cia, como a razão entre a capacidade de um condensador que tem por dieléctrico essa substância, e a capacidade do mesmo condensador quando o dieléctrico é o vazio. Daqui concluimos evidentemente que a constante dieléctrica é um número puro. Uma vez mais se esquecem as dimensões.

*

Ao tratar da máquina de Van de Graaff, o autor classifica as máquinas electrostáticas em duas categorias: de fricção e de influência. Mas a qual dos tipos pertencerá a máquina de Van de Graaff?

Mais curioso porém é esta insólita afirmação: *nalgumas máquinas os investigadores trabalham dentro da esfera oca, ficando assim isentos do perigo das descargas.* Talvez que durante a construção das esferas mais antigas isso se tivesse alguma vez passado; depois pôs-se uma variedade de acessórios no interior das esferas e não cabe lá ninguém. Mas, mesmo se coubesse, quem se poria lá, a 10 milhões de volts? Seria de facto uma gaiola de Faraday: não se morria por efeito de descarga eléctrica — apenas mais lentamente, por efeito das radiações ionizantes.

NOTA FINAL

A conclusão a tirar de tudo o que ficou dito é evidente. Talvez que a existência de Cursos como o do PSSC(*) facilite a urgente tarefa de dar aos estudantes do 3.º ciclo liceal um livro de Física respeitador das suas capacidades intelectuais.

(*) Physical Science Study Committee. Existe uma tradução deste Curso em espanhol, com o título: Física.

Sur quelques propriétés géométriques du groupe des rotations

par GEORGES LOCHAK

(Laboratoire Joliot-Curie de Physique Nucléaire, Orsay; Institut Henri Poincaré, Paris)

1 — Introduction

Il arrive souvent qu'on puisse, parmi les propriétés d'un corps, trouver un certain nombre de propriétés «moyennes» qui permettent de définir, avec plus ou moins de légitimité, un système d'axes liés à ce corps. Il arrive dès lors, que d'importants aspects de son comportement soient liés aux seuls rotations qu'effectue ce corps, ou plutôt le système d'axes qu'on lui a rattaché, par rapport à un systeme de référence convenablement choisi.

De telles circonstances se retrouvent, comme on sait, dans de nombreux et importants problèmes de physique qui vont de la théorie du gyroscope à celle des particules élémentaires en passant par les spectres moléculaires et la structure du noyeau atomique.

Ainsi s'expliquent les efforts des physiciens en vue de mieux connaître et mieux utiliser le groupe de rotations.

Peut être n'est-il pas inutile, en revanche, de remarquer que les succès mêmes de cette théorie et la propension des hommes à utiliser les idées anciennes plutôt qu'en chercher de nouvelles, pousse parfois les physiciens à quelque exagération dans leur recherche à tout prix, dans tout corps matériel, d'un comportement global qui le plie aux exigences du groupe des rotations.

Mais s'inquiéter des limites d'une théorie n'est pas en méconnaître les mérites ni les beautés.

Nous nous occuperons essentiellement dans cet exposé de l'importante propriété de double connexité du groupe des rotations. Cette propriété était ignorée de la physique classique et c'est la théorie quantique des particules à spin demi-entier (les fermions) qui a révélé son importance fondamentale. Malheureusement, dans la plupart des livres que lisent les physiciens cette question n'est qu'effleurée et, de ce fait, difficile à comprendre. Je voudrais en faire ici un exposé aussi simple et géométrique que possible.

2 — Les paramètres d'une rotation

Rapportons l'espace euclidien à trois dimensions (R^3) à un système d'axes orthogonaux Ox_1, Ox_2, Ox_3. La rotation d'un corps solide dans cet espace est en général définie par les angles d'Euler, mais les raisonnements fondamentaux gagnent à ce qu'on définisse une rotation par un axe et un angle.

Nous repèrerons l'axe d'une rotation à l'aide d'un vecteur unité $\vec{i}$ défini par son azimut α $(0 \leqq \alpha \leqq 2\Pi)$ et sa colatitude β $(0 \leqq \beta \leqq \Pi)$, de sorte que ses composantes soient:

$$(1) \qquad i_1 = \sin\beta\cos\alpha, \quad i_2 = \sin\beta\sin\alpha, \quad i_3 = \cos\beta.$$

Désignons par φ l'angle d'une rotation autour de $\vec{i}$ et toute rotation sera définie par un vecteur

$$(2) \qquad \vec{\xi} = F(\varphi)\vec{i},$$

donc par trois nombres

$$(3) \quad \xi_1 = F(\varphi)\sin\beta\cos\alpha, \quad \xi_2 = F(\varphi)\sin\beta\sin\alpha, \quad \xi_3 = F(\varphi)\cos\beta,$$

où F est une fonction *réelle continue*. La direction du vecteur $\vec{\xi}$ nous donnera donc l'axe de la rotation et l'angle nous sera donné par la longueur de ce vecteur.

Quel choix de la fonction $F(\varphi)$ devons nous faire pour que les nombres ξ_1, ξ_2, ξ_3 constituent un bon système de paramètres? Il est naturel d'exiger que la correspondance entre les vecteurs et les éléments du groupe des rotations soit *biunivoque*. Il faut pour cela que $F(\varphi)$ soit monotone: en effet, si $F(\varphi)$ admettait un extrèmum pour une valeur quelconque $\varphi = \varphi_0$, elle pourrait prendre une même valeur, pour deux valeurs différentes de φ voisines de φ_0. Un même vecteur $\vec{\xi}$ pourrait alors définir deux rotations différentes.

On prend en général $F(\varphi) \equiv \varphi$ et donc le système de paramètres

$$(4) \quad \xi_1 = \varphi\sin\beta\cos\alpha, \quad \xi_2 = \varphi\sin\beta\sin\alpha, \quad \xi_3 = \varphi\cos\beta.$$

Rappelons nous maintenant que deux rotations autour d'un même axe et dont les angles diffèrents de $2k\Pi$ sont identiques. D'autre part, deux rotations d'axes et angles opposés sont identiques. Il s'ensuit que sont également identiques deux rotations autour d'axes opposés et d'angles respectifs $\Pi + \varphi$ et $\Pi - \varphi$.

Les paramètres ξ_1, ξ_2, ξ_3 dans (4) nous fourniront donc *toutes* les rotations si nous prenons

$$0 \leqq \varphi \leqq \Pi.$$

Les points $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ rempliront la sphère Σ de rayon Π centrée à l'origine et les points *intérieurs* à cette sphère sont en correspondance biunivoque avec les rotations d'angle φ différent de $(2k+1)\Pi$ et d'axe quelconque. Le centre de Σ représente la rotation identique (d'angle nul); son axe est indéterminé. Une *classe* de rotations, c. à d. toutes les rotations qui ont même angle φ occupe la surface d'une sphère de rayon φ.

À un point de la surface de Σ correspond une rotation et une seule d'angle Π autour d'une certain axe. Au point diamètralement opposé correspond une rotation d'angle $-\Pi$ autour de l'axe opposé. Mais ces deux rotations sont *identiques* puisqu'elles diffèrent de 2Π et ainsi, deux points diamétralement opposés sur la surface de Σ représentent une même rotation. Nous n'avons donc pas la correspondance biunivoque cherchée.

Nous ne saurions échapper à cet «accident»: le seul moyen serait de supprimer l'un des hémisphères de la surface de Σ. Mais alors Σ ne serait plus *fermée* et nous ne saurions plus définir des fonctions *continues* sur le groupe des rotations. Force nous est d'accepter ces circonstances comme une propriété que nous étudions plus loin.

3 — La continuité du groupe des rotations

Considérons dans l'espace R^3 un corps solide de référence, C, et effectuons sur lui une rotation réprésentée par un point ξ dans Σ. Un point de C qui se trouvait initialement en un point m de R^3 se trouvera maintenant en un point M (appelé *conséquent* de m). Effectuons sur C une autre rotation ξ'. Le conséquent de m sera cette fois une point M'. Si ξ et ξ' coincident, M et M' coincident. Si l'on se donne un nombre ε, si petit soit-il, on pourra toujours trouver un nombre η tel que M' soit à moins de ε de M pourvu que ξ' se trouve à moins de η de ξ: donc

$$|M - M'| < \varepsilon$$

dès que

$$|\xi - \xi'| < \eta. \tag{5}$$

On dit des rotations ξ' qui vérifient (5) qu'elles se trouvent *dans un voisinage* η de la rotation ξ. Nous pourrions ainsi définir la notion de *limite* d'une suite ξ_n de rotations et la notion de continuité: le groupe des rotations est *continu*.

Faisons maintenant parcourir au point ξ' dans Σ une courbe continue γ (un *chemin*) qui joint le centre 0 de Σ (rotation identique) au point ξ.

A chaque point ξ' de γ correspond la position qu'ocuperait notre corps de référence C dans R^3 si l'on effectuait sur lui la rotation ξ' à partir de sa position initiale.

Quand ξ' parcourt γ, le corps C part de sa position initiale et passe par une suite continue de positions intermédiaires jusqu'à sa position finale quand ξ' rejoint ξ. Le chemin γ représente ainsi le processus physique par lequel on peut effectuer une rotation sur le solide C.

Le chemin (et donc le processus physique) le plus simple consisterait à joindre 0 à ξ le long du rayon de la sphère qui porte ξ. Le corps tourne alors autour d'un axe fixe qui est celui de la rotation ξ, d'un angle φ' qui varie de zéro à sa valeur finale φ qui correspond à ξ.

4 — La double connexité du groupe des rotations

On peut évidemment, d'une infinité de manières, effectuer sur le corps C la rotation ξ. Il leur correspond une infinité de chemins γ qui joignent le centre 0 de Σ au point ξ.

Soient deux tels chemins γ et γ'. Ils sont différents mais ont mêmes extremités 0 et ξ. Supposons que l'on puisse déformer *continûment* γ', ses extrèmités restant fixes, de façon à le faire coincider avec γ: nous dirons dans ce cas que γ et γ' sont *homotopes*.

La sphère étant un domaine simplement connexe, on pourrait croire que tous les chemins qui joignent deux rotations données (par exemple le centre 0 de Σ à une rotation ξ quelconque) sont homotopes: en effet, les lignes continues qui joignent deux points de la sphère peuvent être continument déformées jusqu'à venir coincider avec l'une d'entre elles.

S'il en était ainsi, le groupe des rotations serait par définition simplement connexe, mais il n'en est rien.

En effet, il est des chemins que l'on doit considérer comme *continus* sur le groupe des rotations mais qui sont discontinus dans la sphère euclidienne.

La figure 1 représente la sphère Σ. On y voit trois chemins qui vont du centre 0 de Σ à un point ξ.

— *Le chemin* γ_1 est simplement le rayon 0.

— *Le chemin* γ_1' va du centre 0 à un point A de la *surface* de Σ, puis de A à ξ.

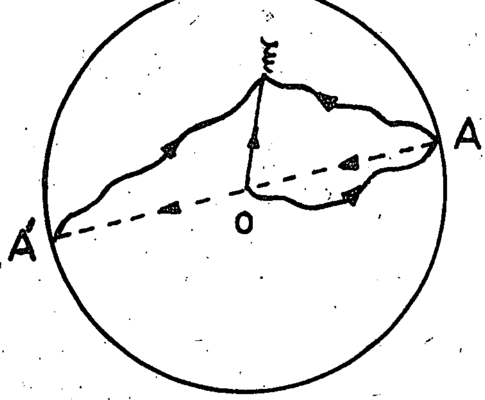

fig.1

Ce chemin $\gamma_1'\,(O\,A\,\xi)$ est évidemment homotope à $\gamma_1(O\xi)$.

— *Le chemin* γ_2 va du centre 0 à un point A de la surface de Σ, puis *saute* sans intermédiaire au point A' qui lui est diamétralement opposé et va enfin de A' à ξ.

Malgré le saut $A\,A'$, ce chemin $\gamma_2(O\,A\,A'\,\xi)$ est continu sur le groupe des rotations puisque A et A', ainsi qu'on l'a vu plus haut, représentent une seule et même rotation. Cependant, γ_2 *n'est pas homotope à* γ_1.

Il ne saurait être question, en effet, de rapprocher continument A de A' car les deux points cesseraient d'être diamétralement opposés à la surface de Σ, et ils ne représenteraient plus la même rotation tout en restant à distance finie l'un de l'autre. Le chemin ne serait plus continu sur le groupe des rotations.

Si maintenant nous considérons (fig. 2) deux chemins $O\,A\,A'\,\xi$ et $O\,B\,B'\,\xi$ tels que γ_2, on voit qu'une déformation continue peut amener en coincidence A et B d'une part et A' et B' de l'autre. Ces deux chemins sont donc homotopes entre eux.

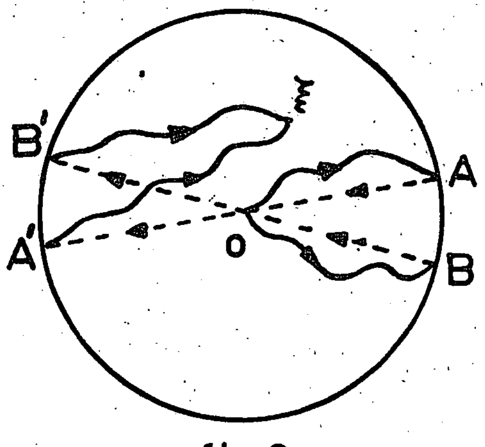

fig.2

Nous avons ainsi obtenu deux *classes d'équivalence* parmi les chemins continus sur le groupe des rotations: la classe γ_1 des chemins homotopes à γ_1 et la classe γ_2 des chemins homotopes à γ_2. Ces classes sont bien distinctes, et on ne saurait passer de l'une à l'autre par homotopie.

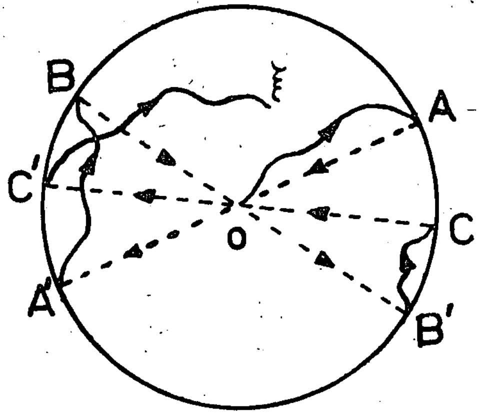

fig.3

Nous devons nous demander maintenant s'il n'existe pas de chemins γ_3 qui feraient plusieurs sauts à la surface de la sphère Σ et ne seraient homotopes ni à γ_1, ni à γ_2.

Examinons pour cela par exemple le chemin $\gamma_3\,(O\,A\,A'\,B\,B'\,C\,C'\,\xi)$ de la figure 3 qui comporte trois sauts $A\,A'$, $B\,B'$, et $C\,C'$.

Nous pouvons, par déformation continue, amener par exemple C en B', et donc C' en B. Effectuer sucessivament les sauts $B\,B'$ et $C\,C'$ revient alors à rester en B. Le chemin γ_3 est donc homotope à un chemin $O\,A\,A'\,B\,\xi$ qui ne comporte qu'*un seul saut.* Donc γ_3 est de la classe γ_2.

Plus généralement, on montrerait par récurrence qu'*un chemin comportant 2n sauts est de la classe* γ_1 *et qu'un chemin comportant* $2\,n+1$ *sauts est de la classe* γ_2.

On voit donc que les chemins continus qui joignent deux éléments du groupe des rotations se divisent en deux classes d'équivalence et deux seulement. On exprime cela en disant que *le groupe des rotations est doublement connexe.*

5 — Fonctions uniformes, fonctions multiformes

Soit une fonction continue sur le groupe des rotations. Ce sera une fonction $f(\xi)= =f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ continue par rapport aux variables ξ_1, ξ_2, ξ_3. Ceci veut dire qu'étant donné un nombre ε, on peut trouver un nombre η tel que $|f(\xi)-f(\xi')|<\varepsilon$ dès que $|\xi-\xi'|<\eta$; mais ceci ne veut pas du tout dire que $f(\xi)$ doit prendre la même valeur en deux points diamètralement opposés de la surface de la sphère Σ, sous prétexte que ces deux points représentent une même rotation. La continuité est une propriété locale! S'il se trouve qu'en deux tels points diamètralement opposés $f(\xi)$ a la même valeur, on dit que $f(\xi)$ est *uniforme.* Dans le cas contraire, on dit que $f(\xi)$ est *multiforme.*

Pour mieux nous rendre compte de cela, procédons comme suit. Partons d'un point ξ_0 quelconque et revenons y en suivant les valeurs de $f(\xi)$ le long d'un chemin fermé. Deux cas peuvent se présenter:

1) Le chemin fermé comporte un nombre pair de sauts entre des points diamétralement opposés à la surface de la sphère Σ: il est du type γ_1. D'après le paragraphe précédent, on montre facilement qu'il est *homotope à zéro,* c. à d. qu'on pourra, par déformation continue, l'écraser sur ξ_0. La continuité de $f(\xi)$ veut alors que, par un tel chemin $f(\xi)$ revienne en ξ_0 avec une valeur égale à sa valeur initiale.

2) Le chemin comporte une nombre *impair* de sauts à la surface de Σ. Il est du type γ_2. S'il se trouve que par un tel chemin également, $f(\xi)$ revient en ξ_0 avec sa valeur initiale, nous dirons qu'elle est *uniforme.*

Mais ce chemin n'étant pas homotope à zéro, la continuité de $f(\xi)$ ne l'oblige nullement à revenir en ξ_0 avec sa valeur initiale. Elle peut revenir, comme on dit, avec une nouvelle *détermination.* S'il en est ainsi, on dit que $f(\xi)$ est multiforme.

Repartons alors de ξ_0 avec cette seconde détermination de $f(\xi)$, le long d'un chemin fermé qui comporte, lui aussi, un nombre impair de sauts et est donc du type γ_2. $f(\xi)$ reviendra en ξ_0 avec une troisième valeur. Mais cette fois, depuis le premier départ de ξ_0, on aura parcouru successivament deux chemins de type γ_2; le chemin total parcouru comportera donc un nombre *pair* de sauts (somme de deux nombres impairs). Il est donc du type γ_1 et, comme tel, homotope à zéro. Nous revenons ainsi au cas précédent et il faut que $f(\xi)$ retrouve en ξ_0 sa valeur initiale: la troisième valeur de f en ξ_0 est égale à la première.

Nous pouvons donc affirmer qu'*une fonction continue sur le groupe des rotations comporte au plus deux déterminations.*

Pour donner des exemples, prenons des fonctions qui ne dépendent pas de l'axe de la rotation mais seulement de son angle. Le lecteur vérifiera sans peine que

$f(\xi)=\sin\varphi$ est une fonction continue uniforme.

$f(\xi)=\sin\frac{\varphi}{2}$ est une fonction continue multiforme.

$f(\xi)=\sin\frac{\varphi}{3}$ *n'est pas une fonction continue sur le groupe des rotations.*

En effet, elle peut revenir en un point ξ_0 avec une valeur différente de sa valeur initiale après avoir parcouru un chemin fermé homotope à zéro. Si le chemin comporte, par exemple, deux sauts à la surface de Σ, $f(\xi)$ partira avec une détermination $f(\xi_0) = \sin\frac{\varphi_0}{3}$ de ξ_0 et y reviendra avec la valeur

$$f = \sin\frac{\varphi_0 + 4\Pi}{3} = \sin\frac{\varphi_0 + \Pi}{3} \neq \sin\frac{\varphi_0}{3}.$$

6 — La sphère S^4

Ce qui vient d'être dit du groupe des rotations n'est pas sans rappeler les propriétés du domaine de définition d'une *fonction* analytique, disons par exemple $\sqrt{z}$. Remarquons même que sur le domaine de définition doublement connexe de $\sqrt{z}$, la fonction $\sqrt{z}$ est, comme on sait, multiforme et a deux déterminations, la fonction z est uniforme, alors que $\sqrt[3]{z}$ n'est pas continue, et ceci nous rappelle les propriétés des trois fonctions que nous venons de citer.

On sait qu'en Analyse, dans le but de n'opérer que sur des fonctions uniformes, on remplace le domaine de définition de la fonction analytique par un domaine simplement connexe, la surface de Riemann. Sur cette surface, la fonction est uniforme, mais en revanche la correspondance entre la surface de Riemann et le domaine initial n'est pas biunivoque. A un point de ce dernier correspondent autant de points sur la surface de Riemann que la fonction multiforme avait de déterminations.

En théorie des groupes, on sait faire une construction analogue et l'être qui tient lieu de surface de Riemann est le *recouvrement universel du groupe*. Nous allons chercher celui du groupe des rotations.

Dans les formules (3), nous prendrons maintenant

$$F(\varphi) = \sin\frac{\varphi}{2},$$

nous poserons

$$(6) \qquad \varphi = 2\gamma,$$

et nous aurons donc les nouveaux paramètres

$$(7) \qquad \xi_1 = \sin\gamma \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha,$$
$$\xi_2 = \sin\gamma \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha, \quad \xi_3 = \sin\gamma \cdot \cos\beta.$$

Si nous prenions $0 \leqq \varphi \leqq \Pi$ (et donc $0 \leqq \gamma \leqq \frac{\Pi}{2}$ comme dans (4)), $\sin\gamma$ serait une fonction monotone dans cet intervalle et le système de paramètres (7) serait tout à fait analogue aux paramètres (4). Notament, un chemin dans le groupe des rotations le long duquel l'angle de la rotation varie de 2Π serai du type γ_2 et aurait donc une discontinuité à la surface de la sphère Σ (*) que remplissent les points ξ de coordonnées (7).

Mais nous prendrons maintenant

$$(8) \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 2\Pi, \text{ donc } 0 \leqq \gamma \leqq \Pi.$$

Cette fois ci, tout point de cette sphère unité représente non pas une, mais *deux rotations* qui ont même axe et les angles respectifs 2γ et $2\Pi - 2\gamma$, puisque $\sin\gamma = \sin(\Pi - \gamma)$.

En revanche, ceci nous permet de parcourir un chemin fermé continu le long duquel l'angle φ de la rotation augmente 2Π: en effet, partons du centre de la sphère et parcourons un chemin le long duquel l'angle φ (et donc γ) ne fait que croître. Quand φ aura atteint Π, γ atteindra $\frac{\Pi}{2}$ et le point ξ donné par (7) sera sur la sphère unité. Si φ continue à augmenter, γ prendra des valeurs supérieures à $\frac{\Pi}{2}$ et ξ reviendra *continument* à l'intérieur de la sphère.

Nous avons donc, dans nos paramètres ξ, gagné en continuité ce que nous avons perdu en univocité. Cherchons maintenant à retrouver l'univocité.

Plongeons l'espace R^3 à trois dimensions avec la sphère (7) dans un espace euclidien

(*) Cette sphère est ici la sphère unité, puisque $0 \leqslant \sin\gamma \leqslant 1$.

R^4 à quatre dimensions. L'espace R^3 est alors l'hyperplan (à trois dimensions) passant par l'origine de R^4 et orthogonal à l'axe x_4. D'après (7), les rotations ayant même angle $\varphi = 2\gamma$ sont représentées dans cet hyperplan R^3 sur une sphère de rayon $\sin \gamma$. Les rotations d'angle $\varphi = 2\Pi - 2\gamma$ sont, elles aussi, sur une sphère mais elle coïncide avec la première, puisqu'elle a même rayon $\sin \gamma$.

Grace à la quatrième dimension de R^4, nous allons séparer ces deux sphères en convenant qu'aux rotations d'angle 2γ ne correspond plus la sphère à trois dimensions, et de rayon $\sin \gamma$ centrée à l'origine dans R^3, mais celle qu'on obtient en la translatant le long de x_4 d'un vecteur $\cos \gamma$. Les deux sphères précédentes se trouveront maintenant symétriques dans R^4 par rapport à l'hyperplan R^3, puisque $\cos \gamma = -\cos(\Pi - \gamma)$.

D'après (7), les coordonées d'un point d'une telle sphère dans R^4 seront donc

$$(9)\quad \xi_1 = \sin\gamma \sin\beta \cos\alpha\,,\ \ \xi_2 = \sin\gamma\sin\beta\sin\alpha\,,$$
$$\xi_3 = \sin\gamma\cos\beta\,,\ \ \xi_4 = \cos\gamma\,,$$
$$0 \leqq \alpha \leqq 2\Pi\,,\ \ 0 \leqq \beta \leqq \Pi\,,\ \ 0 \leqq \gamma \leqq \Pi\,.$$

On voit que $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 1$ et d'après les domaines de variation de α, β, γ, les points M de coordonnées $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ balayent donc la surface (à trois dimensions) de la sphére unité S^4 dans l'espace R^4. Les angles α, β, γ, sont les coordonnées sphériques sur S^4.

A tout point de S^4 correspond une rotation et une seule, mais à une rotation correspondent *deux points* de S^4 diamètralement opposés (*). En particulier, au pôle nord N de S^4 $(\gamma = 0)$ correspond une rotation d'angle nul et au pôle sud correspond une rotation d'angle 2Π.

Un chemin continu sur S^4 représente un chemin sur le groupe des rotations et il est facile de voir la forme que prend ici la discussion du §4.

On peut joindre la rotation unité à une rotation quelconque par deux types de chemins différents. En effet la rotation unité était au centre O de la sphère Σ, elle est maintenant au pôle nord (*) de $S^4 (\gamma = 0)$ et nous pouvons joindre sur S^4 le pôle nord N aux *deux points* diamètralemente opposés qui représentent la rotation que nous considérons. Les chemins qui joignent le point N à l'un de ces points sont homotopes entre eux mais ne sont pas homotopes à ceux qui joignent le point N à l'autre point qui représente cette rotation.

On voit donc aussitôt qu'il y a deux types de chemins et deux seulement. De même, on distingue les deux types de chemins *fermés* sur le groupe des rotations. En effet, à un chemin fermé sur le groupe des rotations peuvent correspondre sur S^4 deux types de chemins: les chemins fermés qui partent d'un point et y reviennent et les chemins ouverts qui partent d'un point et rejoignent le point diamètralement opposé, qui correspond donc, lui aussi, à la rotation initiale. Que ces deux types de chemins ne sont pas homotopes est une évidence.

A une fonction continue sur le groupe des rotations correspond une fonction continue sur S^4 est *uniforme*. En effet, la sphère S^4 est simplement connexe, tout les chemins fermés y sont donc homotopes à zéro et une fonction qui part d'un point doit y revenir avec sa valeur initiale si on veut qu'elle soit continue (**).

Sur le groupe des rotations, nous appelions *uniformes* les fonctions qui retrouvent leur valeur initiale quand l'angle de la rotation augmente de 2Π. Sur S^4 de telles fonctions prendront donc des valeurs égales en des points diamètralement opposés. Les fonctions continues sur S^4 et qui ne jouissent pas de cette propriété correspondront à des fonctions multiformes sur le groupe des rotations.

(*) Les rotations correspondant à deux points diamètralement opposés sur S^4 ont leur axe et leur angle opposés: elles sont identiques.

(*) Nous pourrions évidemment refaire le raisonnement qui va suivre en partant du pôle sud.

(**) Et même tout simplement definie!

7 — Le recouvrement universel du groupe des rotations. Les transvections sur S^4

Ainsi donc, avec la sphère S^4, nous avons réalisé une construction géométrique analogue à celle de la surface de Riemann d'une fonction analytique.

Si nous savons induire sur S^4 une structure de groupe telle que le groupe des rotations soit un *homomorphisme* de ce groupe, nous aurons le recouvrement universel du groupe des rotations.

Mais une telle structure nous saute aux yeux: c'est simplement celle du groupe des déplacements continus, ou *transvections* sur la surface S^4. A chaque rotation correspondent en effet deux transvections qui consistent à partir du pôle nord de S^4 vers chacun des deux points qui représentent la rotation considérée. A chaque transvection correspond une seule rotation que l'on trouve en cherchant le point auquel on aboutit sur S^4 en effectuant à partir du pôle nord la transvection considérée. A la transvection nulle correspond la rotation nulle, à deux transvections inverses l'une de l'autre correspondent des rotations inverses et on montrerait qu'au produit de deux transvections correspond le produit des rotations homologues. Bref, le groupe des rotations est un *homomorphisme* du groupe des transvections sur S^4 qui est donc le recouvrement cherché.

Disons plutôt que nous avons ainsi une *réalisation* de ce recouvrement. C'en est une autre qu'on utilise en général sous le nom de *groupe unitaire unimodulaire*. On peut construire très simplement ce groupe qui est isomorphe au groupe des transvections sur S^4, en posant

$$a = \xi_4 + i\,\xi_3\,;\quad b = \xi_2 + i\,\xi_1 \quad \text{et} \tag{10}$$

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix} \tag{11}$$

Ainsi, à chaque point $\{\xi_k\}$ sur S^4, donc à chaque transvection sur S^4 et aussi aux deux rotations qu'elle représente, correspond une matrice U et une seule.

Le produit *hermitien* des deux lignes de la matrice U est nul et comme $\{\xi_k\}$ est un point de S^4, on a $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 1$ d'où

$$a\,a^* + b\,b^* = 1\,. \tag{12}$$

Il s'ensuit que U est *unitaire* et que son déterminant est égal à 1 (on dit qu'elle est *unimodulaire*). Il est clair que l'inverse de U possède les mèmes propriétés, ainsi que le produit UU' de deux telles matrices. Les matrices U constituent donc bien un groupe dont on montre qu'il est isomorphe à celui des transvections sur S^4 et qu'il constitue ainsi, lui aussi, une réalisation du groupe de recouvrement du groupe des rotations.

L'étude de ces matrices U se trouve dans tous les livres qui traitent du groupe des rotations.

Observons que la matrice U est évidemment une fonction *continue* sur S^4 mais qu'en deux points diamètralement opposés sur S^4 elle prend des signes opposés (on le voit sur (10)). La matrice U est donc une fonction *multiforme* sur le groupe des rotations et c'est ainsi que, dans les livres, cette notion même est introduite.

Le seul but de cet exposé était d'essayer de faire sentir à un lecteur qui serait peu familier avec la théorie des groupes le sens géométrique qu'il convient d'attacher aux fonctions multiformes.

Rappelons enfin que l'étude de ces fonctions n'est pas un raffinement stérile mais le fondement même de la théorie du spin. Si bien que très souvent, en physique quantique, le groupe «physique» n'est pas celui des rotations, mais son recouvrement universel pris sous la forme des transvections sur S^4 ou sous la forme des matrices U.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Cartan, *Leçons sur la théorie des spineurs*, t. I, Paris (1938).

[2] E. Wigner, *Group theory and its applications to the quantum mechanics of atomic spectra*, New-York (1959).

[3] L. S. Pontriagin, *Topological groups*, New-York.

[4] G. Lochak, *Quelques problèmes sur le groupe des rotations et la toupie quantique*, Cahiers de Physique **13**: 41-80, (1959).