

COVID em modelos e números

Jorge Buesco

Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Muito se falou, nestes tempos impensáveis, de “modelos matemáticos” para a COVID. Esses modelos não são mais do que sistemas de equações diferenciais (ou às diferenças) para modelar a dinâmica da epidemia.

O modelo fundamental para o estudo da dinâmica de doenças infecciosas foi formulado em 1927 por Kermack e McKendrick. Conhecido como modelo SIR (Susceptíveis-Infetados-Removidos), está na base de todos os modelos mais sofisticados para doenças específicas, chamados modelos de compartimentos. Embora seja neste contexto um *toy model*, é muito instrutivo descrevê-lo.

Em face de um agente infeccioso, a população total divide-se em três grupos (ou compartimentos): os susceptíveis $S(t)$ são os elementos da população que podem contrair a doença; os infectados $I(t)$ são os que estão infectados e contagiosos; os removidos $R(t)$ são os que recuperaram da doença e desenvolveram imunidade, ou morreram. Há uma sobressimplificação em relação a uma doença como a COVID; por exemplo, não existe período de latência (ou pré-infecciosidade). Isso pode ser modelado incluindo um compartimento extra (geralmente designado por $E(t)$, de expostos: infectados que ainda não estão contagiosos) num modelo mais sofisticado.

Vamos agora modelar a dinâmica das transições entre os compartimentos S, I e R. Como o risco de um susceptível ser infectado é tanto maior quanto maior for o número de infectados, parece razoável supor que a taxa a que surgem novos infectados por unidade de tempo é proporcional tanto a $S(t)$ como a $I(t)$; vamos supor que esta taxa é $\beta S(t) I(t)$ onde β , o coeficiente de transmissão, é uma constante. Por outro lado, os infectados acabam por recuperar (ou morrer) ao fim de um certo tempo característico da doença; vamos designá-lo por $1/\alpha$, de forma a que α tenha, tal como β , por dimensão, o inverso da grandeza tempo.

Assim, a dinâmica das transições entre classes no modelo SIR é descrita pelo sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} S' = -\beta S I \\ I' = \beta S I - \alpha I \\ R' = \alpha I \end{cases} \quad (1)$$

correspondente à figura 1.



Figura 1 - Dinâmica do modelo SIR.

Há muitos pressupostos subjacentes a esta formulação, entre os quais a mistura homogénea dos indivíduos e contactos aleatórios, não muito diferentes dos correspondentes a modelar um fluido em Física como um meio contínuo.

Podemos explorar o modelo SIR para responder a algumas perguntas cruciais. Suponhamos, como foi o caso da COVID, que temos uma nova doença infecciosa, para a qual a imunidade é nula. Vamos designar por N a população total (note-se que se tem sempre $N = S(t) + I(t) + R(t)$), e supor que em $t = 0$ surgem $I(0)$ indivíduos infectados. Será que vai haver um surto? E como se propagará a doença?

É simples, a partir do sistema (1), responder a esta pergunta. Se no instante inicial $t = 0$ não há imunidade, todos os indivíduos são susceptíveis; ou seja, $S(0) = N$ (menos o número inicial de infectados $I(0)$ que se supõe desprezável face a N). Nesse caso, enquanto o número de infectados $I(t)$ for muito pequeno face a N , $S(t)$ é aproximadamente igual a N .

Substituindo, na segunda equação do sistema (1), e resolvendo, obtemos

$$I(t) = I(0)e^{(\beta N - \alpha)t} = I(0)e^{rt}. \quad (2)$$

Daqui segue-se que o número de infectados tende para zero se $r = (\beta N - \alpha) < 0$, não havendo surto. Por outro lado, $I(t)$ cresce exponencialmente se $r = (\beta N - \alpha) > 0$, ou seja, se

$$R_0 = \frac{\beta N}{\alpha} > 1.$$

O primeiro caso de COVID foi detectado em Portugal a 2 de Março. Mostra-se a seguir, na figura 2, a evo-

lução dos casos detectados até 22 de Março: uma exponencial quase perfeita, com uma taxa de crescimento diário de 32 %. Isto correspondia aproximadamente a duplicar os casos todos os dois dias e meio.

$$\beta = p \cdot c,$$

onde c é o número de contactos per capita e p é a probabilidade de transmissão por contacto. Para baixar β o mais rapidamente possível a receita é simples: reduzir o mais possível ambos os factores.

Foi esse o objectivo das medidas tomadas. Reduzir o número de contactos foi conseguido através do confinamento. A redução da probabilidade de transmissão por cada contacto conseguiu-se através do distanciamento físico, do uso de máscaras, da higienização de superfícies, etc. Baixando os dois factores do produto reduziu-se enormemente o parâmetro β trazendo R para baixo de 1.

O resultado deste processo foi controlar a curva de infectados activos $I(t)$ interrompendo a fase exponencial. A curva inflectiu a 31 de Março, crescendo cada vez mais devagar e

encaminhando-se para um pico (fig. 3). Embora os números da DGS não permitam este cálculo directamente devido à falta de fiabilidade do número de recuperados, um método desenvolvido em paralelo com João Seixas (IST) e em colaboração com José Carlos Pereira permite-nos estimar a curva de infectados activos; o pico terá acontecido entre 9 e 15 de Abril, com cerca de 15 000 infectados activos em simultâneo.

Número de Infectados em Portugal

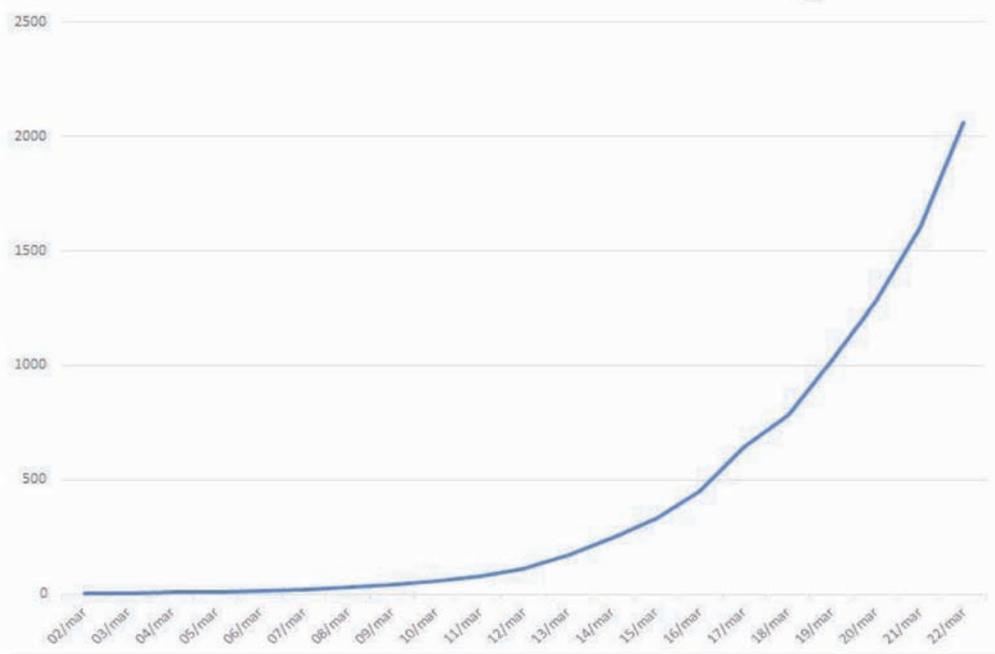


Figura 2 - Evolução dos casos nas primeiras 3 semanas

O modelo SIR permite utilizar estes dados para estimar o R_0 de Portugal. Com efeito, a partir da definição de R_0 o expoente r em (2) escreve-se $r = (R_0 - 1) \alpha$ em que $1/\alpha$ é o tempo médio em que um doente está infeccioso – o que para a COVID é, em média, de 10 a 14 dias. Resolvendo para R_0 obtemos uma estimativa de 3,77, o que está de acordo com o valor actualmente aceite na literatura (valor mais provável 3,68, intervalo de confiança [2,86; 4,75]).

Como todos hoje sabemos, os objectivos das medidas de contenção adoptadas tiveram o objectivo de “baixar o R ”, diminuindo o número de reprodução do seu valor original para um valor abaixo de 1 e controlando o surto. Também este processo tem uma interpretação matemática muito clara. Recordemos que $R_0 = \frac{\beta N}{\alpha}$, onde N é a população total e $1/\alpha$ é o período em que um doente permanece infeccioso. Sobre N não é possível agir; quanto a α , o aumento da eficácia de detecção de casos e o seu isolamento permitem aumentar progressivamente o seu valor. Contudo, para uma acção de choque é necessário intervir no parâmetro β .

Ora, por construção do modelo SIR, o coeficiente de transmissão tem a expressão

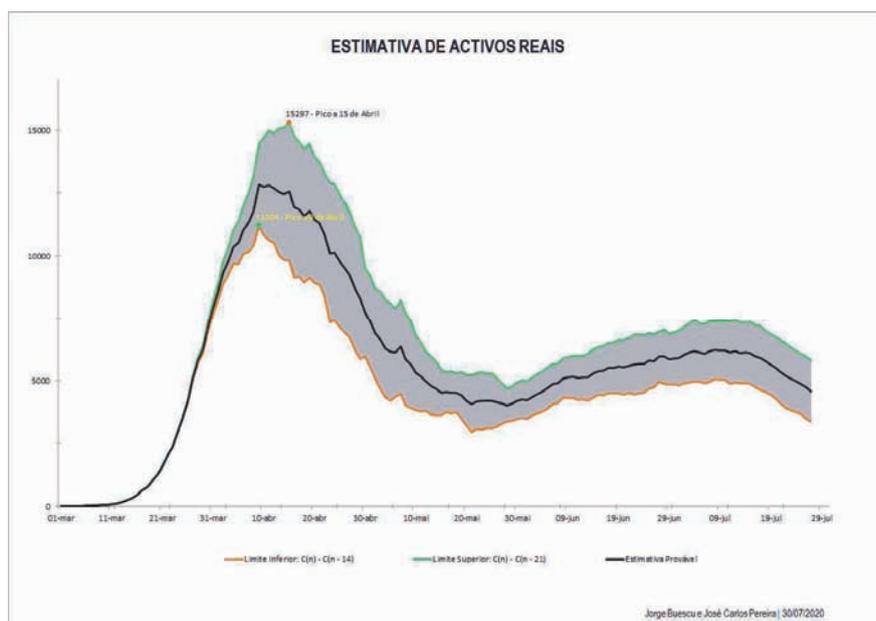


Figura 3 - Modelação do número de infectados activos em Portugal (Julho 2020)

O período que se seguiu ao desconfinamento (iniciado a 4 de Maio) trouxe novas incógnitas; apesar das medidas de distanciamento, uso generalizado de máscaras e restrições, o acréscimo de mobilidade trouxe inevitavelmente o aumento da probabilidade de contágio. Assistimos assim, como previsto no final de Maio por Manuel do Carmo Gomes (professor da FCUL e colaborador da DGS), à formação de uma nova onda no Verão, de mais baixa amplitude e muito maior comprimento de onda. Essa onda, concentrada na zona da Grande Lisboa, teve o seu pico por volta de 10 Julho e, se tudo se mantivesse na mesma, teria a sua conclusão em final de Agosto.

No entanto, as condições fronteira estão sempre a mudar: as fases de desconfinamento progrediram, e a 1 de Julho o País abriu as fronteiras, o que pode em particular ter como efeito um aumento dos casos importados. Esse aumento ainda não é visível no final de Julho, mas é possível que venha a sentir-se à medida que o Verão progride. Praticamente certa é a existência de uma segunda vaga do vírus na Europa na estação de Outono-Inverno; Manuel do Carmo Gomes receia um ressurgimento da doença a partir de Outubro. Esse ressurgimento, sob a forma de uma segunda vaga pode já ter chegado, em finais de Julho, a alguns países europeus.

Se isso acontecer, estamos neste momento essencialmente tão vulneráveis como em Março passado. Com efeito, terão passado pela infecção, estando imunes a uma segunda vaga do vírus, talvez 300 000 pessoas, no máximo 500 000 pessoas, o que representa entre 3 % e 5 % da população nacional. Dito de outra forma, entre 95 % e 97 % da população continua susceptível. Isto significa que aproximação $S \cong N$ que levou ao crescimento exponencial previsto na eq. (2) continua válida, pelo um novo surto global será novamente exponencial.

Por outro lado, uma segunda vaga não nos apanhará tão impreparados. O parâmetro R_0 desta nova fase exponencial será substancialmente inferior ao de Março passado: estamos todos práticos em distanciamento social (baixando o parâmetro c), e toda a população utiliza intensivamente máscaras e higienização portanto a probabilidade de transmissão p). Teremos seguramente stocks de testes e EPI e capacidade de reconversão industrial para produção de material de qualidade médica. E, sobretudo, estamos todos mais conscientes dos riscos. Talvez seja possível controlar uma segunda onda exponencial com medidas parciais, sem recorrer a um novo confinamento total.

Difícilmente uma segunda vaga terá o impacto que teve esta primeira. Mas a solução definitiva para a pandemia reside na imunidade de grupo, que parece impossível de atingir sem uma vacina. Até lá, teremos de viver com este “novo normal”.



Jorge Buescu, é Licenciado em Física (FCUL, 1986), Doutor em Matemática (Warwick, 1995) e Agregado em Matemática (IST, 2007). É actualmente Professor na FCUL. Realiza investigação em várias áreas da Matemática, tem uma dezena de livros publicados e é vice-Presidente da European Mathematical Society.