

# Como introduzir o atrito na análise do plano inclinado

Carlota Cardoso<sup>1</sup>, Manuel Santos<sup>1</sup>, Mariana Silva<sup>1</sup>, Horácio Fernandes<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Instituto Superior Técnico, Universidade Lisboa

<sup>2</sup> Instituto de Plasmas e Fusão Nuclear, Instituto Superior Técnico, Universidade Lisboa

## Resumo

O plano inclinado, uma das seis máquinas simples descritas na antiguidade [1], permite alterar a força com que um objeto é elevado. Por exemplo, ao reduzir bastante o efeito da aceleração gravítica sentida pelo corpo, a variação da velocidade é menor e permite consequentemente realizar experiências simples de física em tempos de ordem superior ao segundo, entendíveis pelo olho humano. Consequentemente esta máquina é muito usada para estudar a aceleração nos corpos.

No entanto só calhas com almofadas de ar permitem realizar esta experiência sem atrito significativo, permitindo determinar uma aceleração gravítica ( $g$ ) correta e próxima dos  $9,8 \text{ ms}^{-2}$ . Contudo, o atrito é parte integrante da mecânica do problema e neste artigo abordaremos como o poderemos considerar, demonstrando que é possível determinar o valor de  $g$  com uma experiência simples. A experiência criada para o efeito no e-lab, permite alterar o ângulo de descida e, através deste processo, separar as forças de atrito, da gravítica, obtendo-se um valor muito próximo de  $9,8 \text{ ms}^{-2}$ .

## Introdução

O plano inclinado é geralmente utilizado para mover cargas pesadas sobre obstáculos verticais tais como as rampas comuns. Mover um objeto para cima num plano inclinado requer menos força do que levá-lo na vertical, como se desmultiplicássemos a gravidade! Esta vantagem mecânica, pela qual a força é reduzida, é igual à razão entre o comprimento da superfície inclinada e a altura em que se estende a rampa.

Nas experiências laboratoriais que recriam esta máquina, a experiência torna-se mais perceptível ao olho humano por via dessa aceleração reduzida. No entanto, ou é usada uma calha de ar de modo a quase eliminar o atrito de rolamento ou tem de ser usado um ângulo significativo de forma à projeção da acele-

ração gravítica sobre o plano ser muito superior à do atrito e eliminando consequentemente essa vantagem da experiência ser realizada num tempo grande, perceptível aos sentidos humanos.

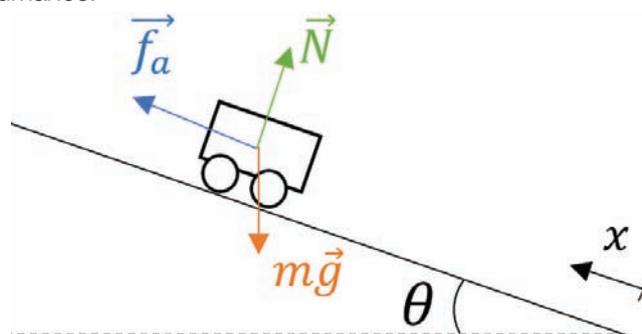


Figura 1 - Configuração e diagrama de forças do carrinho no plano inclinado.

Recorrendo à figura 1 é possível concluir que o módulo da força total aplicada no carrinho segundo o eixo do deslocamento é:

$$F = -mg \text{ sen}(\theta) + f_a = ma \quad (1)$$

Considera-se neste trabalho uma força de atrito  $f_a$  na forma de um polinómio de segundo grau na velocidade – equação 2 [2]:

$$f_a = b_1 + b_2 \cdot v + b_3 \cdot v^2 \quad (2)$$

Que leva, portanto, à aceleração mostrada na equação 3.

$$a = (-g \text{ sen}(\theta) + b) + c \cdot v + d \cdot v^2 \quad (3)$$

onde  $b = b_1/m$ ,  $c = b_2/m$  e  $d = b_3/m$ .

## Plano Inclinado no e-lab

O e-lab é um laboratório localizado no Instituto Superior Técnico da Universidade de Lisboa, controlado remotamente. Este laboratório permite a qualquer pessoa controlar experiências de física reais, em tempo real, através da internet, de forma gratuita e pode ser acessado no seguinte [link](https://www.elab.tecnico.ulisboa.pt/).

<https://www.elab.tecnico.ulisboa.pt/>



Figura 2 - Montagem experimental utilizada no e-lab. A escolha dum mecanismo de balanço permite restituir o carro à fonte de lançamento usando um ângulo negativo e facilitando deste modo a automação da experiência, onde o uso dum pala frontal permite aumentar a resistência aerodinâmica

## O plano inclinado empregue

O plano inclinado desta experiência recria, como os restantes, a “desmultiplicação da gravidade”. Consiste num veículo que se desloca numa calha com um ângulo regulável entre  $0^\circ$  e  $23^\circ$  e que bascula no seu ponto médio. A altura da calha é medida a 1003 mm do eixo da experiência.

O carro utilizado dispõe dum pára-vento de modo a exarcebar o efeito do atrito constituído por uma chapa de aço com  $60 \times 65 \text{ mm}^2$ , aumentando o seu atrito dinâmico. Inicialmente a calha bascula para uma posição com um ângulo negativo de modo a recolher e a parar o carro na origem, que dista cerca de 1,3 m da mola e irá absorver a energia do seu movimento (figuras 2 e 3). Este é imobilizado através dum eletroímã e posteriormente a calha é elevada até à altura ( $h$ ) pré-selecionada. Quando atinge esse ponto, o eletroímã liberta o carrinho e este desloca-se livremente sobre a calha até embater na mola. Um detetor ultrassónico mede, entretanto, as amostragens da posição em função do tempo decorrido, permitindo traçar a trajetória do veículo durante a queda e no seu amortecimento final. A inclinação do plano é dada por:

$$\theta = \arcsen\left(\frac{\text{Altura (mm)}}{1003 \text{ mm}}\right) \quad (4)$$

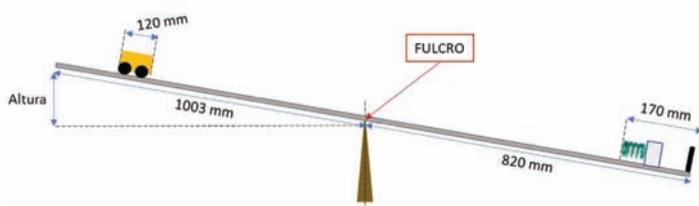


Figura 3 - Esquema da montagem experimental onde o utilizador programa a altura de lançamento em relação ao fulcro.

No programa de controlo do e-lab [3] é possível configurar a altura inicial, o tempo entre medições e o número total de medições (figura 4). Os resultados que se obtêm da realização da experiência têm a forma da figura 5: uma descida inicial, seguida de sucessivas curvas que representam cada movimento após impacto com a mola.

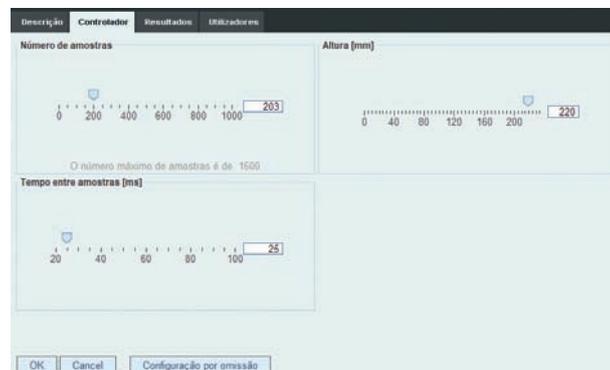


Figura 4 - Consola do e-lab (sala de controlo) que permite seleccionar a altura da calha, o número total de amostragens e o intervalo de tempo entre as mesmas.



Figura 5 - Representação gráfica dos resultados obtidos com a configuração da figura 3.

## Modelo multivariado

Tal como descrito na introdução, a aceleração do carrinho foi modelada com a equação  $a = -g \sin(\theta) + b + cv + dt^2$ . De forma a verificar a validade do modelo, é necessário ajustar o mesmo aos resultados experimentais e estudar os valores obtidos para os parâmetros  $g$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ , bem com o valor dos indicadores estatísticos da qualidade de ajuste. Para distinguir a componente da gravidade do termo constante ( $b$ ) do atrito (atrito de rolamento não dependente da velocidade) são considerados vários percursos para ângulos diferentes o que permite variar a componente no plano, da aceleração da gravidade.

Assim, e de forma a realizar um ajuste de mínimos quadrados, em cada ponto amostrado, a posição e velocidade são calculadas pelo método de Euler com base nas derivadas locais do movimento (velocidade e aceleração, respetivamente). O método de Euler, em termos de velocidade como derivada da posição, encontra-se resumido na equação 5 [4]:

$$v = \frac{dx}{dt} \cong \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \Delta x = x_{i+1} - x_i \cong v_i \Delta t \quad (5)$$

Iteração	Dados Experimentais		Cálculos para Solver		
	Tempo, $t_i/s$	Posição, $x_i/m$	Aceleração, $a_i/(m\ s^{-2})$	Velocidade, $v_i/(m\ s^{-1})$	Posição, $x_i/m$
1	0,028	1,442	$a_1 = -g \sen\theta + b + cv_1 + dv_1^2$	0	1,442
...					
16	0,286	1,412	$a_{16} = -g \sen\theta + b + cv_{16} + dv_{16}^2$	$v_{16} = v_{15} + a_{15}\Delta t$	$x_{16} = x_{15} + v_{15}\Delta t$
...					

Tab. 1 - Exemplo ilustrativo dos cálculos a realizar no modelo com valores iniciais reais.

Como se consegue uma elevada resolução temporal nas medidas da posição, o método de Euler é particularmente adequado porque permite aos alunos compreender a equação do movimento na sua forma instantânea, baseada no conceito de derivada. Ou seja, as forças modificam a velocidade (impacto na dinâmica do corpo) e a velocidade, enquanto derivada local da posição, permite calcular/prever o ponto seguinte no espaço.

Este processo está ilustrado na Tabela 1. Finalmente, é determinado, para cada amostra, o módulo da diferença entre a posição calculada e a posição medida experimentalmente: o resíduo. Recorrendo ao Solver, é possível determinar  $g$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  numericamente de forma a minimizar a soma dos resíduos quadrados, resolvendo assim o problema dos mínimos quadrados.

Há, no entanto, um detalhe importante a analisar. Os parâmetros  $g$  e  $b$  são ambos independentes da velocidade, pelo que não é possível numericamente obter um único valor ótimo para cada um recorrendo apenas aos resultados de uma única execução experimental. Utilizando as amostras de uma única execução, o Solver será apenas capaz de determinar conjuntamente o termo  $-g \sen(\theta) + b$ . Resultando assim num intervalo de valores possíveis para  $g$  e  $b$  que se ajustam igualmente bem aos dados recolhidos, levando o Solver a tender para certos valores finais de  $g$  e  $b$  consoante os valores que estes assumirem no início da otimização.

Esta não é uma questão puramente matemática. Este resultado mostra que analisando apenas uma trajetória de um carrinho numa calha é impossível distinguir um universo com gravidade menor e atrito de rolamento mais forte de um com gravidade elevada e atrito de rolamento mais fraco: a trajetória obtida para determinado ângulo seria igual em ambos os casos!

Deste modo, de forma a fazer sobressair a solução correta que corresponde à realidade física, é necessário otimizar os valores de  $g$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  para mais do que uma trajetória obtida com ângulos diferentes, já que o parâmetro correspondente ao atrito de rolamento é independente do ângulo mas o valor de  $g \sen(\theta)$  varia.

A otimização dos parâmetros para várias trajetórias é conseguida assim minimizando a soma dos totais dos resíduos quadrados de cada uma delas.

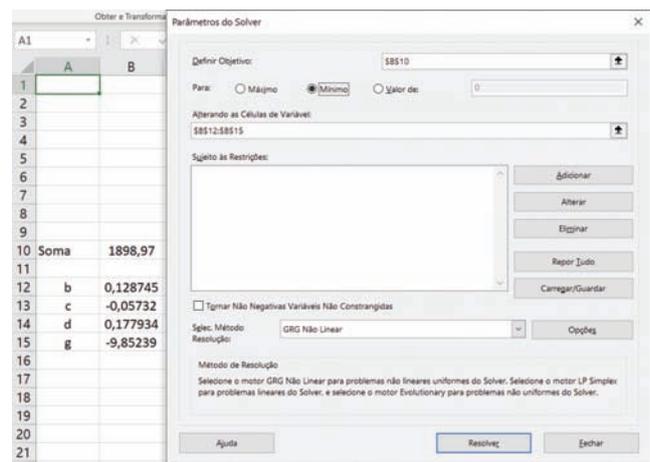


Figura 6 - Ajuste das co-variáveis pelo Solver do MExcel. É particularmente didático usar a opção "Mostrar resultado das iterações" disponível no menu de "Opções".

## Resultados

Os valores ajustados pelo Solver (fig. 6) encontram-se na tabela 2 e todas as curvas experimentais e calculadas na figura 7. O valor obtido para aceleração gravítica, que se desvia apenas  $(9,8-9,7)/9,8 \sim 1\%$  do valor padrão ( $g_{\text{padrão}} = 9,8\text{ ms}^{-2}$ ) permite assegurar a validade do modelo aplicado.

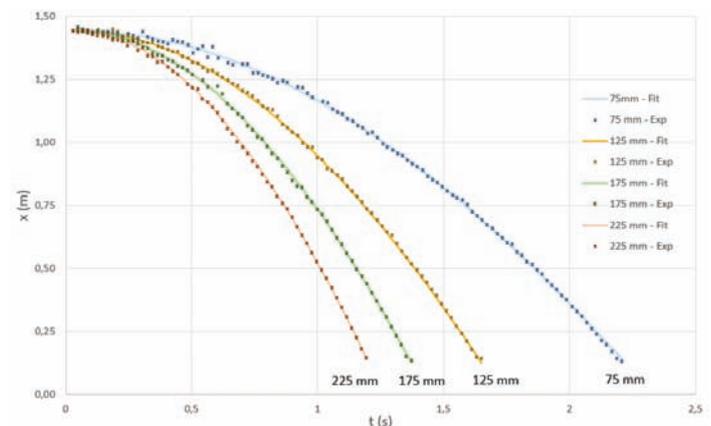


Figura 7 - Evolução temporal da posição do carrinho (curvas experimentais e ajustadas).

$g/(m\ s^{-2})$	$b/(m\ s^{-2})$	$c/(s^{-1})$	$d/(m^{-1})$
9,7	0,13	-0,05	0,15

Tab. 2 - Valores das co-variáveis resultantes do ajuste feito pelo Solver. O termo  $c$  resulta negativo porque, sendo a velocidade negativa, o produto é positivo. Deste modo a contribuição de todos os termos de atrito resulta positiva segundo os  $xx$ .

É possível também estudar a evolução das intensidades das diferentes componentes da força de atrito e as velocidades para as quais cada uma é mais ou menos relevante. Num carro normal, o atrito dinâmico começa a ser relevante somente quando se atingem ~7 m/s (ou 25 km/h). No entanto, para o carrinho da experiência, ele começa a ter mais importância que o atrito de rolamento a partir de ~1 m/s – análise retirada da figura 8. Tal deve-se à presença da pala que aumenta a travagem originada pela resistência aerodinâmica. É, portanto, interessante notar que a forma do carrinho tem importância na maneira como as diferentes componentes do atrito influenciam o movimento, experiência que poderia ser efetuada alterando a forma do pára-vento.

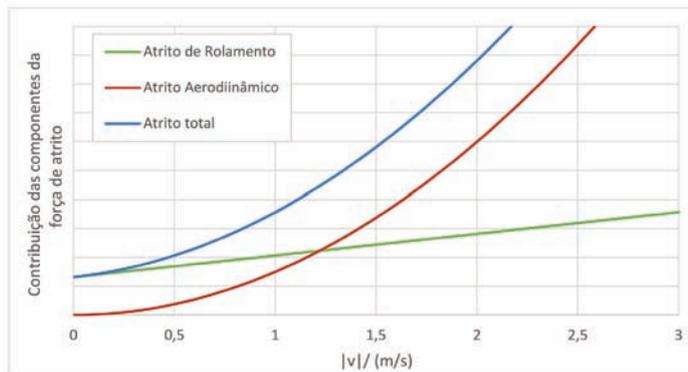


Figura 8 - Evolução das componentes da força de atrito em função da velocidade do movimento onde se vê que a partir de 1m/s a resistência aerodinâmica excede o atrito de rolamento.

### Coefficiente de Restituição da Mola

Como resultado extra é ainda possível determinar o coeficiente de restituição da mola [5] avaliando a variação da velocidade [6] ou - como neste caso - a variação da energia cinética do carrinho imediatamente antes ( $K_i$ ) e depois do impacto ( $K_f$ ):

$$e = \frac{v_f}{v_i} = \sqrt{\frac{K_f}{K_i}} \quad (6)$$

Determinando as alturas máximas antes e depois da colisão é possível determinar a variação de energia potencial nesses percursos. Na presença de atrito a energia cinética imediatamente antes (ou depois) da colisão pode ser calculada considerando a variação da energia potencial da descida que a antecede (ou subida que a sucede), subtraída (ou somada) ao trabalho que a força de atrito realizou no percurso. Isto é: antes da colisão:

$$K_i = \Delta E_p - \sum |f_a(x_i) \cdot \Delta x| \quad (7)$$

depois da colisão:

$$K_f = \Delta E_p + \sum |f_a(x_i) \cdot \Delta x| \quad (8)$$

O movimento entre dois máximos (ver figura 5) inclui uma colisão entre o carrinho e a mola pelo que é possível calcular, nesse troço, o respetivo coeficiente de restituição.

Os valores resultantes deste cálculo, para os primeiros três troços entre máximos, estão presentes na tabela 3. Pode

verificar-se que não se trata de um valor constante: os valores mais elevados dão-se para energias mais reduzidas como se pode verificar no gráfico da figura 9. Isto leva à conclusão de que a mola deforma plasticamente e funciona também como amortecedor para energias mais elevadas, ou seja, dissipa ela própria uma certa energia dependendo da energia do carro.

Altura, h/mm	$e_{1 \rightarrow 2}$	$e_{2 \rightarrow 3}$	$e_{3 \rightarrow 4}$
75	0,52	0,88	0,94
125	0,46	0,68	0,73
175	0,33	0,67	0,85
225	0,32	0,60	0,76

Tab. 3 - Coeficiente de restituição da mola para diferentes alturas de lançamento e nos vários troços do movimento.

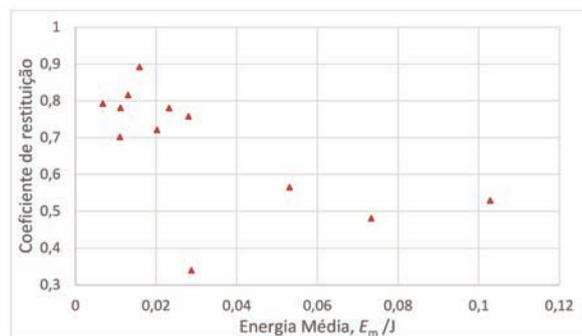


Figura 9 - Coeficiente de restituição em função da energia do carrinho: maiores velocidades de impacto levam a um maior amortecimento.

### Conclusões

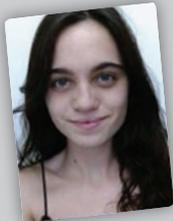
Este estudo permite concluir que se obtêm melhores ajustes à experiência real ao considerar o atrito de rolamento e aerodinâmico no movimento dum grave com a forma considerada. O método numérico utilizado, incluindo a utilização do método de Euler, foi validado com a proximidade do valor calculado da aceleração gravítica em relação ao padrão e com a elevada qualidade do ajuste, sendo uma mais valia na compreensão do conceito da velocidade e aceleração instantâneas.

Retira-se ainda que a influência do atrito aerodinâmico é exacerbada com a inserção da pala no carrinho e que este valor dependerá, portanto, da forma da pala utilizada podendo esta ser variada. Deste modo, maiores alturas levam a uma melhor qualidade do ajuste fruto das elevadas velocidades atingidas

Por fim, foi possível calcular o coeficiente de restituição da mola para as várias alturas e seus “ressaltos” considerando os efeitos da força de atrito. Verificou-se que quanto maior a energia do carrinho antes do impacto, mais energia era perdida na colisão com a mola, mostrando que esta não se constitui como puramente elástica e que a dissipação e consequente amortecimento depende do seu curso.

## Bibliografia

- [1] Anderson, William Ballantyne (1914). *Physics for Technical Students: Mechanics and Heat*. New York, USA: McGraw Hill. p. 112-122. Consultado em 8 de Agosto de 2020
- [2] Tom Selton. "Stella Lux: the energy-positive family car". In *Europhysics News* Volume 48, Number 3, May-June 2017, pp. 13 - 16 DOI: <https://doi.org/10.1051/eprn/2017301>
- [3] Horácio Fernandes, SC Leal, João Paulo Leal (2010), "e-lab: o laboratório online", *Gazeta de Física*, vol. 33
- [4] Ernst Hairer, Syvert P. Nørsett, Gerhard Wanner (2008). *Springer Science & Business Media*. Springer Science & Business Media. p.36. Consultado em 20 de Agosto de 2020
- [5] Raymond A. Serway, Jr. Jewett, John W, "Physics for Scientists and Engineers", 2013
- [6] Weir, G.; McGavin, P. (8 May 2008). "The coefficient of restitution for the idealized impact of a spherical, nano-scale particle on a rigid plane". *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. **464** (2093): 1295-1307. Bibcode:2008RSPSA.464.1295W. doi:10.1098/rspa.2007.0289.



Carlota Cardoso. Aluna do 5.º ano do Mestrado em Engenharia Física Tecnológica no Instituto Superior Técnico. Foi elemento da direção do Núcleo de Física do IST em 2018/2019 e colaboradora em formações dadas pela SPF com apoio da REN.



Manuel Santos. Aluno de 5.º ano do Mestrado de Engenharia Aeroespacial no Instituto Superior Técnico.

Colaborador no projecto e-lab, tendo contribuído no desenvolvimento de experiências, na criação de conteúdo para a wiki do projecto e na manutenção dia-a-dia das experiências e da infraestrutura IT do laboratório. As suas principais áreas de interesse são a física experimental e a computação.



Mariana Silva. Aluna do 5.º ano de Engenharia Física Tecnológica no Instituto Superior Técnico. Tem vindo, desde criança, a descobrir o seu gosto por Física e Engenharia em geral, sendo a Física Experimental a sua área de preferência.

Nunca está parada e foi nos últimos dois anos membro do Núcleo de Física do Instituto Superior Técnico, inicialmente como Diretora do Circo da Física, secção que se dedica à divulgação científica entre toda a população, e mais recentemente como Vice-presidente do núcleo.



Horácio Fernandes, é professor associado do departamento de física do IST e investigador no Instituto de Plasmas e Fusão Nuclear onde coordena a atividade do tokamak ISTTOK. Em 1999 criou o e-lab, laboratório remoto do IST, com acesso livre. Mantém igualmente uma regular participação em divulgação científica. Foi

membro do "Technical Advisor Panel" da agência europeia para o ITER (F4E) e é investigador coordenador duma atividade de pesquisa da IAEA.