

Nem Tudo é Relativo – Uma estratégia para facilitar a resolução de problemas

Manuela Ramos Silva, Pedro Pereira da Silva

CFisUC, Departamento de Física, Universidade de Coimbra, P-3004-516 Coimbra

psidonio@uc.pt

Resumo

Aprender Física inclui tentar resolver uma grande quantidade de exercícios ou problemas, para que se ensine (e depois teste) a aplicação do conhecimento adquirido a novas situações. Neste texto, reflecte-se sobre problemas de movimento relativo e como torná-los mais compreensíveis para os alunos que tentam resolvê-los, dividindo-os em dois grandes tipos.

Introdução

Tudo é relativo. Na verdade, na lógica newtoniana, espaço e tempo são absolutos, enquanto a velocidade é relativa. Na lógica einsteiniana, espaço e tempo são relativos e a velocidade da luz é absoluta. O conceito de o movimento de um mesmo objeto ser descrito de forma diferente por dois observadores diferentes é introduzido cedo no estudo da Mecânica, até para salientar a importância da definição do referencial que se usa para definir posição, velocidade, etc,... O exemplo mais utilizado é o de um comboio que se aproxima de uma estação. Para o passageiro na estação o comboio aproxima-se, para o passageiro no comboio, é a estação que se aproxima e muitas outras situações com comboios e passageiros podem ser aproveitadas: uma delas, mais avançada, é na explicação da força fictícia a que têm de recorrer os passageiros que vêm, enquanto o comboio acelera, os objetos pendurados a fugir das suas posições verticais de equilíbrio. Recordam-se as palavras de uma aluna de 14 anos, que embora encontrasse lógica na diferente descrição do movimento pelo passageiro dentro do comboio e pelo passageiro fora na estação, não conseguia compreender porque não concordavam todos os observadores que um aluno a dormir na sua cama durante a noite estava em repouso.

Percebidas as diferentes descrições, o passo seguinte é conseguir relacionar as posições e velocidades medidas pelos dois observadores. Esta relação pode ser difícil de entender mesmo num movimento a uma dimensão como *Trudel&Metioui* [1] reportam. Em 2019, nesse inquérito a duas turmas do 11.º ano, no Canadá, sobre a posição relativa de duas bolas que se movem na mesma linha reta, com diferentes velocidades e diferentes instantes iniciais, as respostas dos alunos evidenciam a sua grande dificuldade em lidar com o movimento relativo [1]. Em 2023,

apresentou-se a sugestão de usar um smartphone, e análise de vídeo subsequente para que os alunos possam ver o mundo pelos olhos de um observador em movimento [2].

Como a transformação de Galileu não envolve o conceito de força, a relação entre vetores velocidade serve muitas vezes como a primeira aplicação em Física da adição e subtração de vetores. A maior parte dos exercícios propostos aos alunos debaixo do chapéu de movimento relativo resolvem-se com a soma/subtração de 3 vetores velocidade, o do objeto em relação a um referencial, a do objeto em relação a um segundo referencial e a de um referencial em relação ao outro. Alguns são exercícios puros de movimento relativo, com o movimento de um certo objeto a ser descrito de forma diferente por dois observadores ligados a referenciais diferentes. No outro extremo, estão exercícios que se resolvem com somas/subtrações de vetores velocidade, mas que pouco têm de movimento relativo. Lidar com vetores traz sempre uma dificuldade acrescida aos alunos, mais à vontade com valores escalares, mas, por vezes, é a interpretação inicial do enunciado do problema que os deixa zonzos.

Considerem-se duas situações muito semelhantes, esboçadas na Figura 1.: Susana, parada de um lado da estrada, chama o seu cão, inicialmente do outro lado da estrada, que atravessa com velocidade de 1 m/s, para chegar até à Susana. Santiago anda de bicicleta pelo meio da estrada com velocidade de 2 m/s. Como descrevem Susana e Santiago o movimento do cão? Na segunda situação, Susana, parada na margem de um rio, chama o seu cão, inicialmente do outro lado do rio, que consegue atravessar com velocidade de 1 m/s para tentar chegar até à Susana. Santiago está numa canoa no meio do rio e deixa-se levar pela corrente deste com velocidade de 2 m/s. Como descrevem Susana e Santiago o movimento do cão? Estes dois problemas são muito semelhantes e o facto de a resolução/resultados ser diferente surpreende (ou mesmo assusta) os alunos que a eles são expostos. O preâmbulo teórico (as transformações de Galileu) a que são expostos antes de iniciar a resolução em nada os prepara para distinguir a subtil diferença do enunciado.

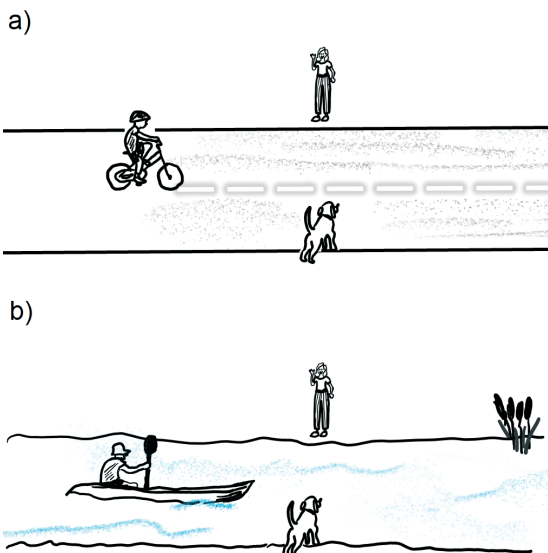


Figura 1 - Esboço mostrando as personagens das duas situações: Susana, Santiago e cão. Em a): O cão atravessa a estrada para chegar até à Susana no outro lado da estrada enquanto Santiago pedala no meio da estrada. Em b): O cão atravessa o rio para tentar chegar até à Susana na outra margem do rio enquanto Santiago desce o rio levado pela corrente.

Preâmbulo teórico

Considere-se um observador ligado a um referencial S, que se supõe fixo em relação à Terra. Considere-se outro referencial S' que se move relativamente ao primeiro. Considere-se agora um objeto e o seu vetor posição relativamente aos dois referenciais. Olhando para a Figura 2, facilmente se encontra a seguinte relação vetorial:

$$(1) \quad \vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{S'S}$$

Que derivando em ordem ao tempo, uma e duas vezes, dá a relação entre velocidades e entre acelerações:

$$(2) \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{S'S}$$

$$(3) \quad \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{S'S}$$

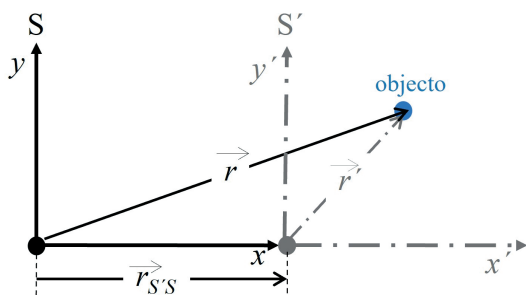


Figura 2 - Vetor posição de um objeto descrito por dois referenciais diferentes, S e S'.

Primeira situação

A primeira situação corresponde a um problema puro de movimento relativo. Escolhendo-se arbitrariamente as posições iniciais relativas entre a Susana (S), o Santiago (S') e o cão, conforme a figura 3, podem-se desenhar as posições ocupadas segundo a segundo dos intervenientes, no referencial da Susana ou no referencial do Santiago. Susana vê o cão dirigir-se a ela em linha reta, percorrendo um metro a cada segundo, e vê Santiago também

pedalar em linha reta, percorrendo dois metros a cada segundo. No instante $t=2$ s, cão e Santiago estão na mesma posição, dois metros à sua frente. No instante $t=4$ s o cão ocupa a origem do referencial, ou seja, está junto à Susana.

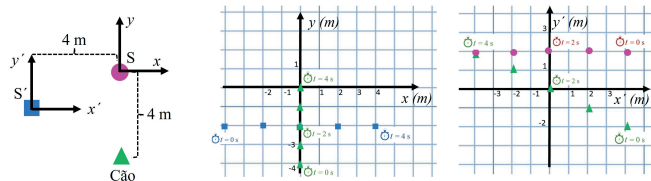


Figura 3 - (Esquerda) esquema mostrando as posições iniciais relativas e os referenciais S e S'. (Centro) Trajetória do cão e do Santiago em relação à Susana. (Direita) Trajetória do cão e da Susana em relação ao Santiago (S').

Segundo o Santiago, ou seja, em relação ao referencial S', ele próprio está em repouso, mantendo-se na origem do seu referencial. A Susana move-se da direita para a esquerda, percorrendo dois metros a cada segundo e o cão tem uma trajetória oblíqua. No instante $t=2$ s, cão e Santiago estão na mesma posição, a origem do referencial S'. No instante $t=4$ s, cão e Susana estão juntos na posição de coordenadas $(-4, 2)$ em S'.

Pode-se escrever em função do vetor posição e do vetor velocidade, em relação a S:

$$(4) \quad \vec{r}_{Susana}(t) = 0$$

$$(5) \quad \vec{r}_{cão}(t) = (-4 + t) \hat{u}_y$$

$$(6) \quad \vec{r}_{Santiago}(t) = (-4 + 2t) \hat{u}_x - 2\hat{u}_y$$

E também o vetor velocidade

$$(7) \quad \vec{v}_{Susana}(t) = 0$$

$$(8) \quad \vec{v}_{cão}(t) = 1 \hat{u}_y$$

$$(9) \quad \vec{v}_{Santiago}(t) = 2 \hat{u}_x$$

E em relação a S':

$$(10) \quad \vec{r}_{Susana}(t) = (4 - 2t) \hat{u}_x + 2\hat{u}_y$$

$$(11) \quad \vec{r}_{cão}(t) = (4 - 2t) \hat{u}_x + (-2 + t) \hat{u}_y$$

$$(12) \quad \vec{r}_{Santiago}(t) = 0$$

E também o vetor velocidade

$$(13) \quad \vec{v}_{Susana}(t) = -2 \hat{u}_x$$

$$(14) \quad \vec{v}_{cão}(t) = -2 \hat{u}_x + 1 \hat{u}_y$$

$$(15) \quad \vec{v}_{Santiago}(t) = 0$$

E naturalmente se verificam as relações entre vetores posição e velocidade, descritos por dois referenciais que se movem um em relação ao outro:

$$(16) \quad \vec{r}_{cão,Susana}(t) = \vec{r}_{cão,Santiago}(t) + \vec{r}_{Santiago,Susana}(t)$$

$$(17) \quad \vec{v}_{cão,Susana}(t) = \vec{v}_{cão,Santiago}(t) + \vec{v}_{Santiago,Susana}(t)$$

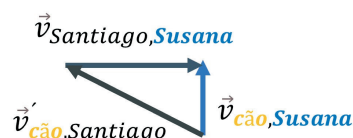


Figura 4 - Esquema mostrando o vetor velocidade dos intervenientes no exercício e a relação entre esses vetores (equação 17).

Podem-se escolher outros referenciais S' para descrever o movimento do cão, o referencial que acompanha uma pata e seus patinhos a atravessar a estrada na diagonal, um gato que atravessa em sentido contrário ao do cão, um rapazinho no seu skate ao longo da estrada, uma aranha que desce com velocidade constante por um fio da sua teia (Figura 5). À medida que se muda de observador muda-se a descrição do movimento do cão, ou seja, há diferentes coordenadas iniciais, diferentes coordenadas finais, diferentes módulos, direções e sentidos da velocidade, mas no final todos dirão: ao fim de 4 segundos, o cão está nos braços da Susana.

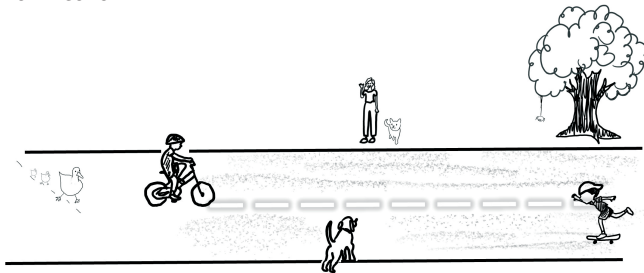


Figura 5 - Esboço mostrando as personagens Susana, Santiago e cão, acrescentando novos referenciais, gato, aranha, pata e skater.

Segunda situação

A segunda situação corresponde a um problema mais complexo que inclui movimento relativo, do tipo conhecido nos países anglo-saxónicos por *River-Boat problems*. A Susana tem o mesmo movimento, parada no referencial S , em movimento uniforme da direita para a esquerda no referencial S' . O Santiago tem o mesmo movimento, parado no seu referencial, em movimento uniforme da esquerda para a direita no referencial S , pedalar ou deixar-se levar pela corrente corresponde ao mesmo movimento. Mas o cão tem um movimento distinto, assim que entra na água ganha uma nova componente da velocidade, quase instantaneamente, empurrado pelas moléculas da água. Mas surgem novas forças? Sim. Um cão ou um nadador humano numa corrente de água, ou um avião numa corrente de vento corresponde a um objeto movendo-se num fluido viscoso também ele em movimento. E sobre o nadador, por exemplo, passam a actuar a força de impulsão e forças de resistência viscosa para além da força gravítica. As forças de resistência viscosa são complexas e variáveis, mudando de módulo, direção e sentido nas diferentes partes do corpo do nadador. É possível, porém, considerar que a resultante das forças se anula, em certas circunstâncias, proporcionando ao nadador um movimento retilíneo e uniforme. O efeito das forças viscosas traduz-se assim no surgimento num pequenino intervalo de tempo de uma nova componente da velocidade do nadador, igual à velocidade do fluido, que se mantém depois constante. No caso do cão da Susana, este mantém a sua componente de 1 m/s segundo o eixo dos yy e ganha uma nova componente de 2 m/s segundo o eixo dos xx , equação 18.

$$(18) \quad \vec{v}_{\text{cão}}(t) = 2 \hat{u}_x + 1 \hat{u}_y$$

Especificando as posições iniciais relativas entre a Susana (S), o Santiago (S') e o cão, conforme a figura 6, podem-se desenhar as posições ocupadas segundo a segunda pelos intervenientes, no referencial da Susana ou no referencial do Santiago. Susana vê o cão dirigir-se a ela numa trajetória oblíqua, e vê Santiago deslizar em linha reta. No instante $t=4$ s o cão chega à outra margem mas longe da Susana.

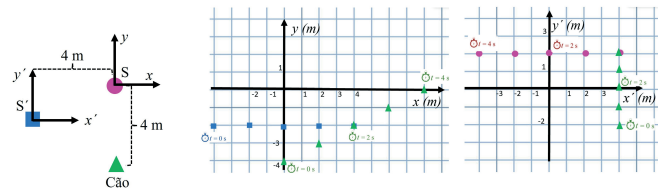


Figura 6 - (Esquerda) esquema mostrando as posições iniciais relativas. (Centro) Trajetória do cão e do Santiago em relação à Susana. (Direita) Trajetória do cão e da Susana em relação ao Santiago.

Segundo o Santiago, ou seja, em relação ao referencial S' , ele próprio está em repouso, mantendo-se na origem do seu referencial. A Susana move-se da direita para a esquerda, percorrendo dois metros a cada segundo e o cão tem uma trajetória em linha reta. No instante $t=4$ s, a Susana está na posição de coordenadas $(-4, 2)$ em S' , e o cão em $(4, 2)$, a posição inicial da Susana.

Pode-se escrever em relação a S :

$$(19) \quad \vec{r}_{\text{Susana}}(t) = 0$$

$$(20) \quad \vec{r}_{\text{cão}}(t) = (0 + 2t) \hat{u}_x + (-4 + t) \hat{u}_y$$

$$(21) \quad \vec{r}_{\text{Santiago}}(t) = (-4 + 2t) \hat{u}_x - 2 \hat{u}_y$$

E também o vetor velocidade

$$(22) \quad \vec{v}_{\text{Susana}}(t) = 0$$

$$(23) \quad \vec{v}_{\text{cão}}(t) = 2 \hat{u}_x + 1 \hat{u}_y$$

$$(24) \quad \vec{v}_{\text{Santiago}}(t) = 2 \hat{u}_x$$

E em relação a S' :

$$(25) \quad \vec{r}'_{\text{Susana}}(t) = (4 - 2t) \hat{u}_x + 2 \hat{u}_y$$

$$(26) \quad \vec{r}'_{\text{cão}}(t) = 4 \hat{u}_x + (-2 + t) \hat{u}_y$$

$$(27) \quad \vec{r}'_{\text{Santiago}}(t) = 0$$

E também o vetor velocidade

$$(28) \quad \vec{v}'_{\text{Susana}}(t) = -2 \hat{u}_x$$

$$(29) \quad \vec{v}'_{\text{cão}}(t) = 1 \hat{u}_y$$

$$(30) \quad \vec{v}'_{\text{Santiago}}(t) = 0$$

E naturalmente se verificam as relações entre vetores posição e velocidade, descritos por dois referenciais que se movem um em relação ao outro:

$$(31) \quad \vec{r}_{\text{cão}, \text{Susana}}(t) = \vec{r}'_{\text{cão}, \text{Santiago}}(t) + \vec{r}_{\text{Santiago}, \text{Susana}}(t)$$

$$(32) \quad \vec{v}_{\text{cão}, \text{Susana}}(t) = \vec{v}'_{\text{cão}, \text{Santiago}}(t) + \vec{v}_{\text{Santiago}, \text{Susana}}(t)$$

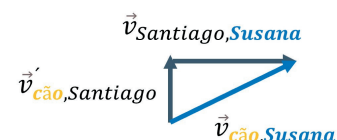


Figura 7 - Esquema mostrando o vetor velocidade dos intervenientes no exercício e a relação entre eles (equação 32).

A velocidade do cão em relação ao Santiago é de 1 m/s na direção y' , tal como fora a velocidade do cão em relação à Susana na primeira situação ou (extrapolando) como seria a velocidade do cão em relação à água parada. E é com esta última consideração que os exercícios são muitas vezes apresentados. Senão atentem nos dois enunciados seguintes, publicados num dos li-

vros mais utilizados a nível mundial:

Fundamentos de Física, de Walker, Halliday e Resnick, Décima edição, volume 1, módulo 4-7 Movimento relativo a duas dimensões, exercício 77-

A neve está caindo verticalmente com uma velocidade constante de 8,0 m/s. Com que ângulo, em relação à vertical, os flocos de neve parecem estar caindo do ponto de vista do motorista de um camião que viaja em uma estrada plana e retilínea a uma velocidade de 50 km/h?

Este problema remete para a primeira situação apresentada entre cão, Susana e Santiago. É conhecida a descrição do movimento de um objeto em relação a um referencial (aqui referencial fixo ligado à Terra) e pede-se a descrição do movimento segundo outro observador (referencial com movimento retilíneo e uniforme em relação ao primeiro)

$$(33) \quad \vec{v}_{flocos,Terra} = \vec{v}'_{flocos,motorista} + \vec{v}_{motorista,Terra}$$

$$(34) \quad \vec{v}'_{flocos,motorista} = -13,9\vec{u}_x - 8,0\vec{u}_y$$

$$(35) \quad \tan \theta = \frac{-8,0}{-13,9} \Rightarrow \theta \approx 30,0^\circ \quad (60,0^\circ \text{ com a direcção vertical})$$

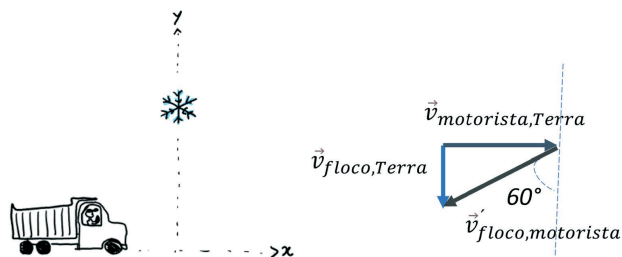


Figura 8 - (Esquerda) Esquema mostrando as posições iniciais relativas. (Direita) Relação entre os vetores velocidade.

Na mesma secção, no mesmo livro, encontra-se o seguinte exercício proposto, exercício 76 :

Um avião pequeno atinge uma velocidade do ar de 500 km/h. O piloto pretende chegar a um ponto 800 km ao norte, mas descobre que deve direccionar o avião 20,0° a leste do norte para atingir o destino. O avião chega em 2,00 h. Quais eram (a) o módulo e (b) a orientação da velocidade do vento?

Este problema remete para a segunda situação imaginada para o cão, Susana e Santiago. O avião movimenta-se dentro de um fluido viscoso. As informações que são dadas sobre o movimento do avião dizem respeito a dois referenciais. Podemos resolvê-lo considerando que o efeito da entrada do avião num fluido viscoso em movimento corresponde ao avião adquirir uma componente da velocidade igual à do fluido (vento).

$$(36) \quad \vec{v}_{avião} = \vec{v}_{avião}^{inicial} + \vec{v}_{vento}$$

$$(37) \quad \left(\frac{800}{2}\right)\vec{u}_y = (500\sin 20,0^\circ\vec{u}_x + 500\cos 20,0^\circ\vec{u}_y) + \vec{v}_{fluido}$$

$$(38) \quad \vec{v}_{fluido} = -171,0\vec{u}_x - 69,8\vec{u}_y \left(\frac{km}{h}\right)$$

Este problema também pode ser resolvido recorrendo à relação de velocidades (equação 2, figura 9 direita). Mas ao aluno deve ser explicado o seguinte: 500 km/h é o módulo da velocidade relativa entre o avião e o ar, e é sempre o mesmo quer o ar esteja parado, quer exista vento com qualquer direcção e intensidade. A direcção 20,0° a leste do norte diz respeito ao referencial as-

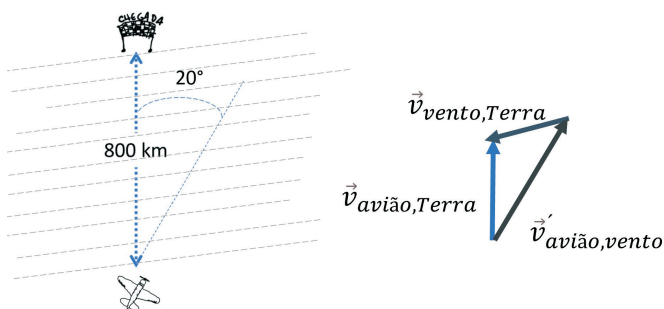


Figura 9 - (Esquerda) esquema mostrando as posições iniciais relativas. (Direita) Relação entre os vetores velocidade.

sociado ao vento. A distância 800 km entre o ponto de partida e o de chegada, o tempo de 2 horas e a direcção Sul-Norte dizem respeito ao referencial ligado à Terra.

Conclusão

Os problemas sobre movimento relativo são receados pelos alunos e também pelos professores por saberem que os alunos os acham difíceis de entender. Nós propomos que os professores ensinem os alunos a distinguir o tipo de exercício que estão a tentar resolver, distinguindo entre os problemas que descrevem completamente o movimento de um objeto segundo um referencial e pedem a descrição do movimento segundo outro referencial em movimento relativamente ao primeiro, e o outro tipo de exercícios em que o objeto mergulha num fluido em movimento, com as informações do enunciado a dizerem respeito aos dois referenciais (o do fluido e um referencial fixo na Terra).

Referências

- [1] L.Trudel, A. Métioui, "High School Students' Models of Relative Motion in Physics", Proceedings of the 3rd International Baltic Symposium on Science and Technology Education, BalticSTE2019, 238 (2019).
- [2] N. Campos, P. Pereira da Silva, S. Domingos & M. Ramos Silva, "Relative motion made real", The Physics Teacher 61(6):534-535 (2023) DOI:10.1119/5.0131137
- [3] Walker, Halliday & Resnick: "Fundamentos de Física", 10ª edição, LTC, 2016. ISBN-10-8521630352.



Manuela Ramos Silva licenciou-se em Física em 1993 e doutorou-se em Física Experimental em 2002 na Universidade de Coimbra, onde é professora associada com agregação. Trabalha na área da Física dos Materiais, com particular interesse em magnetismo molecular, tendo mais de 250 artigos publicados em revistas internacionais e mais de 3000 horas de aulas lecionadas.



Pedro Sidónio Pereira da Silva licenciou-se em Engenharia Física em 1995 e finalizou o seu mestrado em Física Tecnológica em 2000 na Universidade de Coimbra. Obteve o grau de Doutor em Física Experimental em 2012 na mesma Universidade, onde trabalha atualmente como técnico superior (laboratório TAIL-UC). Entre 2000 e 2008 foi assistente no Instituto Politécnico de Castelo Branco. Trabalha na área da Física dos Materiais, com particular interesse em óptica não-linear, tendo mais de 100 artigos publicados em revistas internacionais.