167 — *a*) Diga como se varia o comprimento de onda próprio de uma antena. *b*) Origem do espectro contínuo de raios X. *c*) Raios cósmicos.

168 — Sendo v=0,8c determine em *S*' a equação da curva $x^2+y^2=251$ e calcule a área que limita naquele referencial. R: — *Em* S *a equação* $x^2+y^2=25$ *representa uma circunferência de raio igual a* 5. *No sistema* S' *tem-se* y' = y *e* x' = xR *sendo* $R = \sqrt{1 - v^2/c^2}$. *Substituindo valores e efectuando operações vem para* (1) *em* S' *a equação:*

$$\frac{x'^2}{3^2} + \frac{y'^2}{5^2} = 1$$

A curva é uma elipse de semi-eixos 5 *e* 3 *respectivamente. A área desta curva em* S' *é* $\pi \cdot a \cdot b = 3{,}14 \times 3 \times 5 = 47{,}1$.

169 — Calcule a energia que devia emitir durante 1 segundo um electrão que com movimento uniforme percorresse uma órbita circular de 1,00 *AU* em 10^{-10} segundos: $e = 1{,}592 \times 10^{-20}$ U. Em. R: — *A energia emitida por um electrão em movimento durante o tempo* τ *e com a aceleração* j *é dada por:* $w=2\mu e^2 j^2 \tau/3v$ (1).

A velocidade com que o electrão percorre a órbita é dada por $v = 2\pi r/t = 2\pi \cdot 10^{-8}/10^{-10} = 2\pi 10^2$ cm/s *e a aceleração nestas condições é* $j = v^2/r = 4\pi^2 \cdot 10^{12}$ cm/s². *Substituindo valores em* (1) *vem para a energia emitida num segundo:* $W = 418 \times 10^{-18}$ ergs.

Resoluções de GLAPHYRA VIEIRA

8. DIVULGAÇÃO E VULGARIZAÇÃO

SOBRE AS NOÇÕES DE VELOCIDADES DE GRUPO E DE FASE

Para uma radiação rigorosamente monocromática, a relação entre o comprimento de onda λ, a velocidade v de propagação da onda e o período T, é, como se sabe,

$$\lambda = vT.$$

Imaginemos que a origem emite simultâneamente duas radiações de comprimentos de onda λ_1 e λ_2, pouco diferentes.

Consideremos um ponto do espaço, em que num dado instante t, as variáveis luminosas correspondentes às duas radiações tenham simultâneamente os valores máximos (ponto B_1, B_2 — fig. 1 *a*). É evidente que nesse mesmo instante, os outros máximos (C_1 e C_2, etc.) da variável luminosa correspondentes a cada uma das radiações, não coincidem, visto que os comprimentos de onda das duas radiações são diferentes.

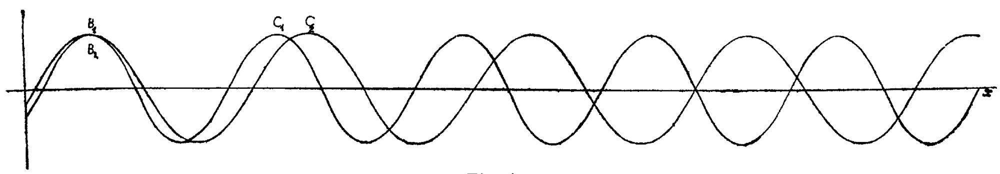

Fig. 1a

A perturbação resultante das duas componentes está representada na fig. 1 *b*. Vê-se imediatamente da figura, que enquanto que as perturbações componentes correspondem a ondas com amplitude constante, a perturbação resultante é constituida por uma onda cuja amplitude passa por máximos e mínimos.

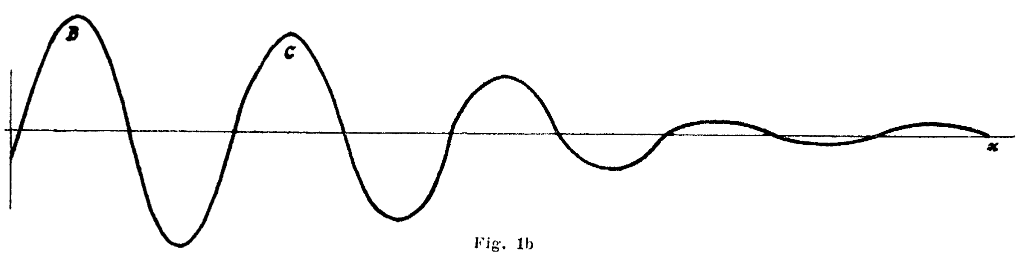

Fig. 1b

Consideremos agora dois casos:

a) O das radiações se propagarem no vácuo;

b) O das radiações se propagarem num meio material.

a) No primeiro caso, as duas radiações propagam-se com a mesma velocidade c, e, por consequência, após um intervalo de tempo qualquer θ, (instante $t + \theta$) os dois máximos das duas curvas que coincidiam, estarão ambos a uma distância $c\theta$, isto é, continuarão ambos em sobreposição, e será a adição destes dois máximos que corresponderá ainda ao valor do máximo de amplitude da onda resultante.

À velocidade com que se desloca este máximo chama-se velocidade do grupo para as duas radiações consideradas, que como vemos é a velocidade c com que se propagam as ondas.

b) Designemos por v_1 e v_2 as velocidades de propagação das radiações de comprimentos de onda λ_1 e λ_2. Consideremos de novo a direcção de propagação; no fim de um certo tempo θ, o máximo da radiação de comprimento de onda λ_1 estará à distância $v_1\theta$, mas o máximo da radiação λ_2 já agora não estará sobreposto ao anterior, visto ter percorrido a distância diferente $v_2\theta$. Daqui resulta que o máximo da onda resultante já não se encontra em B_1, B_2 como na fig. 1 *a*, estando antes ou depois desse ponto. Por consequência, como o máximo da onda resultante percorreu uma distância diferente da percorrida pela radiação de comprimento de onda λ_1 a sua velocidade de propagação que designaremos por V é diferente da velocidade v_1; e como este raciocínio se poderia reproduzir considerando em primeiro lugar a radiação de comprimento de onda λ_2, é fácil de ver que é também $V \neq v_2$.

Na fig. 2 estão representados: em *a*, os pontos B_1, B_2 da fig. 1 *a* e as posições B'_1, B'_2 destes pontos no instante $t + \theta$ ($B_1B'_1 = v_1\theta$; $B_2B'_2 = v_2\theta$); em *b* a onda resultante no instante $t + \theta$ ($B'A'' = V\theta$), sendo A'' a posição do máximo da onda resultante no referido instante.

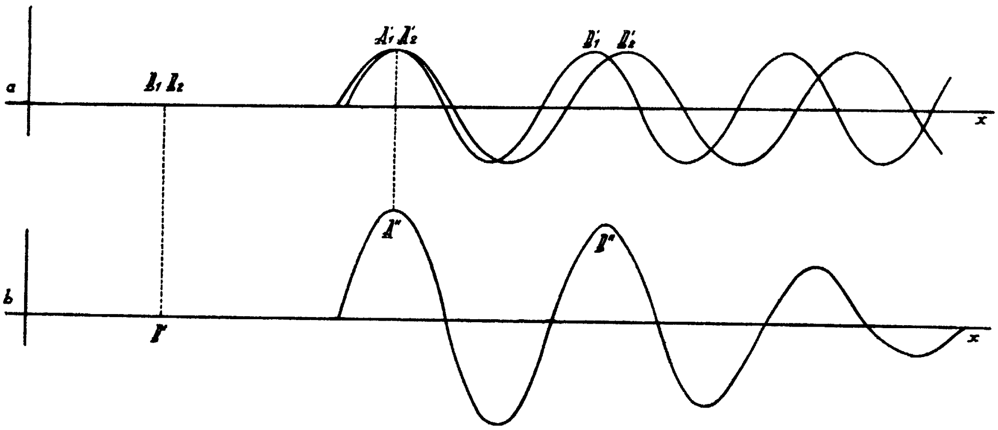

Fig. 2

Em resumo, no vácuo, as velocidades das ondas e a velocidade do máximo da onda resultante são iguais, ao passo que num meio material essas velocidades são diferentes. O problema que se põe é o de determinar a relação que existe entre V, v_1 e v_2; mas antes de passarmos a este cálculo, analisemos mais de perto o significado físico do que acaba de ser exposto, dando algumas imagens mecânicas.

Consideremos dois veículos que se movem independentemente e suponhamos que existem três referências, uma ligada ao veículo A (fig. 3) outra ao veículo B e finalmente uma terceira que está permanentemente a meia distância dos dois veículos. Suponhamos ainda, para libertar o espírito de qualquer influência relativa à posição dos veículos, que o observador se encontra numa posição tal que não vê os veículos, mas exclusivamente as três referencias.

No primeiro caso (deslocamento no vácuo) os dois veículos movem-se com a mesma velocidade, e, por consequência, passado um certo intervalo de tempo as três referências encontram-se à mesma distância das posições iniciais (fig. 3*a*).

No segundo e terceiro casos (deslocamento num meio dispersivo) os dois veículos marcham com velocidades diferentes, e, por consequência as distâncias percorridas no mesmo intervalo de tempo pelas três referências serão também diferentes (fig. 3*b*). O cociente da distância percorrida pela referência de *A* pelo tempo, dar-nos-á a velocidade do veículo *A*. Anàlogamente para *B* e, finalmente, o cociente da distância percorrida pela referência 2 pelo mesmo intervalo de tempo, dar-nos-à a velocidade de grupo. A figura mostra que a velocidade V estará compreendida entre v_1 e v_2, sendo, no caso *b,* $v_1 < V < v_2$ e no caso *c,* $v_1 > V > v_2$.

O problema pode ser visto ainda segundo um outro aspecto; afinal, o facto da velocidade do grupo ser diferente da velocidade das ondas, corresponde à onda resultante se deformar durante o percurso. Se abstrairmos pois das duas perturbações componentes, poderemos considerar sòmente o movimento da onda resultante, supondo porém que a forma da onda se modifica à medida que o veículo se move. Para estabelecermos a analogia com a mecânica, imaginemos agora o caso de um único veículo, mas em que a referência em vez de ocupar uma posição fixa no veículo, varia durante o movimento deste.

Convém que o leitor nunca se esqueça de que os veículos são para ele invisíveis, só podendo avaliar das velocidades pela posição das referências.

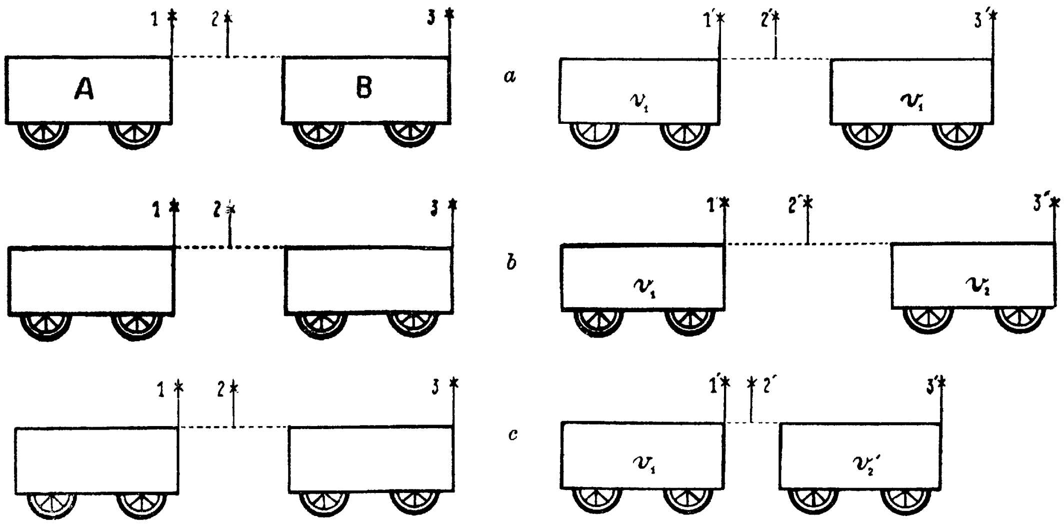

Fig. 3

A figura 4 corresponde precisamente ao caso, da posição do sinal variar em relação ao veículo, mas para maior aproximação da imagem da onda, adoptou-se como sinal o ponto máximo da cobertura de um veículo, cobertura esta que se deforma durante a marcha.

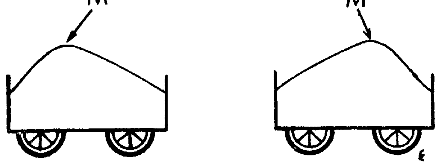

Fig. 4

Além destes exemplos mecânicos, pode apontar-se um exemplo fornecido pelo reino animal: o movimento de uma lagarta[1]. Com efeito, à medida que esta avança, a parte mais elevada do seu corpo vai, em relação a qualquer das extremidades, variando de posição e, assim, se medirmos a velocidade com que a lagarta se desloca, tomando como ponto de referência uma das suas extremidades, obteremos uma grandeza que poderemos chamar a sua velocidade de propagação, enquanto que se o ponto de referência fôr em qualquer instante o ponto mais elevado do corpo da lagarta, determinar-se-à uma velocidade (velocidade de grupo) que poderá ser, conforme os casos, maior ou menor do que aquela. É fácil de ver, aliás, que há uma estreita semelhança entre o deslocamento da lagarta e o movimento que considerámos do veículo, cujo tejadilho se deformava à medida que aquele avançava.

Passemos agora à dedução da expressão que relaciona V com v_1 e v_2.

Consideremos duas radiações monocromáticas de comprimentos de onda λ_1 e λ_2 ($\lambda_2>\lambda_1$) que se propagam segundo a direcção do eixo dos xx (fig. 5) Consideremos um instante t_1 em que duas ondas (2 e 2') das duas radiações estão em fase no ponto x_1. Admitamos que o meio apresenta uma dispersão normal, isto é que $v_2>v_1$.

Num instante posterior, como as duas radiações marcham com velocidades diferentes, B_1 e B_2 deixam de estar coincidentes; ao mesmo tempo, 1' tende a aproximar-se de 1 até chegar o instante t_2 em que 1 e 1' se sobrepõem; seja x_2 o ponto em que tal acontece.

No intervalo de tempo $t_2 - t_1 = \Delta t$, a onda 2 percorreu a distância $x_2 - x_1 + \lambda_1 = \Delta x + \lambda_1$ e a onda 2' percorreu a distância $\Delta x + \lambda_2$. Finalmente a onda resultante que no instante t_1 tinha o seu máximo em x_1, tem no instante t_2 o seu máximo em x_2, isto é, no intervalo de tempo $t_2 - t_1$, percorreu a distância Δx.

As três velocidades são dadas, por consequência, respectivamente pelas fórmulas:

$$v_1 = \frac{\Delta x + \lambda_1}{\Delta t}, \quad v_2 = \frac{\Delta x + \lambda_2}{\Delta t}, \quad V = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

donde

$$V = v_1 - \lambda_1 \frac{v_1 - v_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Se a função $v = f(\lambda)$ admitir derivada, suporemos que a expressão anterior ainda é válida no limite, poderemos então escrever:

$$V = v_1 - \lambda_1 \frac{dv}{d\lambda}.$$

Designaremos por V a velocidade de propagação do grupo de ondas, ou velocidade de propagação de amplitude; v_1 e v_2 são as velocidades de propagação das ondas monocromáticas ou velocidades de propagação de fase.

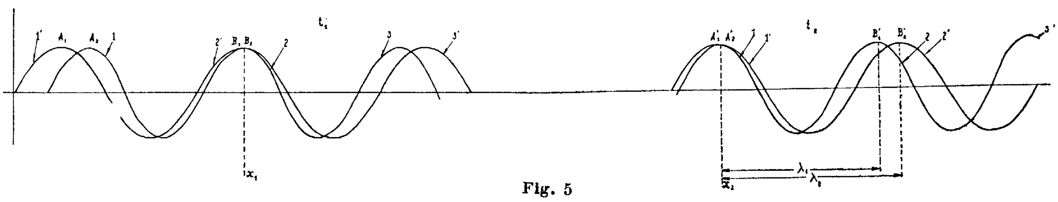

Fig. 5

BIBLIOGRAFIA

1. Compton e Allison, *X Rays in Theory and Experiment.*

2. Herbert Jehle, *American Journal of Physics,* pág. 47, 1946.

3. G. Bruhat, *Optique* (1942).

4. R. Wood, *Physical Optics* (1928).

LIDIA SALGUEIRO
1.º ASSIST. FÍSICA DA F. C. L.

[1] V. *bibliografia.*