5
artigo geral
VOL. 47 - N. 3

O que é o tempo?

Augusto Barroso
augusto.barroso@netcabo.pt

O tempo do calendário

Era o fim de uma tarde quente de verão. Estou numa quinta, no Alentejo, sentado à sombra de uma casa. Na minha frente estão duas grandes olaias e uma palmeira, que dá ao conjunto um ar semi-aristocrático. À medida que anoitece observo os pardais: vindos em bando vão saltitando de árvore em árvore até encontrarem os seus ramos para passarem a noite. A noite vai caindo e os pardais sabem que é tempo de dormir.

Para os nossos antepassados, antes do aparecimento da agricultura, há cerca de 12 mil anos, foi esta a sua primeira noção de tempo. O tempo, associado ao movimento de rotação da Terra que, evidentemente, na altura, era associado ao movimento aparente do Sol, que voltava cada dia. Nascia a Leste, percorria o céu e escondia-se a Oeste. Entre cada sucessivo nascimento do Sol, um dia. Quem diria que era a Terra que rodava de Oeste para Leste.

Depois de descoberto este primeiro relógio é bem possível que fosse a periodicidade das fases da Lua, que constituísse o próximo referencial de tempo. Agora entre cada sucessiva Lua Nova teremos um intervalo de cerca de 28 dias, que pode ainda ser dividido em intervalos de 7 dias, correspondentes às quatro fases da Lua. Finalmente, o desenvolvimento de sociedades agrárias levou necessariamente ao reconhecimento da periodicidade das estações do ano. Tínhamos descoberto o ano.

Quando dizemos que o 25 de abril foi há cinquenta anos queremos dizer que, desde esse acontecimento, a Terra deu cinquenta voltas ao Sol. Para termos o calendário como hoje o conhecemos foram precisos ainda várias melhorias tais como a divisão do ano em meses e, acima de tudo, resolver o problema de que cada ano não tem um número inteiro de dias. Mais fácil foi resolver o problema de fixar o ano 1. Como se trata de uma escolha arbitrária, várias civilizações fizeram-no de forma diferente. Entre nós é usual fixar o ano 1 como o que é atribuído ao nascimento de Jesus Cristo. Faz agora todo o sentido dizer que a 23 de maio de 1179, uma bula do Papa Alexandre III reconheceu, a Afonso Henriques e aos seus sucessores, o direito a intitularem-se reis de Portugal.

Santo Agostinho, bispo da cidade africana de Hipona, viveu na viragem do século IV para o século V. Nas "Confissões", uma das suas obras mais conhecida, diz que sabe o que é o tempo, mas se alguém lhe perguntar e tiver que explicar, então já não sabe. Esta é talvez uma das mais citadas referências do teólogo. Contudo, para mim, a passagem mais relevante é quando ele pergunta: O que fazia Deus antes de criar o mundo? E responde: "Se, porém, antes do céu e da terra não havia tempo algum, porque perguntam o que fazias então? Não poderia haver então se não existia o tempo." Agostinho estava preocupado com a possível ociosidade de Deus. Eu acho interessante sublinhar que a sua resposta não é diferente da dada pela cosmologia moderna. O Universo começou num big bang que ocorreu há cerca de 13,8 mil milhões de anos. Foi então que começou o tempo.

A esta noção de tempo vou chamar o tempo do calendário. Mas há outras, como veremos.

Movimento

Imagine que a leitora vai a Nova York. Partiu do aeroporto Humberto Delgado a meio da tarde, o avião ganhou a sua altitude de cruzeiro e está um tempo magnífico. A tripulação serviu-lhe uma refeição, fechou as cortinas das janelas e diminuiu as luzes da cabine. A minha estimada leitora inclinou a cadeira e começa a ver um filme do seu agrado. Nestas circunstâncias, nada lhe garante que está em movimento em vez de parada. Bem sei que ouve o ruído dos motores e, como não perdeu a memória, sabe que vai a caminho da América. Lembra-se de ter descolado de Lisboa e pouco depois viu a linha da costa portuguesa. O que eu quero dizer é que não existe nada, nenhuma experiência que possa fazer a bordo que evidencie que voa a cerca de 800 km por hora, sobre o oceano Atlântico. Qualquer experiência que possa fazer no interior do avião dará o mesmo resultado que daria se o avião estivesse parado na pista do aeroporto. Parado ou com velocidade constante são equivalentes. A isto chama-se o princípio de inércia.

É por causa desta equivalência que a humanidade levou milhares de anos até se convencer que a Terra não estava parada, no centro do Universo, mas que se desloca à volta do Sol com uma velocidade que, em média, é de cerca de 30 km/s. Um observador, que se situasse fora do plano da órbita e a Norte, veria a Terra a descrever uma elipse, quase circular, deslocando-se no sentido contrário ao do movimento dos ponteiros de um relógio. A Terra roda deixando sempre o Sol à sua esquerda! Até parece um slogan de publicidade política!

Voltemos á nossa viagem de avião. Seja *v* a velocidade do avião em relação ao ar, os tais 800 km/h. Mas imaginemos que existe um vento de cauda, com a velocidade *v*'. A velocidade do avião em relação ao solo será a soma. Se designarmos por l a distância a percorrer, o tempo gasto no percurso será:

(1) $$\Delta t = \frac{\ell}{v+v'}$$

Imaginemos que, na viagem de regresso, apanhamos vento com a mesma velocidade, mas de frente. O tempo da viagem será.

(2) $$\Delta t' = \frac{\ell}{v-v'}$$

O tempo total para o percurso de ida e volta, será evidentemente a soma, o que dá:

(3) $$\Delta \mathcal{T} = \Delta t + \Delta t' = \frac{2\ell}{v(1-\beta^2)}$$

Por razões que serão claras nos próximos parágrafos, fizemos

(4) $$\beta = \frac{v'}{v}$$

Sem vento, em qualquer das viagens, o tempo total das viagens será evidentemente *2l/v*, que é o valor que se obtém da equação anterior quando β=0.

Pergunta: Em que condições é que a viagem de ida e volta é mais rápida? Quando não existe vento. Talvez um exemplo a ajude a convencer-se. Para uma velocidade do vento de 120 km/h, β=0,15. O que dá uma duração da viagem de ida e volta cerca de 2,2% maior. O que ganhamos com vento de cauda não compensa o que vamos perder quando o vento é de frente. Se acertou na resposta sem ter feito a conta parabéns. Tem uma boa intuição. Antes de deixar este exemplo do avião, que será muito útil no próximo capítulo, quero recordar-lhe que no Atlântico Norte o vento dominante é de Oeste para Leste. Se já foi a Nova Yorque lembra-se, com certeza, que a viagem de regresso a casa demorou menos.

Referenciais

Vamos imaginar que queremos estudar o movimento de uma bola de bilhar em relação à mesa. Agora já sabemos que o movimento é sempre relativo. O que devo fazer? Coloco duas réguas graduadas, por exemplo em centímetros, uma colocada no sentido do comprimento da mesa e outra no sentido da largura. No ponto onde as réguas se cruzam, marco o zero de cada régua. A primeira vou designar por eixo dos *x* e a outra por eixo dos *y*. Cada posição da bola fica agora bem especificada por um par de números, que são as suas coordenadas sobre a mesa. Para além disto, precisamos também de um relógio. À medida que o tempo vai passando, se a bola se mover, vai ocupar diferentes posições, cada uma especificada pelo seu par de coordenadas. Em rigor, não preciso de um relógio. É melhor usar um cronómetro, pois pouco importa se inicio a minha experiência às 15 horas ou às 17 horas e 23 minutos.

Nem todos os movimentos ocorrem num plano. Vivemos num espaço tridimensional e, por isso, no caso mais geral, vamos precisar de outro eixo, perpendicular aos dois anteriores e com o zero no mesmo ponto do cruzamento, que designarei por ponto O.

Estar, por exemplo, no instante *t*=5 no ponto *x*=1, *y*=2,8 e *z*=-3,9 é o que em Física se designa por um acontecimento, i. e., estar num certo instante num certo sítio.

Agora já sabemos o que é um referencial de inércia: são três réguas perpendiculares entre si, com o zero no ponto O e um cronómetro.

Consideremos um observador, a Ana, que está em repouso no referencial anterior a que chamaremos referencial S. Um outro observador, o Bruno, está em movimento, com velocidade constante, *v* ao longo do eixo dos *x*. Ele adota um referencial S' onde cada acontecimento é descrito por *t', x',y'* e *z*'. Ver Fig. 1. O que pretendemos agora é analisar como é que a Ana e o Bruno descrevem o mesmo movimento de uma bola, por exemplo. Para facilitar a comparação, os dois concordaram em sincronizar o instante zero dos seus cronómetros quando o ponto O' coincide com O. Nesse instante, para qualquer ponto as três coordenadas em S' são iguais às respetivas coordenadas em S, não é verdade? Isto continuará a ser verdade, para todos os instantes para as coordenadas segundo os eixos *y*' e *z*'. Mas para *x*' teremos *x* = *x*'+*vt*'. Em resumo, o dicionário que relaciona os dois referenciais de inércia é:

(5) $$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Estas relações designam-se por transformada de Galileu, em homenagem a Galileu Galilei (1564-1642) professor na Universidade de Pádua, um dos mais importantes físicos e astrónomos da era moderna.

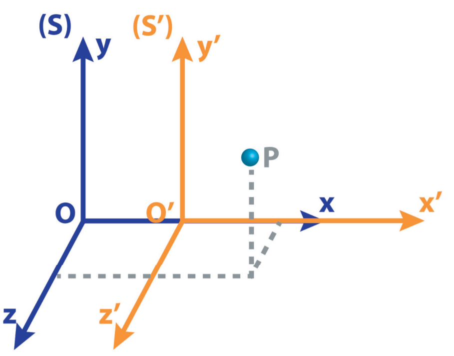

Figura 1 – S' move-se em relação a S com velocidade constante *v*, ao longo do eixo dos *x*. No instante *t* a distância OO' é *vt*.

Na língua portuguesa a palavra velocidade designa duas grandezas que são diferentes. Essas duas grandezas designam-se em inglês como *speed* e *velocity*. Quando dizemos que o limite de velocidade é de 50 km/h estamos a referir-nos à *speed*. Em português o mais correto seria dizer o módulo da velocidade. Mas ninguém diz. A velocidade (*velocity* em inglês) não é apenas um número. É uma grandeza que tem direção e sentido. É na realidade especificada por três números, que são as suas componentes segundo os três eixos (ver anexo 1). Nos automóveis, o que é indicado no mostrador em frente do condutor é a *speed*. Para saber a *velocity* o condutor usa, além desta informação, os seus olhos para saber qual é a direção do movimento do carro.

Voltemos aos nossos dois observadores. Bruno descreve o movimento de um móvel determinando, em função do tempo, as suas posições, i.e., determina $x'(t')$, $y'(t')$ e $z'(t')$. A derivada destas funções são as componentes do vetor velocidade, que designaremos por v'_x, v'_y e v'_z. Das equações (5) obtemos a lei de composição das velocidades:

(6)
$$v'_x = v_x - v$$
$$v'_y = v_y$$
$$v'_z = v_z$$

Temos, deste modo, a relação entre as componentes do vetor velocidade, medidas pelo Bruno e as correspondentes componentes do vetor velocidade, medidos pela Ana. Foram estas relações que usámos no exemplo do voo para Nova York. Em particular, nesse exemplo, as componentes do vetor velocidade segundo os eixos dos y e dos z eram zero e só a primeira das equações (6) foi usada. Neste caso, e só neste caso, a *speed* coincide com a *velocity*!

A velocidade da Luz

No final do século XIX sabia-se que a luz era uma onda. Assim como as ondas sonoras se propagam no ar, pensava-se que existia um fluido, chamado éter, no qual as ondas luminosas se propagavam. Como a luz do Sol e das estrelas mais longínquas chega até nós, este éter deveria estar por toda a parte.

Imagine que dispunha de um feixe de luz laser. Pode ser um desses ponteiros eletrónicos que agora substituíram os ponteiros de madeira do meu tempo de escola. Tinha medido que a velocidade da luz desse laser no seu laboratório era c. Agora levava o seu ponteiro laser na viagem a Nova Yorque e quando o avião seguia com velocidade constante, v, sobre o Atlântico, ligava o laser e apontava-o na mesma direção e sentido do movimento do avião. Pergunta: em relação ao solo qual será a velocidade da luz? Usando o mesmo raciocínio do capítulo 2, a resposta deve ser $c+v$.

Para verificarem se isto era assim ou não, dois físicos americanos, Albert Michelson (1852-1931) e Edward Morley (1838-1923), realizaram em 1887 uma experiência do tipo da que lhe acabei de sugerir com o avião. Usaram um dispositivo, chamado interferómetro e o avião era a Terra no seu movimento em torno do Sol.

O interferómetro é um equipamento que tem uma fonte de luz. Esta luz incide num dispositivo (*beam splitter*) que separa o feixe luminoso incidente em dois feixes: Um segue em frente e o outro é desviado numa direção perpendicular. Ambos os feixes percorrem a mesma distância l e incidem num espelho. São refletidos e voltam a percorrer a mesma distância até ao beam splitter, onde são sobrepostos. (ver Fig. 2). Quando duas ondas são sobrepostas, a onda resultante é extremamente sensível a qualquer pequena diferença entre as duas. Por exemplo, no limite em que aos picos de uma das ondas correspondam os vales da outra

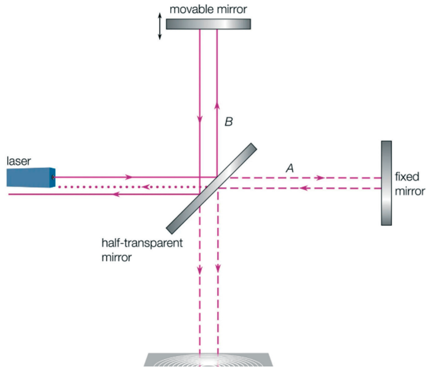

Figura 2 – Esquema de um interferómetro.

existirá extinção. Se pelo contrário os picos das duas ondas coincidirem exatamente a onda resultante terá uma amplitude dupla.

Michelson e Morley fizeram o seguinte: alinharam um dos braços do interferómetro na direção Oeste-Leste; o outro ficou, evidentemente, orientado na direção Norte-Sul. Quanto tempo levou a luz a percorrer o braço O-E? Basta copiar o resultado da equação (3), atendendo a que agora a velocidade v é c e $\beta = v/c$, isto é:

(7)
$$\Delta\mathcal{T} = \frac{2\ell}{c(1-\beta^2)}$$

E quanto tempo demorou a luz a percorrer o braço N-S? Se a sua resposta foi

$$\Delta\mathcal{T}' = \frac{2\ell}{c}$$

lamento, mas está errado. Contudo, está em boa companhia. Esse mesmo erro foi feito pelos dois físicos norte americanos. A resposta correta foi dada pela primeira vez pelo físico holandês H. Lorentz (1853-1928). Quando a luz do braço N-S caminha para o espelho, é preciso ter em conta que o espelho se está a mover, com a velocidade v. A luz segue uma trajetória que é a hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos são l e Δtv. (ver Fig.3). Como no regresso do espelho a luz também encontra o beam splitter deslocado da mesma distância, o resultado é:

(8)
$$\Delta\mathcal{T}' = \frac{2\ell}{c\sqrt{1-\beta^2}}$$

A diferença entre os tempos de percurso da luz nos dois braços do interferómetro era suscetível de ser medida. Contudo, Michelson e Morley não mediram qualquer diferença. Repetiram a sua experiência durante alguns anos, introduzindo sucessivas melhorias nos seus equipamentos e o resultado foi sempre negativo.

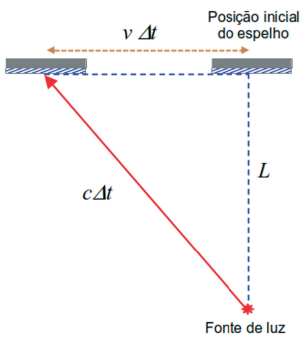

Figura 3 – Quando a luz se desloca para o espelho com velocidade c o espelho move-se com velocidade v.

Posteriormente, outros físicos repetiram esta experiência e o resultado foi sempre o mesmo.

A evidência experimental indica que, em qualquer referencial de inércia, a luz se propaga, no vazio, com a mesma velocidade em módulo. Nesta frase sublinhei algumas palavras que são cruciais. Quando digo luz não é só a luz visível. Pode ser raios X, ondas de rádio, de TV, radar, etc. No vazio significa no espaço onde não existe matéria, por oposição à água, por exemplo, ou até mesmo ao ar. Embora no ar a velocidade da luz seja praticamente igual à do vazio. O que é constante é o módulo da velocidade, o seu valor é:

$$c = 299792458 \frac{m}{s} \tag{9}$$

O valor desta constante é conhecido com tanta precisão que foi adotado para definir o metro. Desde 1983, o metro é a distância percorrida pela luz, no vazio, em 1 a dividir por 299792458 do segundo. Se quiser uma ordem de grandeza a luz anda cerca de um metro em 3 nanossegundo (10^{-9} s).

Gostaria de terminar este capítulo convidando os meus leitores a verificarem que:

$$\Delta\mathcal{T} - \Delta\mathcal{T}' = \frac{\ell}{c}\beta^2 \tag{10}$$

Se multiplicarmos ambos os membros desta equação por *c*, temos a diferença dos comprimentos de onda das duas ondas. O que, para um interferómetro com um braço de 1 m, daria uma diferença de 10 nm. Este número dá-nos uma ideia da precisão que é preciso ter neste tipo de experiências.

A transformação de Lorentz

No capítulo anterior aprendemos que *c*, cujo valor no sistema internacional de unidades é dado pela relação (9), é o mesmo em todos os referenciais de inércia. Como esta afirmação vai ter uma implicação profunda no nosso conceito de tempo, vou voltar a pedir a colaboração da Ana e do Bruno para fazer mais uma hipotética experiência.

Vamos para Monte Real onde existe uma base da Força Aérea Portuguesa (FAP). A Ana posiciona-se a meio da pista, escolhe esse ponto para a origem do seu referencial, a que chamarei S_A, escolhe para eixo dos *x*, uma reta ao longo da pista, para eixo dos *y* escolhe uma reta, perpendicular à primeira, segundo a largura da pista e o eixo dos *z* é perpendicular à pista. A Ana também tem um cronómetro e deste modo está habilitada a determinar as coordenadas espaçotemporais de qualquer acontecimento:*t,x,y,z*.

Entretanto, o Bruno pede emprestado um F16 à FAP. Satisfeito o pedido, estaciona o avião, no sítio onde está a Ana, e dispara um míssil, paralelo à pista, no sentido positivo do eixo dos *x*. Ambos medem a velocidade do míssil e concordam que essa velocidade é v_B. Posto isto, o Bruno levanta voo, dá algumas voltas para se ambientar e passa sobre a pista em voo com velocidade constante *v*. A certa altura, mantendo sempre o avião com velocidade constante, Bruno dispara outro míssil exatamente igual ao anterior. A Ana dirá que, para ela, isto é, no seu referencial de inércia, a velocidade do míssil é v_A , dada por:

$$v_{\mathcal{A}} = v_{\mathcal{B}} + v \tag{11}$$

Terminada esta experiência, o Bruno regressa à base e aterra. Mas agora pedem à FAP que substitua o lançador de misseis por um laser. Satisfeito, mais uma vez, o pedido, vão repetir a experiência anterior. Disparam o laser com o avião parado e medem c_B. Depois, o Bruno dispara o laser quando o avião voa sobre a pista com velocidade constante v e a Ana vai medir a velocidade da luz do laser, no seu referencial, e o resultado é:

$$c_{\mathcal{A}} = c_{\mathcal{B}} \tag{12}$$

Como compatibilizar as relações (11) e (12)? Como compreender que o que é válido para o míssil não é válido para a luz? E como compatibilizar este novo conhecimento com a transformação de Galileu, eqs. (5) e a lei das velocidades, eqs. (6)? A procura de respostas para estas perguntas ocupou vários físicos no final do século XIX tais como, H. Lorentz, G. FitzGerald (1851-1901) e H. Poincaré (1854-1912). Mas foi o célebre físico Albert Einstein (1879-1955) quem deu o contributo mais relevante para este problema [1].

Comecemos pela lei das velocidades. É fácil ver que as eqs. (6) são incompatíveis com uma velocidade que é igual nos dois referenciais. Pode demonstrar-se (ver anexo 2) que a forma correta das eqs. (6) é a seguinte:

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x v}{c^2}} \\ v'_y &= \frac{1}{\gamma}\frac{v_y}{1 - \frac{v_x v}{c^2}} \\ v'_z &= \frac{1}{\gamma}\frac{v_z}{1 - \frac{v_x v}{c^2}} \end{aligned} \tag{13}$$

Nestas equações, gama é uma constante dada por:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{14}$$

E beta é já nossa conhecida. É a razão entre a velocidade relativa dos dois referenciais de inércia e a velocidade da luz, i. e.

$$\beta = \frac{v}{c}$$

Sugiro que os leitores verifiquem o que acontece quando no referencial S as componentes do vetor velocidade são: $v_x=c; v_y=v_z=0$. O que obtemos é $v'_x=c; v'_y=v'_z=0$. Por outras palavras, esta nova lei de composição das velocidades é compatível com a luz ter a mesma velocidade nos dois referenciais de inércia. Também gostaria de lhe mostrar que, para velocidades pequenas quando comparadas com a velocidade da luz, as eqs. (6) são uma excelente aproximação das eqs. (13). Para isto o melhor é usar um exemplo. Antes disso vou inverter as eqs (13). Em vez de ter as componentes da velocidade no referencial S' em função das respetivas componentes da velocidade do mesmo móvel no referencial S, agora quero ter ao contrário, as velocidades em S em função das velocidades em S' .

O resultado é:

(15)
$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}}$$

$$v_y = \frac{1}{\gamma}\frac{v'_y}{1+\frac{v'_x v}{c^2}}$$

$$v_z = \frac{1}{\gamma}\frac{v'_z}{1+\frac{v'_x v}{c^2}}$$

Não precisa saber muita matemática para inverter as equações (13). Basta trocar *v* em *-v*.

Voltemos agora à experiência com o F16. Na forma (15) temos a velocidade no referencial fixo, o da Ana, em função do referencial do Bruno. Um F16 pode voar a cerca de 2400 km/h. E admitamos que o míssil que o Bruno dispara voa a 3000 km/h. Nestas condições o denominador da primeira das eq. (15) é

$$1 + \frac{v'_x v}{c^2} = 1 + 6{,}2 \times 10^{-12}$$

É por este número ser tão próximo de 1 que, durante muito tempo, não nos demos conta que a lei de composição de velocidades dada pelas eqs. (6) não estava certa. Mas está quase certa. Isto é, mesmo no nosso exemplo do míssil disparado pelo Bruno, a Ana poderá continuar a dizer que a velocidade do míssil em relação ao solo é de 5400 km/h. Em 5400 km/h que são 1500 m/s estará a fazer um erro de 9 nm/s!

Quando o Bruno fizer a experiência com o laser, terá v_x'=c e v_y'=v_z'=0. Espero que a leitora verifique que a Ana medirá v_x=c e v_y=v_z=0. Mas imagine que o Bruno resolve que, em vez de disparar o laser para a frente, no sentido do movimento do F16, resolve disparar para o lado, na direção perpendicular à do movimento. Então teremos: v_y'=c e v_x'=v_z'=0. Qual será, neste caso, a velocidade da luz medida pela Ana? A substituição destes valores na eq. (15) dá:

(16)
$$v_x = v$$

$$v_y = \sqrt{1-\beta^2}c$$

$$v_z = 0$$

Este resultado é extremamente importante. Para a Ana o vetor velocidade da luz não tem apenas componente segundo o eixo dos y. Tem também segundo x. Basta esta constatação para verificar **que o vetor velocidade da luz não é igual nos dois referenciais de inércia**. Mas o que tem de ser igual é o módulo do vetor velocidade. O módulo de um vetor é a raiz quadrada da soma dos quadrados das componentes. Olhe para as eqs (16), faça os quadrados das componentes e some. Obtém c!

Estas novas leis de composição de velocidades estão em flagrante contradição com a transformação de Galileu dada pelas eqs. (5). Aliás, todas as leis do eletromagnetismo estão em completo desacordo com a transformação da Galileu. No final do século XIX tinha-se percebido que a luz, todas as formas de luz, são ondas eletromagnéticas. Hoje já todos ouvimos falar de campo elétrico e de campo magnético. Um campo elétrico variável no tempo induz um campo magnético também variável no tempo. A onda luminosa é este diálogo entre os campos a caminhar pelo espaço.

O dicionário entre as coordenadas do mesmo acontecimento em dois referenciais de inércia, compatível com as leis do eletromagnetismo é dado pela transformação de Lorentz. Assim, em vez de (5) teremos:

(17)
$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Comparemos as eqs. (17) com as eqs. (5). As duas últimas são iguais. Faz sentido porque o movimento relativo dos dois referenciais faz-se ao longo do eixo dos *x*. A segunda destas equações, a referente à coordenada espacial, é quase igual. Difere pela constante gama. Mesmo para uma velocidade como a do F16 das nossas experiências, temos $\gamma=1+2{,}5\times10^{-12}$. Mais uma vez o resultado não relativista é excelente. O mais surpreendente é a primeira das eqs. (16). Contrariamente à transformação de Galileu o tempo não é o mesmo nos dois referenciais de inércia. O tempo deixou de ser absoluto!

Tal como fizemos para a transformação de Galileu, podemos inverter as equações (17). O resultado é:

(18)
$$ct = \gamma(ct' + \beta x')$$

$$x = \gamma(x' + \beta ct')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

A aplicação à mecânica das eqs. (17) e (18), feita por Einstein, designa-se por teoria da relatividade restrita.

A dilatação do tempo

No capítulo anterior apresentámos aquilo que chamei de dicionário: as relações que nos permitem obter as coordenadas espácio-temporais de um acontecimento no referencial S sabendo as respetivas coordenadas em S' ou vice-versa. Vamos agora usá-las, pois só assim podemos apreciar o seu significado. Consideremos em S' dois acontecimentos. O acontecimento A com coordenadas t_A' x_A' y_A' z_A' e o acontecimento B com coordenadas t_B' x_B' y_B' z_B'. As diferenças entre as coordenadas homónimas são:

$$\Delta t' = t'_B - t'_A$$

$$\Delta x' = x'_B - x'_A$$

$$\Delta y' = y'_B - y'_A$$

$$\Delta z' = z'_B - z'_A$$

Imaginemos que os dois acontecimentos ocorrem no mesmo ponto do espaço, mas em instantes diferentes, i. e. $\Delta x'=\Delta y'=\Delta z'=0$ mas $\Delta t'\neq0$. As transformações (18) também são, evidentemente, válidas para os deltas. Aplicadas a este caso dão:

$$c\Delta t = \gamma c\Delta t'$$

(19)
$$\Delta x = \gamma\beta c\Delta t'$$

$$\Delta y = \Delta z = 0$$

Os dois acontecimentos ocorrem, no referencial S', no mesmo ponto do espaço. Mas não acredito que a leitora fique surpreendida por verificar que no referencial S não ocorrem no mesmo ponto. Basta pensar que S' está em movimento com velocidade *v* em relação a S .

Pensemos que o referencial S' é um comboio que se move na linha do Norte. Os dois acontecimentos são o mesmo passageiro, sentado, que olha para o seu cronómetro em dois instantes com uma diferença $\Delta t'$ de meia hora, por exemplo. Como o alfa pendular segue, na lezíria do Tejo, com uma velocidade constante de 150 km/h para o passageiro fixo na estação o delta *x* é de 75 km. Para além do fator de correção relativista gama é isto que a segunda das equações anteriores nos está a dizer.

Mas o mais interessante é que a primeira das equações mostra que, para o observador na estação, o intervalo de tempo Δt não é igual a $\Delta t'$ .Temos:

(20)
$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

O intervalo de tempo medido pelo cronómetro no referencial em que ele está em repouso, chama-se tempo próprio. No nosso caso, o cronómetro está em repouso em S' . Como o fator gama é sempre maior que 1, o que a eq. (20) mostra é que, para o observador em repouso, o intervalo de tempo é maior. Por esta razão é usual designar a eq. (20) como a dilatação do tempo.

Não vou calcular qual a dilatação do tempo para o exemplo do alfa pendular. Recorde que mesmo para o exemplo do F16 já vimos que o gama é só 10^{-12} maior do que 1. Então, para um $\Delta t'$ de 5 dias o Δt é cerca de 1 microssegundo maior do que 5 dias! Sendo assim imagino que alguns dos leitores estejam a pensar: quem é que preocupa com tamanha chinesice? Na verdade, o que acontece é que a maioria dos meus leitores só tem a experiência de velocidades muito pequenas quando comparadas com a velocidade da luz. Mas existem partículas que se deslocam com velocidade incrivelmente próximas de c. Vejamos um exemplo.

No laboratório do CERN, que se situa perto de Genebra, na fronteira entre a Suíça e a França, existe um acelerador chamado LHC (*Large Hadron Collider*). Nesta máquina, feixes de protões atingem energias de 7 TeV (7×10^{12} eV) [2]. Sabendo a energia e a massa do protão facilmente se pode calcular o gama, usando a fórmula relativística mais conhecida, que é:

(21)
$$\mathcal{E} = \gamma mc^2$$

Na maior parte das vezes, esta equação, que até já foi capa de um número da revista Time [3], aparece escrita sem a constante gama. É verdade, aparece escrita para o caso particular da massa estar em repouso, ou seja, quando o gama é um. Mas, como eu escrevi é o caso geral. Usando a equação (21) e sabendo que para um protão se tem mc^2=938 MeV (938×10^6 eV), obtemos γ=7462. Com este valor deve ser fácil observar a dilatação do tempo! Pois é. Mas os protões do LHC não levam um cronómetro para marcar o seu tempo próprio. Tem toda a razão. Por isso vou terminar este capítulo com um exemplo que responde a esta objeção.

Os muões são partículas como os eletrões, mas que têm uma massa cerca de duzentas vezes maior. São eletrões obesos. Talvez devido à sua obesidade são instáveis. Decaem dando origem a um eletrão e dois neutrinos. A sua vida média, medida no seu referencial em repouso é de $2{,}2\times10^{-6}$ s. Com esta duração de vida, mesmo que se deslocassem com a velocidade da luz, o que é impossível, só poderiam percorrer uma distância de cerca de 660 m. Contudo, sabemos que nas altas camadas da atmosfera, a dezenas de quilómetros, se formam muitos muões e a sua esmagadora maioria atinge o nível do mar. Na verdade, ao nível do mar por cada centímetro quadrado de superfície deteta-se, em média, um muão por minuto. A energia típica destes muões é da ordem dos 2 GeV (2×10^9 eV). Espero que todos os meus leitores verifiquem, usando a eq. (21), que γ=18,9. Agora, a dilatação do tempo, eq. (20), transforma os 2,2 microssegundos em 41,6 microssegundos e os muões percorrem cerca de 12,5 km. Faltou dizer que, para o muão, mc^2=105,6 MeV .

A gravidade também muda o tempo

Todos aprendemos na escola a lei da atração gravítica cujo enunciado é: a matéria atrai matéria na razão direta das massas e na razão inversa do quadrado da distância entre elas. Esta formulação da teoria da gravitação foi feita, pela primeira vez, por Sir Isaac Newton (1643 -1727), famoso físico inglês, nos finais do século XVII. Com base nela podemos, com a mesma facilidade, explicar o movimento dos planetas e a queda de uma pedra na Terra. Tem, contudo, um grande defeito: é uma teoria estática, nela não aparece o tempo. O Sol atrai a Terra. Mas, se o Sol desaparecesse, quanto tendo depois é que a Terra saberia que isso tinha acontecido? A resposta dada pela teoria de Newton é instantaneamente. Mas todos sentimos que não deve estar certa. A luz leva cerca de oito minutos para chegar do Sol à Terra, como é que a interação gravítica pode ser instantânea?

No início do século XX e na continuação dos trabalhos sobre a teoria da relatividade restrita, Einstein desenvolveu uma nova teoria da gravitação. A ideia básica é que a presença de uma grande massa, como o Sol, por exemplo, deforma o espaço-tempo. O desaparecimento brusco do sol ou, mais realisticamente, o choque de duas estrelas, provoca alterações desta deformação. A propagação destas rugas do espaço-tempo são as ondas gravitacionais, que foram detetadas diretamente, pela primeira vez, em 2015.

Anteriormente, vimos que, $\Delta t \neq \Delta t'$, porque um dos observadores se desloca relativamente ao outro com uma certa velocidade. Agora, com base na nova teoria da gravitação, dois observadores, ambos parados, medem intervalos de tempo diferentes se estiverem a distâncias diferentes da massa que cria o campo gravítico. A distância diferente, o espaço-tempo tem uma deformação diferente. Estará tão menos deformado quanto mais longe estivermos da massa que cria o campo. Se estivermos muito afastados o espaço-tempo é plano. Tanta vez repeti a expressão espaço-tempo que devo ter aborrecido alguns dos meus leito res. Desculpem. Não queria que tivessem qualquer dúvida que não era só o espaço que fica curvo. Se voltar atrás às eqs. (17) verificará que já na relatividade restrita o espaço e o tempo estão inexoravelmente *misturados*.

Está na altura de fazermos mais uma experiência. Para isso temos de ir para Genebra e levar os nossos colaboradores, a Ana e o Bruno. Porquê Genebra? Porque é uma cidade tranquila e muito agradável e, além disso, prestaremos uma homenagem à excelente indústria suíça de relojoaria. Vamos comprar dois cronómetros. Um ficará com a Ana à beira do lago Léman e o Bruno levará o outro para o topo do Monte Branco.

A previsão, baseada na relatividade geral, é que o intervalo de tempo medido pelo Bruno, está relacionada com o intervalo de tempo medido pela Ana, pela relação:

$$\Delta t_{\mathcal{B}} = \left(1 - \frac{1}{2}\Delta\beta_{\mathcal{G}}\right)\Delta t_{\mathcal{A}} \tag{22}$$

Em que

$$\Delta\beta_{\mathcal{G}} = \frac{2\mathcal{G}\mathcal{M}}{c^2\mathcal{R}}\frac{h}{h+\mathcal{R}} \tag{23}$$

Nesta equação G=6,674x10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2} é a constante gravítica, M=5,972x10^{24} kg é a massa da Terra, R=6371 km o seu raio e h a altitude do segundo observador. O primeiro está à altitude zero. No caso presente, h é a altitude do Monte Branco, 4809 m. Substituindo os valores obtemos:

$$\Delta t_{\mathcal{B}} - \Delta t_{\mathcal{A}} = -4 \times 10^{-13}\Delta t_{\mathcal{A}}$$

Um século são 3×10^9 s. Seria preciso esperar um século para que os cronómetros da Ana e do Bruno apresentassem uma diferença de 1 milissegundo! Mais uma vez a Ana e o Bruno não vão medir nada.

Talvez os meus leitores estejam a pensar que a teoria de Einstein só é útil para quem estuda buracos negros e outros efeitos exotéricos. Se estivesse a escrever estas notas antes dos anos oitenta do século passado teria de concordar com quem assim pensasse. Mas agora não concordo.

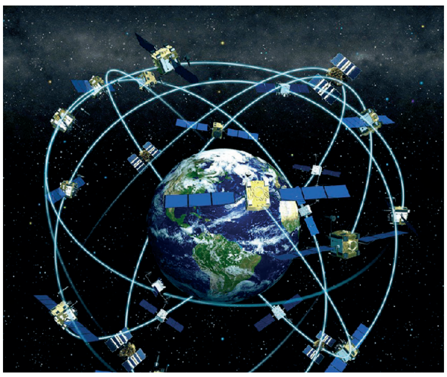

Figura 4 – A Terra rodeada pelos satélites do GPS. Cortesia da NASA science.

Hoje cada um de nós leva no bolso um pequeno computador, usualmente chamado telemóvel, que nos permite determinar a nossa posição com um erro de poucos metros. Como é do conhecimento geral esta determinação é feita utilizando um sistema de 24 satélites que, a uma altitude de cerca de vinte mil quilómetros, orbitam a Terra, de modo que, em cada ponto, pelo menos quatro satélites sejam sempre visíveis. Ver Fig.4. Estes satélites estão equipados com relógios de grande precisão, da ordem do nanossegundo, e cada um deles transmite um sinal horário e dados sobre a sua localização. Os nossos telemóveis usam a informação recebida de vários satélites, normalmente quatro ou cinco, e por triangulação determinam onde estamos. Deixo ao cuidado dos leitores verificarem que, por efeito da gravidade, ao fim de um dia o relógio de cada um dos satélites apresentaria um desvio de menos 46 microssegundos em relação aos relógios no solo. Além deste efeito, teremos também que considerar o efeito da velocidade do satélite. Como estes satélites têm velocidades da ordem de 4 km/s, o tempo no satélite ao fim de um dia é 8 microssegundos maior. No total teremos, por dia, um desvio de menos 38 microssegundos. Esta diferença, se não fosse tida em conta, inviabilizaria a utilização do GPS.

Este é um bom ponto para pôr termo a esta digressão pelo conceito de tempo. Para velocidades pequenas comparadas com a velocidade da luz no vazio e para altitudes pequenas comparadas com o raio médio da Terra, pode pensar que o tempo é absoluto. Este é o tempo a que chamei tempo do calendário. Bastava o sino do campanário da aldeia para marcar a sua passagem. Nas situações em que qualquer das hipóteses anteriores deixar de ser válida, o tempo já não é universal. Quando o campanário foi substituído pelo telemóvel estes efeitos tornaram-se importantes para todas as pessoas.

Posfácio

Escrevi este artigo para os amigos da física. Os apêndices contêm alguns detalhes que poderão ser úteis para estudantes do fim do ensino secundário e início da universidade. Um desenvolvimento mais detalhado do assunto aqui tratado pode ser encontrado em dois artigos de Paulo Crawford do Nascimento e Ana Isabel Simões, Gazeta de Física, vol. 9 pág. 36 e pág. 49, 1986. Quem pretender saber mais sobre ondas gravitacionais e buracos negros deve ler o artigo de José Sande Lemos, Carlos Herdeiro e Vítor Cardoso, publicado na mesma revista no vol. 42, pág. 36, 2019.

Aos colegas, Conceição Abreu e João Paulo Silva e á minha mulher, Maria José Barroso, agradeço a leitura crítica do manuscrito.

Augusto Barroso

Anexo 1

Num referencial de inércia, a posição de um móvel é dada pelo vetor *r* cujas componentes são *x(t),y(t),z(t)*. As componentes do vetor velocidade *v* são:

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

Consideremos agora um referencial de inércia fixo S e um outro móvel com velocidade constante *v* ao longo do eixo dos *x*. Por convenção, mas sem perda de generalidade, no instante t=0, a origem dos dois referenciais coincide. Ver Fig. 1.

A bola azul assinala a posição do móvel, no instante *t*. Basta olhar para a figura para ver que:

$$x = x' + vt \qquad \text{(A1)}$$

$$y = y' \qquad \text{(A2)}$$

$$z = z' \qquad \text{(A3)}$$

Anexo 2

Vamos mostrar como se pode deduzir a transformação de Lorentz.

Voltemos a olhar para a figura 1, mas esqueça a bola azul. Imagine que no instante $t=t'=0$, quando os dois referenciais coincidem, se acendia uma luz na origem, O=O'.

A luz propaga-se isotropicamente e, para um observador em S, ao fim de *t* segundos, a separação da luz das trevas é uma superfície esférica de raio *ct*. Quando, em casa, acendemos uma lâmpada parece que instantaneamente toda a sala fica cheia de luz. Mas, de facto, ao fim de 3 nanosegundos, a luz só chegou a um metro da lâmpada. Para chegar a dois metro ainda vai tardar mais *3ns*. A equação da superfície esférica que separa a luz das trevas é:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \qquad \text{(A4)}$$

Como $c=c'$ o observador em S' fará o mesmo raciocínio e dirá que a separação da luz das trevas é a superfície esférica:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 \qquad \text{(A5)}$$

A tarefa de encontrar as Transformações de Lorentz resume-se a encontrar a transformação linear que transforma a eq. (A4) na eq. (A5). Mais simples ainda. Como o movimento relativo se dá ao longo do eixo dos *x*, as eqs. (A2) e (A3) são válidas. Portanto estamos à procura de uma transformação que leve de

$$x'^2 = (ct')^2$$

a

$$x^2 = (ct)^2$$

Como sabemos que, para pequenas velocidades, a eq. (A1) é válida, um palpite sensato seria tentar a seguinte forma:

$$x' = x - \beta ct \qquad \text{(A6)}$$

$$ct' = ct - \beta x \qquad \text{(A7)}$$

Este palpite é sensato porque os termos lineares, isto é, os termos em *xct*, cancelam e obtemos

$$x^2(1-\beta^2) = (ct)^2(1-\beta^2)$$

Note que não seria sensato tentar $t'=t$. Como o espaço é relativo para termos uma velocidade que é absoluta, o c, então o tempo também tem que ser relativo. Agora é óbvio: basta dividir os segundos membros de (A6) e (A7) por $\sqrt{1-\beta^2}$ e temos a transformação de Lorentz:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \qquad \text{(A8)}$$

Imaginemos que, para o observador em S', *x', y'* e *z'* são a posição de um móvel no instante t'. Num instante posterior, $t'+\Delta t'$, o móvel estará em $x'+\Delta x'$, $y'+\Delta y'$, $z'+\Delta z'$. Usando a transformação de Lorentz para os acréscimos obtemos:

$$\begin{aligned} c\Delta t' &= \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) \\ \Delta x' &= \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t) \\ \Delta y' &= \Delta y \\ \Delta z' &= \Delta z \end{aligned} \qquad \text{(A9)}$$

Dividindo, ordenadamente, a segunda das eqs (A9) pela primeira teremos:

$$\frac{\Delta x'}{c\Delta t'} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - v}{c - \beta\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

Passando ao limite quando o acréscimo do tempo tende para zero, obtemos:

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v v_x}{c^2}}$$

que é a transformação, da componente *x*, do vetor velocidade. De igual modo se obteriam as transformações para as outras duas componentes.

Referências

[1] A. Pais, "Subtle is the Lord … the science and life of Albert Einstein" Oxford University Press, 1982.

[2] Um eV (eletrão volt) é a energia de um eletrão quando transita entre dois pontos cuja diferença de potencial é um Volt.

[3] Em 1 de julho de 1946 a Time publicou na capa esta equação juntamente com uma fotografia de Einstein.

Augusto Barroso, Professor Catedrático aposentado do Departamento de Física da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.