theta & r \sin \theta & r \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ 0 & 0 & D^2 \psi \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\hat{r}}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} D^2 \psi - \frac{\hat{\theta}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} D^2 \psi \end{aligned}$$

e finalmente

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}) &= \\ &= \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ r^2 \sin \theta & r \sin \theta & r \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} D^2 \psi & -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} D^2 \psi & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right\} D^2 \psi = \\ &= -\frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} D^4 \psi \end{aligned}$$

isto é,

$$(38) \quad D^4 \psi = 0$$

onde

$$(39) \quad D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

Chama-se a atenção para o facto de a equação (38) ser aplicável a qualquer movimento lento de simetria axial e não exclusivamente a uma esfera.

3. Determinação da função de corrente ψ .

O campo de velocidades (e consequentemente a pressão) fica determinado uma vez conhecida a função ψ . Esta obtém-se por integração da equação

$$(40) \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \psi = 0 \quad \text{vindo}$$

$$\psi = \left(\frac{A}{r} + Br + \frac{1}{2} Ur^2 \right) \sin^2 \theta.$$

sujeita às seguintes condições fronteiras

$$(41) \quad i) \quad \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{sobre a superfície da esfera como resulta do parágrafo I. 8 e de (37).}$$

$$ii) \quad \psi \rightarrow \frac{1}{2} Ur^2 \sin^2 \theta \quad \text{para pontos infinitamente afastados da esfera como resulta imediatamente de (36).}$$

Pela condição *i*) tem-se imediatamente

$$A = \frac{1}{4} U a^5$$

$$B = -\frac{3}{4} U$$

vindo finalmente

$$(44) \quad \psi = \frac{1}{2} U \left(r^2 - \frac{3}{2} ar + \frac{1}{2} \frac{a^5}{r} \right) \sin^2 \theta.$$

Escrevendo a função ψ na forma (separação das variáveis)

$$(42) \quad \psi = f(r) \cdot g(\theta)$$

resulta imediatamente da condição *ii*)

$$(43) \quad \psi = f \sin^2 \theta$$

valor que substituído em (40) dá sucessivamente:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$\left[\left(\frac{d^2 f(r)}{dr^2} - \frac{2f(r)}{r^2} \right) \sin^2 \theta \right] = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right) f(r) = 0$$

equação linear e homogênea de 4.^a ordem que admite Ar^n como solução desde que n satisfaça a equação

$$[(n-2)(n-3)-2][n(n-1)-2]=0$$

cujas soluções são $n = -1, 1, 2$ e 4 . Portanto

$$f(r) = \frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4$$

Pela condição *ii*) tem de ser $c = \frac{1}{2} U, D = 0$

4. Determinação da velocidade.

Da função de corrente (44) vem atendendo a (37)

$$(45) \quad \begin{cases} v_r = \frac{U}{r^2} \left(r^2 - \frac{3}{2} ar + \frac{1}{2} \frac{a^5}{r} \right) \cos \theta \\ v_\theta = -\frac{1}{2} \frac{U}{r} \sin \theta \left(2r - \frac{3}{2} a - \frac{1}{2} \frac{a^5}{r^2} \right) \end{cases}$$

As componentes da velocidade em coordenadas cartesianas são dadas, como se vê imediatamente, por:

$$(46) \quad \begin{cases} u = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta \\ v = (v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta) \cos \psi \\ w = (v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta) \sin \psi \end{cases}$$

onde

$$(47) \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \cos \psi = \frac{y}{r \sin \theta} \\ \sin \psi = \frac{z}{r \sin \theta} \end{cases}$$

Substituindo (45) e (47) em (46) resulta

$$(48) \begin{cases} u = U \left[\frac{3}{4} a \frac{x^2}{r^3} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) + \right. \\ \left. + 1 - \frac{1}{4} \frac{a}{r} \left(3 + \frac{a^2}{r^2} \right) \right] \\ v = U \frac{3}{4} \frac{a x y}{r^3} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \\ w = U \frac{3}{4} \frac{a x z}{r^3} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \end{cases}$$

5. Determinação da pressão.

A pressão satisfaz as seguintes equações

$$(49, a) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$(49, b) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$(49, c) \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

$$(49, d) \quad \nabla^2 p = 0$$

e a sua determinação é simples conhecido o campo de velocidades. Na verdade, as segundas derivadas de w vêm:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{3}{4} U a \left\{ \frac{-15 a^2 x r^2 + 35 a^2 x^3 z + 9 x z r^4 - 15 x^3 z r^2}{r^9} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{3}{5} U a x z \left\{ \frac{-3 r^4 + 15 y^2 r^2 + 5 a^2 r^2 - 35 a^2 y^2}{r^9} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{3}{4} U a \left\{ \frac{-15 a^2 x z r^2 + 35 a^2 z^3 x + 9 x z r^4 - 15 x z^3 r^2}{r^9} \right\}$$

cujos valores substituídos em (49 c) dão

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{9}{2} U a \frac{x z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

Integrando temos

$$p = -3/2 U a \frac{x}{r^3} + g(x, y).$$

Quando $r \rightarrow \infty$, $p \rightarrow p_\infty$ e portanto

$$p = p_\infty - 3/2 U a \frac{x}{r^3} + g_1(x, y)$$

com $g_1(x, y) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$; de notar que $g_1(x, y)$ tem de satisfazer a equação de Laplace. Como a pressão tem simetria axial a função $g_1(x, y)$ é necessariamente independente de y e portanto apenas função de x , isto é, $g_1(x, y) = g_2(x)$. Como $g_2(x)$ há-de satisfazer a equação de Laplace é $\frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2} = 0$ e portanto

$$g_2 = K_1 x + K_2.$$

Como por outro lado $g_2(x) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$ é $K_1 = K_2 = 0$ e temos finalmente

$$(51) \quad p = p_\infty - 3/2 U a \frac{x}{r^3}.$$

As equações (48) e (51) determinam portanto a velocidade e a pressão em qualquer ponto de coordenadas x, y, z .

6 - Força que actua sobre a esfera.

A força resultante que se exerce sobre a esfera é devida ao esforço normal e ao esforço cortante; visto haver simetria axial a sua direcção é a do eixo de xx .

i) Força devida ao esforço normal (resistência de forma).

Atendendo a que no caso presente $\text{div } V = 0$, o esforço normal é, segundo (22) e (23) dado por

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Para o sistema de coordenadas utilizado temos, atendendo a que v_r corresponde a u

e dr corresponde a dx

$$\sigma_r = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

Sobre a esfera, isto é, para $r = 0$
 $\frac{\partial v_r}{\partial r} = 0$ e então

$$(52) \quad (\sigma_r)_{r=a} = -p$$

onde p é dada pela fórmula (51).

A força de resistência devida ao esforço normal é portanto

$$(53) \quad R_p = -2\pi a^2 \int_0^\pi p \cos \theta \sin \theta d\theta = \\ = 2\pi a \mu U.$$

ii) *Força devida ao esforço cortante (resistência de atrito superficial).*

O esforço cortante

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

definido por (23) vem para o sistema de coordenadas utilizado, atendendo a que $r d\theta$ corresponde a dy e dr corresponde a dx

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial v_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right).$$

Calculemos agora $\frac{\partial v_r}{r \partial \theta}$ e $\frac{\partial v_\theta}{\partial r}$; as fórmulas (45) dão:

$$\frac{\partial v_r}{r \partial \theta} = -\frac{U}{r} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} = -\frac{3}{4} \frac{aU}{r^2} \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

cujos valores sobre a esfera são:

$$\left(\frac{\partial v_r}{r \partial \theta} \right)_{r=a} = 0$$

$$\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right)_{r=a} = -\frac{3}{2} \frac{U}{a} \sin \theta$$

e portanto

$$(54) \quad \tau_{r\theta} = -\frac{3}{2} \frac{U}{a} \mu \sin \theta$$

e a força resultante que actua sobre a esfera devido ao espaço cortante é

$$(55) \quad R_\tau = -2\pi a^2 \int_0^\pi \tau_{r\theta} \sin^2 \theta d\theta$$

Substituindo (54) em (55) e integrando resulta

$$(56) \quad R_\tau = 4\pi \mu U$$

A força total de resistência que se exerce sobre a esfera é pois

$$(57) \quad R = 6\pi a \mu U$$

como resulta imediatamente de (53) e (56). A fórmula (57) é conhecida por fórmula de Stokes. É conveniente notar que dois terços da força a que fica sujeita a esfera é devida ao esforço cortante; um terço dessa força é devida ao esforço normal.

Como sabemos a força de resistência R pode escrever-se na forma

$$(58) \quad R = \frac{1}{2} \rho U^2 S C_R$$

onde S é uma área (da esfera) que tomamos para referência. De (57) e (58) resulta tomando para área S a superfície frontal da esfera, isto é, $S = \pi a^2$

$$(59) \quad C_R = \frac{12\mu}{\rho U a} = \frac{24}{R_e}$$

onde o número de Reynolds R_e é dado por $\frac{\rho U d}{\mu}$ (d , diâmetro da esfera).

Determinou-se experimentalmente que a fórmula de Stokes é válida para números de Reynolds até próximos da unidade, isto é, $\frac{\rho U d}{\mu} \approx 1$. Para números de Reynolds superiores a 1 tem lugar a *separação* da corrente

na parte da esfera a jusante da corrente com a formação duma «esteira vorticiosa» não permanente; quando o número de Reynolds atinge valores ainda mais elevados a corrente

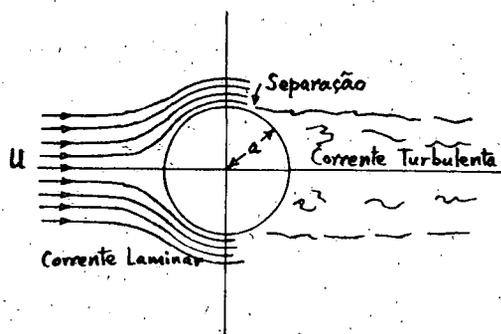


Fig. 5

na esteira torna-se turbulenta, não sendo possível calcular a resistência a partir das equações de Navier-Stokes sendo necessário determiná-la experimentalmente. A natureza

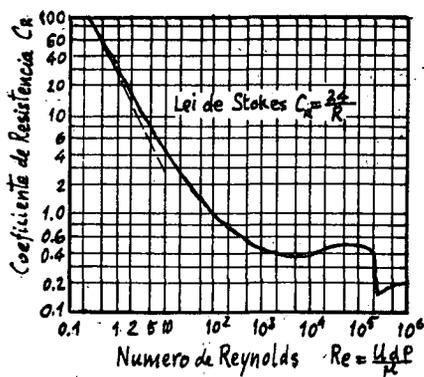


Fig. 6

da corrente está indicada esquematicamente na figura e a variação do coeficiente de resistência com o número de Reynolds mostra-se no gráfico junto.

7 — Conclusões.

Das equações de Navier-Stokes obtiveram-se as equações dos movimentos lentos das quais se fez uma aplicação ao problema de Stokes determinando a velocidade e a pressão em qualquer ponto do fluido. A força exercida sobre a esfera, $R = 6\pi a\mu U$, válida para números de Reynolds até próximos da unidade consta de duas partes: uma devida aos esforços normais de valor $2\pi a\mu U$ chamada *resistência de forma* (em inglês, *form drag*), outra devida aos esforços cortantes de valor $4\pi a\mu U$ chamada *resistência de atrito superficial* (em inglês, *surface friction drag*).

A medida que aumenta o número de Reynolds deixa de ser válida a fórmula de Stokes; apresenta-se graficamente a variação de C_R com o número de Reynolds.

Em números futuros da Gazeta de Física apresentaremos outras aplicações das equações de Navier-Stokes, particularmente aquelas em que as forças de inércia são maiores que as forças de viscosidade. Destas aplicações fazem parte os importantes problemas da camada limite cujo conceito é devido a Prandtl.

BIBLIOGRAFIA

- [1] HERMANN SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*.
- [2] HORACE LAMB, *Hydrodynamics*.
- [3] LANDAU e LIFSHITZ, *Fluid Mechanics*.
- [4] SOMMERFELD, *Mechanics of Deformable Bodies*.
- [5] JOOS, *Theoretical Physics*.
- [6] GOLDSTEIN, *Modern Developments in Fluid Dynamics*.

As ideias que a «Gazeta de Física» defende e propaga tornam a sua expansão do maior interesse para todos os seus leitores. Tragam-nos pois novos assinantes.

A «Gazeta de Física» vive pela Ciência e para a Ciência.