

# A era da precisão nos modelos computacionais de ondas gravitacionais

Ulrich Sperhake

DAMTP, Centre for Mathematical Sciences, University of Cambridge  
Department of Physics and Astronomy, Johns Hopkins University

U.Sperhake@damtp.cam.ac.uk

*As equações de Einstein da relatividade geral constituem um dos conjuntos mais complexos de equações em toda a física e, salvo em cenários idealizados, só podem ser resolvidas através de métodos numéricos em sistemas de computação de alto desempenho. A geração dessas soluções é uma verdadeira Odisseia por si só, envolvendo aventuras nos domínios da teoria matemática, da interpretação física e dos desafios computacionais. Estes esforços culminaram em meados dos anos 2000, quando o problema dos dois corpos na relatividade geral foi finalmente resolvido. E não foi cedo demais, pois esses resultados — e as investigações subsequentes — vieram a desempenhar um papel fundamental na descoberta das ondas gravitacionais pelo LIGO em 2015, que viria a ser distinguida com o Prémio Nobel.*

## 1 – Introdução

Quando Albert Einstein publicou a sua teoria da relatividade geral (RG) em 1915 [1], não se limitou a apresentar uma descrição teórica mais refinada e precisa dos fenómenos gravitacionais, substituindo a gravidade de Isaac Newton, que reinava há séculos. Fê-lo, sem dúvida, e conseguiu resolver enigmas astrofísicos como a precessão do periélio de Mercúrio, o planeta mais interior do sistema solar. Mas a sua teoria pode ser considerada verdadeiramente revolucionária na forma como alterou a nossa perceção da própria estrutura do espaço e do tempo. Antes da relatividade, as teorias físicas funcionavam como um guião para uma peça de teatro a desenrolar-se num palco. A teoria consistia num conjunto de equações matemáticas que determinavam como evoluía um sistema físico dado um estado inicial, ou qual o estado de equilíbrio que o sistema assumiria perante determinadas condições de fronteira. As soluções dessas equações eram funções que, para cada ponto no espaço e no tempo, forneciam os valores das grandezas físicas relevantes. Um exemplo familiar é a previsão meteorológica, que, tendo como dados iniciais o estado atual do tempo, calcula temperatura, pressão, humidade, etc., em função do espaço (cidade, vila ou região) e do tempo futuro. O espaço e o tempo funcionavam apenas como um sistema de coordenadas — sabíamos intuitivamente o que eram. Ou assim pensávamos...

Einstein já havia revelado uma ligação notável entre espaço e tempo quando publicou a sua teoria da relatividade restrita em 1905. Baseando-se apenas na observação experimental de que a velocidade da luz é uma constante universal, Einstein concluiu que a

medição de intervalos de tempo ou do comprimento de corpos físicos depende inevitavelmente do movimento do observador. Num sentido que pode ser formulado com precisão matemática, podemos trocar tempo por espaço (ou vice-versa) viajando. Apesar desta ligação extraordinária, o espaço-tempo — como passaremos a designar esta união — mantém uma natureza convencional na relatividade restrita; continua a ser um pano de fundo estático onde os eventos decorrem, mas que não é afetado pelas “ações da peça”.

A relatividade geral de Einstein destronou de vez essa visão convencional. Em vez de ser apenas o palco, o espaço-tempo junta-se ao elenco e torna-se um ator dinâmico na peça a que chamamos física. Se associarmos a visão estática do espaço e do tempo a um campo de futebol onde 22 jogadores desempenham as suas funções, a nova visão é a de um oceano tempestuoso que reage intensamente (e por vezes ameaça) a integridade e o movimento das embarcações. Naturalmente, a natureza dinâmica da superfície do oceano resulta de fatores externos como o vento ou os efeitos de maré da Lua e do Sol. Na relatividade geral, não há agentes externos. O “oceano” representa todo o espaço-tempo, e o nosso “conjunto de embarcações” inclui o vento, a Lua, o Sol e todos os demais objetos que se movem no espaço-tempo e “agitam o oceano”. As perturbações no oceano são, assim, geradas exclusivamente pelos navios, enquanto o oceano determina como os navios se movem. Ou, como dizia John Wheeler, “O espaço-tempo diz à matéria como se mover; a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar.”

O ramo da matemática que permitiu a Einstein formular esta ideia no contexto de uma teoria física abrangente chama-se geometria diferencial. Todos estamos familiarizados com elementos da geometria plana ou euclidiana aprendidos na escola; por exemplo, “aprendemos” que duas retas se cruzam uma vez ou (se forem paralelas) nunca, e que os ângulos de um triângulo somam sempre 180°. Estas afirmações são válidas enquanto fizermos geometria com um lápis sobre uma folha de papel plana. Mas, com o tempo, os matemáticos perceberam que a geometria euclidiana é apenas um caso particular e que a geometria em superfícies curvas pode comportar-se de forma muito diferente. O exemplo mais evidente é a superfície do planeta Terra. Os ângulos do triângulo formado pelo Polo Norte, Singapura e a capital do Equador, Quito (ambas quase

exatamente sobre o equador), somam muito mais de  $180^\circ$  (experimenta num globo, se tiveres dúvidas). A geometria diferencial é a formulação matemática da geometria em superfícies arbitrárias. Desenvolvida em grande parte por Bernhard Riemann no século XIX, era bem conhecida de Einstein, que percebeu como permitiria incorporar a gravidade na relatividade restrita e, assim, originar a teoria da relatividade geral.

Podemos compreender este conceito regressando ao exemplo da superfície da Terra. Imaginemos dois aventureiros, um em Quito e outro em Singapura, cada um munido de uma bússola perfeita. Suponhamos que os polos norte magnético e geográfico coincidam exatamente (e não apenas aproximadamente), e que os nossos aventureiros podem caminhar por montanhas e atravessar oceanos. Ambos seguem rumo a norte, guiados pela sua bússola. Inicialmente separados por cerca de 20 000 km, acabarão inevitavelmente por se encontrar no Polo Norte. Isto é exatamente o que acontece quando a Terra e um meteorito colidem devido à atração gravitacional. Mas, neste caso, não há qualquer força de atração entre os nossos aventureiros; a sua aproximação resulta apenas do facto de se moverem numa superfície curva — mais uma vez, experimenta com um globo. Uma introdução fascinante e visualmente rica às complexidades da geometria em espaços curvos pode ser encontrada em *La Géométricon*, de Jean-Pierre Petit [2].

A teoria de Einstein descreve a gravidade não como uma força, mas como o resultado de objetos que seguem trajetórias aparentemente retas — chamadas *geodésicas* — num espaço-tempo curvo. Na sua teoria, temos quatro dimensões: três espaciais e uma temporal, mas o conceito geométrico é idêntico ao do exemplo acima. Para concluir a sua teoria, Einstein precisava de um último ingrediente: um conjunto de equações que determinasse como a curvatura do espaço-tempo se relaciona com o conteúdo de matéria. As equações da física raramente envolvem apenas variáveis e números desconhecidos — são geralmente equações diferenciais, que relacionam funções com a sua taxa de variação. Um exemplo simples é a evolução da espuma num copo de cerveja. A espuma é composta por inúmeras bolhas, cada uma com a mesma probabilidade de rebentar. O número de bolhas perdidas em cada intervalo de tempo é proporcional ao número atual de bolhas. Ou seja, procuramos uma função cuja taxa de variação no tempo é uma constante multiplicada pela própria função. A solução é uma função exponencial — logo, a espuma da cerveja decai segundo uma lei exponencial. O mesmo se aplica à desintegração radioativa.

Infelizmente, as equações de Einstein são muito mais complicadas. Em vez de uma, temos 10 equações e 10 funções incógnitas. Além disso, envolvem variações tanto no espaço como no tempo, incluindo derivadas de segunda ordem (ou seja, taxas de variação da taxa de variação). Estas equações contêm milhares de termos, com produtos de funções desconhecidas espalhados por todo o lado, tornando-as não lineares. Em matemática, a palavra “não linear” evoca quase a mesma sensação que uma tumba num filme de Indiana Jones: excitante, mas cheia de armadilhas letais. Quando completou a sua teoria, o próprio Einstein era cético quanto à possibilidade de alguém encontrar uma solução fisicamente interessante. Contudo, neste caso, Einstein enganou-se. Enquanto servia na frente germano-russa durante a Primeira Guerra Mundial, Karl Schwarzschild [3] descobriu a primeira solução

exata das equações de Einstein: o espaço-tempo contendo apenas um pequeno aglomerado de matéria — uma massa pontual. Esse espaço-tempo é esfericamente simétrico, ou seja, pode ser rodado em qualquer direção sem alterar a sua aparência, tal como uma esfera de vidro parece igual de qualquer ângulo. Esta solução ficou mais tarde conhecida como buraco negro de Schwarzschild e teve (e continua a ter) um enorme impacto na compreensão da teoria de Einstein. Onde falhou o pessimismo de Einstein? Em uma só palavra: *simetria*. As equações de Einstein simplificam-se muito quando as funções dependem apenas da distância ao centro, em vez de todas as coordenadas espaço-temporais. A generalização do buraco negro de Schwarzschild para um buraco negro com rotação — que depende de duas coordenadas em vez de uma — foi descoberta apenas cerca de 50 anos depois, por Roy Kerr [4]. Apesar de se terem encontrado muitas soluções exatas desde então, todas elas dependem de suposições fortes de simetria.

No entanto, a maioria dos sistemas físicos relevantes não obedece a estas simetrias, o que exige o uso de métodos aproximados. Existem três grandes abordagens. Na *teoria de perturbações*, assume-se que o espaço-tempo está próximo de uma solução altamente simétrica já conhecida. As perturbações — isto é, os desvios — são consideradas pequenas, e descartam-se todos os termos com produtos de duas ou mais perturbações. Este processo chama-se *linearização* e é amplamente utilizado em várias áreas da física. Na relatividade geral, gerou conhecimento precioso sobre sistemas tão diversos como a evolução do universo ou a vibração de buracos negros excitados. A segunda abordagem altera as próprias equações de campo, como nos formalismos pós-newtoniano ou pós-minkowskiano [5,6], em que se trata a relatividade geral como uma correção da gravidade newtoniana, válida até certa ordem em função da velocidade ou da compacidade dos objetos. Por fim, podemos discretizar as equações diferenciais da teoria de Einstein e representar as soluções como conjuntos de dados calculados numericamente em supercomputadores. Ao contrário das outras aproximações, esta abordagem é válida em qualquer regime da relatividade geral e não tem limitações de precisão, exceto os recursos computacionais disponíveis. Estas técnicas são comuns em muitas áreas — por exemplo, na previsão do tempo. No contexto da teoria de Einstein, esta área de investigação chama-se *relatividade numérica* [7-10].

## 2 – O problema de dois corpos e as ondas gravitacionais

O sistema físico mais simples e fundamental em qualquer teoria da gravidade é o problema dos dois corpos, ou seja, o comportamento dinâmico de dois objetos de tamanho desprezável que interagem exclusivamente através da gravidade. Como exemplo clássico, ilustramos este caso com o sistema Terra-Lua na Fig. 1. De acordo com a lei da gravitação de Newton, a Lua e a Terra exercem forças gravitacionais uma sobre a outra com igual intensidade e em direções opostas. As equações de Newton que regem este sistema podem ser resolvidas analiticamente e resultam na elipse de Kepler, ou seja, os dois corpos orbitam-se mutuamente numa elipse fechada e com periodicidade perfeita. O mesmo cálculo pode ser aplicado a qualquer par de objetos, como o Sol e qualquer um dos seus planetas. Naturalmente, neste tipo de cálculo ignoramos os efeitos dos restantes planetas, luas, etc., e a estabilidade a longo prazo do sistema solar continua a ser objeto de investigação até hoje. No entanto, o problema dos dois corpos na física newtoniana está matematicamente resolvido e completa-

mente compreendido — ponto final.

Na relatividade geral (RG), a história é bastante diferente. Neste caso, o problema dos dois corpos só foi resolvido em 2005, utilizando métodos numéricos. Para percebermos por que motivo isso é muito mais difícil na RG, precisamos de entender duas diferenças qualitativas entre o problema dos dois corpos na RG e o seu equivalente na física newtoniana: (i) não existem massas pontuais na RG; e (ii) o problema relativista dos dois corpos é dissipativo, ou seja, perde gradualmente energia sob a forma de radiação gravitacional. Começemos pela primeira característica. A noção de partícula pontual é naturalmente uma idealização para qualquer objeto macroscópico; todos os corpos têm um tamanho finito e

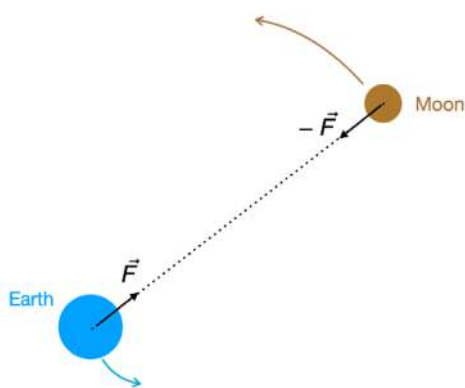


Figura 1 - Ilustração do sistema Terra-Lua na gravidade newtoniana: A Terra e a Lua atraem-se mutuamente com uma força gravitacional igual e em direções opostas, e orbitam-se uma à outra como consequência disso.

representá-los por um ponto significa apenas que esse tamanho é tão pequeno que os seus efeitos podem ser ignorados. Matematicamente, porém, o conceito de partícula pontual na física newtoniana é exato no sentido de que se obtém uma equação diferencial que podemos resolver com precisão. Na relatividade geral, contudo, algo bizarro acontece e destrói a ideia de uma partícula pontual. Suponhamos que possuímos toda a tecnologia necessária para criar tal partícula comprimindo um aglomerado de matéria até um volume cada vez menor. Ao reduzir o tamanho do aglomerado mantendo a sua massa total constante, a curvatura imediatamente fora da superfície do aglomerado tornar-se-á cada vez maior. A certa altura, essa curvatura será tão intensa que nada poderá escapar daquela região — nem sequer a luz; formou-se um horizonte de eventos, ou seja, um buraco negro. Se aplicarmos esta experiência à Terra, por exemplo, isso acontece quando comprimimos todo o planeta até ao tamanho de uma cereja; no caso do Sol, bastaria reduzi-lo a uma esfera com cerca de 3 km de raio, aproximadamente o tamanho da cidade de Cambridge. A esse raio dá-se o nome de raio de Schwarzschild. Até uma partícula pontual tem um horizonte de eventos com raio de Schwarzschild e, por isso, uma estrutura de extensão finita; em outras palavras, a aproximação mais próxima de uma partícula pontual na RG é um buraco negro. Isto tem consequências particularmente drásticas quando duas partículas pontuais colidem: a gravidade força-as a fundirem-se num único buraco negro maior. Na nossa experiência mental, comprimimos matéria artificialmente para dentro do horizonte de eventos, mas os teoremas da singularidade de

Roger Penrose e Stephen Hawking [11-13] preveem que a própria gravidade é perfeitamente capaz de realizar essa façanha sem a nossa intervenção. Mais ainda, os seus resultados preveem que este processo não conduz apenas à formação de um horizonte, mas também a singularidades físicas, ou seja, pontos no espaço-tempo onde a curvatura se torna infinita.

A segunda diferença qualitativa entre a RG e a gravidade newtoniana decorre da participação dinâmica do espaço e do tempo na própria dinâmica física. Voltando por um momento à nossa analogia com a superfície da água, tudo o que se move no espaço-tempo gera ondas, como aves ou peixes num lago. Estas ondulações no espaço-tempo são chamadas ondas gravitacionais ou radiação gravitacional, cuja deteção pelos detetores LIGO em 2015 [14] foi distinguida com o Prémio Nobel de 2017. A ideia das ondas gravitacionais é antiga e foi inicialmente formulada pelo próprio Einstein. Acima mencionámos a teoria de perturbações como um método para encontrar soluções aproximadas das equações de Einstein. Utilizando esse mesmo método, Einstein percebeu que as suas equações, quando linearizadas, admitem soluções com a forma de ondas [15]. Durante os 40 anos seguintes, contudo, a comunidade científica permaneceu incerta quanto ao significado físico dessas soluções, e vários cientistas — incluindo Einstein — oscilaram entre considerá-las reais ou meros artefactos matemáticos. Esta confusão na interpretação de soluções matemáticas pode parecer estranha, dada a natureza rigorosa da disciplina, mas é, na verdade, comum na física. A teoria da mecânica quântica, por exemplo, fornece previsões matemáticas em notável concordância com todo o tipo de experiências, mas Richard Feynman declarou célebramente: *Penso poder afirmar com segurança que ninguém compreende verdadeiramente a mecânica quântica*. Os leitores podem testar esta afirmação tentando perceber se o gato de Schrödinger está vivo ou morto.

A dificuldade em compreender a realidade das ondas gravitacionais tem duas origens. A primeira prende-se com a chamada invariância de calibre (*gauge invariance*). Este termo aparentemente complexo significa que, na física, podemos frequentemente mudar os rótulos ou coordenadas sem alterar nada no sistema descrito. Por exemplo, a longitude de qualquer ponto da Terra é definida em relação ao meridiano de Greenwich. Se mudássemos esse ponto de referência — por exemplo, para o Estádio Azteca na Cidade do México — todos os locais na Terra receberiam novas coordenadas, mas nada mudaria fisicamente. Esse tipo de liberdade surge em muitas áreas da física e, perante um resultado matemático, é preciso analisar cuidadosamente se descreve apenas essa liberdade de rotulagem ou um efeito realmente observável. A segunda dificuldade na interpretação das ondas gravitacionais resulta do próprio uso da teoria de perturbações. Não há qualquer garantia de que as soluções desta versão aproximada das equações de Einstein correspondam efetivamente a soluções das equações completas. Na prática, costuma funcionar — mas não podemos ter a certeza.

No final da década de 1950, o equilíbrio começou finalmente a inclinar-se; combinando uma compreensão mais profunda do papel da curvatura na relatividade com experiências mentais engenhosas, Hermann Bondi, Richard Feynman, Josh Goldberg, Felix Pirani e outros argumentaram de forma convincente que as ondas gravitacionais geram efeitos fisicamente observáveis [16]. Poucos

anos depois, Hermann Bondi, Rainer Sachs e colaboradores resolveram a questão de forma definitiva ao calcular os efeitos da radiação gravitacional na teoria completa de Einstein, sem recurso a aproximações [17-18]. Esta realização deu início a investigações científicas com repercussões e marcos significativos até aos dias de hoje.

O primeiro desses marcos foi a construção de dispositivos para a deteção direta de ondas gravitacionais. As primeiras investigações de Einstein já indicavam que, mesmo que reais, os efeitos mensuráveis das ondas gravitacionais que atravessam a Terra seriam minúsculos; em termos físicos, a interação da gravidade com a matéria é muito fraca. Dado o impacto potencialmente fatal de saltar de uma ponte ou de um arranha-céus, isso pode parecer contraintuitivo à primeira vista, mas, num sentido rigoroso, a gravidade é milhões e milhões de vezes mais fraca do que as outras interações fundamentais — por exemplo, a força eletromagnética: um pequeno ímã consegue atrair um clipe metálico com força suficiente para contrariar a atração gravitacional de todo o planeta Terra.

Resumidamente, um detetor de ondas gravitacionais tem de ser excepcionalmente sensível e preciso. Mais concretamente, se uma onda gravitacional passar através de mim (ou de qualquer outro objeto), causará uma distorção periódica no meu corpo, tornando-me sucessivamente mais alto e mais estreito, depois mais baixo e mais largo, e assim por diante. No entanto, não há motivos para alarme: a variação no comprimento é minúscula — muito inferior ao raio de um próton. Apesar da dificuldade desta tarefa, Joseph Weber foi pioneiro na construção de dispositivos para medir esse efeito, através de detetores de barra, e conseguiu mesmo enviar um deles para a Lua como parte da missão Apollo 17. Essencialmente, trata-se de um cilindro metálico cujas deformações podem ser medidas com elevada precisão usando os chamados *efeitos piezoelétricos*. Weber chegou a publicar alegações de deteção positiva, mas esses resultados não foram reproduzidos e, tendo também em conta as estimativas da energia associada às ondas, foram considerados como artefactos de ruído [19]. Ainda assim, e de forma positiva, Weber tinha aberto a “caixa de Pandora”.

Nas décadas seguintes, cientistas de todo o mundo exploraram o design de detetores para medir ondas gravitacionais, destacando-se, em particular, o Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferometria Laser (LIGO) [20] nos EUA, os seus homólogos europeus GEO600 [21] e Virgo [22], e o japonês KAGRA [23]. Ao enviar feixes de laser em vaivém através de dois tubos de vácuo com quilómetros de extensão dispostos em forma de L, é possível medir variações relativas no comprimento dos tubos com a precisão surpreendente de 1 parte em  $10^{20}$ ; isso equivale a medir a distância à estrela mais próxima — o sistema Alpha Centauri, a 4,25 anos-luz — com a precisão da largura de um fio de cabelo. Naturalmente, a construção de um dispositivo tão sensível — e o seu contínuo aperfeiçoamento — demorou décadas. Uma versão ampliada deste conceito, a Laser Interferometer Space Antenna (LISA) [24], está atualmente a ser construída e tem lançamento previsto para a década de 2030.

Dado o efeito extremamente ténue das ondas gravitacionais, os cientistas rapidamente perceberam a importância de conhecer com precisão a forma esperada desses sinais. Imaginemos que te-

mos um conhecimento rudimentar, mas incompleto, de uma língua estrangeira; ver um filme desconhecido nessa língua seria confuso, mas talvez conseguíssemos acompanhar um noticiário, já que teríamos uma boa ideia do que será dito. Isso leva-nos ao segundo grande avanço originado na década de 1960: a modelação das fontes de ondas gravitacionais. Uma análise preliminar das equações que regem essas ondas mostra que os sinais mais intensos são gerados por sistemas físicos com as seguintes características: (i) devem ser muito massivos e ao mesmo tempo extremamente compactos; (ii) devem ser violentos, ou seja, envolver movimentos rápidos, grandes acelerações e assimetrias significativas [25,26]. Tais sistemas só existem na astrofísica, e em particular sob a forma de sistemas binários compactos — por exemplo, ao substituir a Terra e a Lua da Fig. 1 por estrelas de neutrões ou buracos negros. Regressamos, assim, ao problema dos dois corpos na relatividade geral e passamos agora a analisar mais de perto como pode ser resolvido.

### 3 – O Santo Graal da Relatividade Numérica

#### 3.1 Ser ou não ser bem-posto

As primeiras sementes da relatividade numérica foram plantadas em 1952, quando Yvonne Choquet-Bruhat provou que as equações de Einstein são bem-postas [27]. Para compreender a importância revolucionária desta descoberta, é necessário regressar ao conceito de descrever sistemas físicos através de equações diferenciais e, em particular, a um detalhe que até agora ignorámos. Mesmo que tenhamos um conjunto dessas equações diferenciais, nada nos garante que elas tenham soluções únicas que dependam, de forma controlável, do estado inicial do sistema — os chamados *dados iniciais*.

Podemos obter alguma compreensão do problema subjacente considerando o efeito borboleta da teoria do caos, segundo o qual pequenas alterações nas condições iniciais de um sistema físico podem conduzir a mudanças drásticas ao longo do tempo. O exemplo proverbial é o da borboleta cujo bater de asas pode alterar o percurso de um tornado — ou até gerá-lo — semanas mais tarde. Importa salientar que as equações matemáticas que regem este fenómeno (ou outros exemplos de caos) continuam a ser bem-postas: a evolução no tempo depende sensivelmente dos dados iniciais e pode ser difícil calcular uma solução na prática, mas é possível fazê-lo.

A falta de bem-postura é um pouco como o caos sob o efeito de esteroides: a sensibilidade da evolução do sistema a variações nos dados iniciais não é apenas elevada — é infinita. Este é um problema qualitativamente mais grave: equações diferenciais mal-postas não podem ser utilizadas para calcular evoluções temporais — ponto final.

Para complicar ainda mais, a questão da bem-postura pode depender da forma específica como formulamos as equações ou das coordenadas que escolhemos. O feito marcante de Yvonne Choquet-Bruhat foi demonstrar que as equações de Einstein, escritas na chamada formulação harmónica, são bem-postas e possuem uma solução única. Esta constatação revelou-se essencial para a relatividade numérica; um determinado método numérico pode continuar a falhar na resolução das equações de Einstein por várias outras razões, mas, com a bem-postura assegurada, deve existir alguma forma de obter soluções.

Com o primeiro marco alcançado, deparamo-nos de imediato com o obstáculo seguinte — um padrão que, dolorosamente, veremos repetir-se ao longo desta história. Toda a ideia de descrever um sistema físico em termos da sua evolução temporal parece contradizer frontalmente o espírito da própria relatividade, que Hermann Minkowski expressou já em 1908 com as palavras:

*“Doravante, o espaço por si só e o tempo por si só estão condenados a esvanecer-se em meras sombras, e apenas uma espécie de união entre ambos preservará uma realidade independente.”* Essa união é hoje vulgarmente designada por espaço-tempo — intencionalmente escrita como uma única palavra. Esta fusão é evidente na formulação matemática das equações de Einstein, onde a distinção entre espaço e tempo surge apenas numa subtilidade discreta, que podemos ilustrar evocando o teorema de Pitágoras  $c^2 = a^2 + b^2$ . A expressão que mede o comprimento da hipotenusa num triângulo retângulo surge, sob forma generalizada, na teoria de Einstein. Mas — e este é o ponto-chave — o quadrado do tempo entra nessa fórmula com um sinal negativo.

À primeira vista, isto pode parecer estranho, enquanto pensamos apenas em triângulos. Mas, na realidade, trata-se apenas de uma manifestação da constância universal da velocidade da luz. Ainda assim, o espírito da relatividade é o de unificar o espaço e o tempo, e é notável que a teoria permita separar os dois de uma forma que não quebra essa união. A formulação canónica das equações de Einstein que permite atingir esse objetivo foi desenvolvida por Richard Arnowitt, Stanley Deser e Charles Misner [28] no início da década de 1960, e reformulada por Jimmy York [29] nos anos 70. É conhecida como a formulação ADM ou formulação 3+1 da relatividade geral [30]. E contém ainda mais uma nuance importante: apenas 6 das 10 equações de Einstein descrevem a evolução no tempo. As outras quatro impõem restrições à solução — de forma muito semelhante à contabilidade de partidas dobradas, onde a soma dos débitos deve, a todo o momento, igualar a soma dos créditos. Se essas restrições não forem cumpridas, então a nossa “solução” está errada. Na relatividade, no entanto, este golpe é suavizado: a teoria garante que as restrições se manterão satisfeitas ao longo de toda a evolução, desde que sejam resolvidas corretamente nos dados iniciais.

### 3.2 – O Despontar da Relatividade Numérica

A primeira tentativa documentada de calcular numericamente uma solução para o problema dos dois corpos na relatividade geral remonta ao trabalho de Susan Hahn e Richard Lindquist [31], em 1964. Os autores consideraram um espaço-tempo constituído por dois buracos negros não rotativos inicialmente em repouso. Para essa configuração, o retrato inicial no instante zero é dado por expressões matemáticas exatas — os chamados *dados de Misner* [32], encontrados em 1960. Note-se que a solução de Misner descreve apenas um instantâneo desses buracos negros, e não a sua evolução temporal.

A nossa intuição física diz-nos (corretamente) que os dois buracos negros se irão atrair e eventualmente colidir. No entanto, na década de 1960, os recursos computacionais eram tão limitados que Hahn e Lindquist conseguiram calcular apenas algumas dezenas de passos temporais — demasiado poucos para observar mais do que uma fração mínima da queda dos buracos negros. Ainda

assim, o seu trabalho constituiu uma prova de conceito pioneira de que toda a ideia da relatividade numérica podia funcionar. Além disso, identificaram vários desafios importantes.

Primeiro, destacaram o perigo de instabilidades numéricas na simulação da evolução de buracos negros. No fundo, os computadores executam apenas uma tarefa — embora com uma eficiência impressionante: calculam números. Quando usamos um computador para resolver uma equação matemática, precisamos, portanto, de converter essa equação num algoritmo, ou seja, num processo em que a solução é obtida exclusivamente através de cálculos numéricos.

Para isso, é necessário representar processos físicos contínuos e suaves através de conjuntos finitos de números. Um exemplo simples dessa discretização surge quando medimos a nossa idade em anos e ignoramos horas — ou até mesmo dias. Celebramos o aniversário com amigos ou família assinalando mais uma órbita da Terra em torno do Sol. Agora imaginemos que a pessoa em questão nasceu às 23:00 de 15 de agosto e, quatro décadas depois, organiza uma festa para celebrar o 40.º aniversário. Formalmente, a festa não deveria começar antes das 23:00. Na prática, ignoramos as horas e discretizamos ao nível dos dias. Medir a idade em anos ou dias é claramente uma aproximação do fluxo contínuo do tempo, e isso introduz naturalmente algum erro ou incerteza — que, claro, pode ser reduzida se incluirmos horas, minutos, segundos, etc.

Os computadores são muito mais precisos a discretizar, mas, por mais exata que seja essa discretização, permanece sempre um pequeno erro. E isso leva a uma dificuldade fundamental nos algoritmos numéricos para resolver equações diferenciais: mesmo parecendo plausíveis, muitos algoritmos têm o efeito indesejado de amplificar rapidamente esses erros minúsculos, de forma semelhante ao efeito borboleta de que falámos anteriormente.

Este problema está longe de ser exclusivo da relatividade de Einstein e já era reconhecido por John Crank, Phyllis Nicolson, John von Neumann e outros colegas no final da década de 1940 e início dos anos 1950 [33,34]. Métodos para verificar a estabilidade de algoritmos simples foram então desenvolvidos. No entanto, devido à sua enorme complexidade, as equações de Einstein estão além do alcance desses testes. Além disso, a forte curvatura em torno de buracos negros afeta a causalidade nas suas imediações e, por conseguinte, cria novas “oportunidades” para algoritmos numéricos se tornarem instáveis, mesmo quando funcionam bem em contextos mais simples. No fim de contas, os estudos matemáticos fornecem orientações para o desenvolvimento de algoritmos promissores, mas a verificação final só pode ser feita empiricamente, com a sua implementação e execução prática.

Hahn e Lindquist também salientaram a importância de escolher coordenadas adequadas. Consideremos, a este propósito, o uso de latitude e longitude na superfície da Terra. Estas funcionam bem quase em todo o lado, mas nos polos Norte e Sul, a longitude deixa de estar bem definida, já que todos os meridianos se encontram nesses pontos. Em matemática, isso designa-se por singularidade de coordenadas, um fenómeno distinto das singularidades físicas referidas anteriormente. Embora isso seja apenas um inconveniente menor à escala do planeta, torna-se um problema significativo

ao descrever os espaçotempos de buracos negros, sobretudo no que respeita aos seus horizontes de eventos e ao seu interior.

Outro desafio, também relacionado com as coordenadas, prende-se com a interpretação dos resultados de uma simulação em relatividade numérica. Hahn e Lindquist verificaram que, segundo as suas coordenadas, a distância entre os buracos negros aumentava — o que contradiz a expectativa física de que deveriam atrair-se. No entanto, as coordenadas não representam a distância real — tal como os números das portas numa rua não indicam distâncias físicas reais — e simulações realizadas mais tarde nesse século demonstraram que, de facto, os buracos negros se aproximam e colidem.

É evidente, portanto, que é preciso cautela ao interpretar os resultados numéricos e, sempre que possível, devem preferir-se diagnósticos invariantes por coordenadas.

### 3.3 – Um Caso Encerrado Reaberto

Durante cerca de 10 anos, o estudo de Hahn e Lindquist permaneceu como a única publicação sobre simulações numéricas de binárias de buracos negros. Depois, na década de 1970, Bryce DeWitt reabriu a investigação sobre o problema, atribuindo projetos de doutoramento a Andrej Čadež, Larry Smarr e Kenneth Eppley [35-37]. Estes exploraram o mesmo sistema binário de buracos negros que Hahn e Lindquist, mas beneficiando de avanços enormes na tecnologia informática, com cerca de 300 vezes mais operações de ponto flutuante por segundo.

À semelhança de Hahn e Lindquist, aumentaram a eficiência das simulações especializando-se em configurações com simetria de rotação em torno do eixo que liga os dois buracos negros — a chamada axisimetria — e desenvolveram um sistema de coordenadas elaborado, adaptado à forma dos buracos negros. Apesar de todos os esforços, as simulações continuaram a ser afetadas por instabilidades numéricas, que as interrompiam antes de se obter qualquer visão significativa sobre a dinâmica do sistema binário.

No final da década de 1970, Smarr e York [38] voltaram a um cenário mais simples: a simulação de um único buraco negro. Modelar numericamente um sistema físico que já compreendemos a nível analítico pode não trazer novos conhecimentos físicos, mas oferece um ambiente ideal para explorar as razões profundas do aparente fracasso das técnicas numéricas da época. O artigo de Smarr e York, publicado em 1978, constituiu o primeiro grande avanço nesse sentido.

Trabalhos anteriores tinham desenvolvido coordenadas bastante sofisticadas para os dados iniciais, mas não tinham analisado com igual detalhe a forma como essas coordenadas evoluem durante a simulação. Para melhor compreender este ponto, imaginemos que vivemos realmente no espaçotempo em consideração e colocamos uma nave espacial em cada ponto. Em vez de calcularmos a evolução futura com um computador, deixamos simplesmente que as naves sigam as suas linhas de universo, medindo a cada momento a geometria à sua volta. No fim, recolhemos os dados de todas as naves e ficamos a conhecer todo o espaçotempo. Podemos até controlar, até certo ponto, a forma como o “conjunto” de naves se desloca — por exemplo, algumas um pouco mais à esquerda, outras mais à direita, umas mais lentas, outras mais

rápidas. Este controlo de velocidade representa a nossa liberdade de escolha de coordenadas. A única exigência é que as trajetórias das naves nunca colidam.

Surpreendentemente, esta analogia pode ser formulada de forma rigorosa dentro da teoria de Einstein. Suponhamos agora que temos um espaçotempo com um buraco negro. Claramente, não queremos que nenhuma das naves caia na singularidade, sob pena de os astronautas a bordo serem “espaguetificados” pelos efeitos de maré. Numa simulação numérica, o objetivo é exatamente o mesmo: cair na singularidade não causa danos físicos, mas o computador deixa de calcular qualquer coisa útil a partir desse momento — o código entra em colapso.

Smarr e York aplicaram esta analogia das naves com todo o rigor matemático a um espaçotempo contendo um buraco negro de Schwarzschild. Demonstraram que, para a coordenada temporal simples usada em simulações anteriores, bastam apenas 3,141 unidades de tempo (sim, o valor exato é mesmo  $\pi$ ) para que a primeira nave caia na singularidade do buraco negro. As outras naves, consoante a sua posição inicial, sobrevivem mais tempo — mas acabam todas por ter o mesmo destino.

Mais importante ainda, Smarr e York mostraram como evitar esse desfecho desastroso, adotando uma coordenada temporal mais adequada. Com o seu método, todas as naves usam os seus propulsores para acelerar de forma a evitar a singularidade. Na verdade, a singularidade não é evitada ao contorná-la, mas sim por um tipo de movimento que abrandando o envelhecimento da tripulação; este efeito é semelhante à dilatação temporal junto a buracos negros, que muitos leitores recordarão do filme *Interstellar*.

Na relatividade numérica, esta construção “inteligente” da coordenada temporal chama-se “fatiamento evitante de singularidade” (*singularity avoiding slicing*) e continua, com algumas modificações, a ser usada com grande sucesso até aos dias de hoje. Esta melhoria facilitou a primeira (embora curta) simulação de uma colisão frontal de um buraco negro [39], prevendo que 0,1 % da massa total é irradiada em ondas gravitacionais, resultado que se revelou correto com um fator de cerca de 2.

### 3.4 – O Grande Desafio

A década de 1980, amplamente considerada fértil em música popular e experimental, registou poucos ou nenhuns avanços nas simulações numéricas de espaçotempos com buracos negros. Essa escassez, contudo, foi compensada por progressos significativos no cálculo de dados iniciais.

Já mencionámos anteriormente os dados de Misner, que descrevem, de forma analítica, o retrato inicial de um espaçotempo contendo dois buracos negros não rotativos em repouso. Em 1963, Dieter Brill e Richard Lindquist [40] descobriram um conjunto semelhante de dados, em forma ainda ligeiramente mais simples. Os dados de Misner e de Brill-Lindquist estavam ambos limitados a buracos negros não rotativos e em repouso, mas, em 1980, Jeffrey Bowen e Jimmy York desenvolveram uma generalização notável para sistemas com rotação e velocidade inicial.

Recordemos que as equações de Einstein contêm quatro restrições que os dados iniciais devem satisfazer. Para buracos negros

com rotação e velocidade nulas, três dessas restrições são trivialmente satisfeitas, pois todos os termos que nelas aparecem são nulos. Além disso, a quarta restrição reduz-se a uma equação de Laplace, conhecida na matemática há séculos e passível de ser resolvida analiticamente.

Apoiando-se numa reformulação engenhosa das equações de restrição, através de uma decomposição conforme — introduzida por André Lichnerowicz [41] nos anos 1940 e estendida por York [42] nos anos 1970 — Bowen e York [43] conseguiram encontrar soluções analíticas gerais para três das restrições. Ainda melhor, a sua solução inclui nove parâmetros por buraco negro: três para a posição, três para a velocidade e três para o momento angular. A quarta restrição não admite solução analítica neste caso geral, mas pode ser tratada por diversos métodos numéricos — incluindo, em particular, a chamada solução “puncture”, descoberta por Steven Brandt e Bernd Brügmann [44] em 1997.

Os dados de Bowen–York e “puncture” sofreram variações ao longo do tempo, mas ainda hoje constituem a base da maioria das simulações modernas de buracos negros.

Em 1993, o esforço para simular binárias de buracos negros foi revitalizado com uma iniciativa em grande escala nos Estados Unidos: o *The Binary Black-Hole Grand Challenge Project* [45]. Conhecido informalmente como *Grand Challenge*, envolveu mais de 40 investigadores de 10 instituições em todo o país, com o objetivo concreto de simular a espiral e fusão de binárias de buracos negros e calcular os sinais de ondas gravitacionais gerados nesses eventos.

Este objetivo — muitas vezes referido como o Santo Graal da Relatividade Numérica — foi diretamente motivado pelo programa de deteção de ondas gravitacionais, que estava claramente a ganhar ímpeto na mesma altura. A partir desse momento, muitos cientistas começaram, meio a brincar e meio a sério, a apostar informalmente sobre qual seria alcançado primeiro: a solução numérica do problema dos dois corpos ou a deteção das ondas gravitacionais.

O projeto *Grand Challenge*, dotado de recursos muito superiores aos das investigações dos anos 60 e 70, fez avanços em numerosos aspetos da relatividade numérica. Incorporando os conhecimentos adquiridos em trabalhos anteriores, desenvolveu uma nova infraestrutura de código e reinvestigou colisões frontais de buracos negros não rotativos em repouso [46]. O sinal de onda gravitacional resultante consistia num pulso gerado no momento da fusão, seguido de oscilações com amplitude decrescente — um fenómeno conhecido como *ringdown*, em total analogia com o som de um sino após ser percutido.

Os códigos também conseguiram calcular os horizontes dos buracos negros durante a queda e a fusão, e alargaram o modelo a buracos negros com massas diferentes. Mas as simulações limitaram-se a buracos negros não rotativos e em repouso, o que significa que se deslocavam em linha reta um em direção ao outro, colidindo frontalmente. Embora útil para explorar a dinâmica básica de fusões, este cenário está muito longe da espiral quase circular de buracos negros em órbita, que se espera observar na astrofísica real.

O Santo Graal de uma binária em órbita é muito mais difícil de alcançar, por várias razões. Primeiro, buracos negros em órbita não podem ser simulados com simetria axial, como nos códigos anteriores — requerem simulações totalmente tridimensionais. Para isso, o *Grand Challenge* desenvolveu o primeiro código de relatividade numérica completo em 3+1 dimensões, chamado *G-code* [48]. Esse código foi calibrado com sucesso, reproduzindo os resultados de colisões frontais obtidos anteriormente.

O segundo grande desafio na modelação da espiral de buracos negros está na sua longa duração. No *Grand Challenge*, este revelou-se um problema muito mais grave do que apenas precisar de mais capacidade computacional. Embora fosse possível completar simulações curtas de colisões frontais, qualquer tentativa de evoluir buracos negros durante mais tempo — quer em binárias, quer isoladamente — levava a problemas de estabilidade semelhantes aos enfrentados nos trabalhos das décadas de 60 e 70.

Todas as tentativas de refinar as coordenadas ou melhorar os algoritmos numéricos falharam de forma tão abrangente que se tornou inevitável a conclusão: havia algo mais fundamental que estava errado.

### 3.5 – Novos Horizontes num Novo Milénio

Apesar de não ter alcançado o seu principal objetivo — atingir o Santo Graal — o projeto *Grand Challenge* abriu caminho para desenvolvimentos futuros através de várias realizações cruciais. Primeiro, trouxe muitos novos conhecimentos sobre o que funcionava — e, talvez mais importante, o que não funcionava. Em segundo lugar, levou à formação de uma comunidade de investigadores muito maior do que a que o campo alguma vez conhecera. Por fim, o *Grand Challenge* lançou a ideia dos *Community Toolkits* — infraestruturas de código públicas que fornecem elementos essenciais da computação moderna, como paralelização, entrada/saída de dados e procedimentos de discretização.

Em vez de escreverem o seu próprio código do zero, os investigadores de todo o mundo passaram a poder acrescentar as suas técnicas específicas de relatividade numérica a uma infraestrutura já pronta a usar. O primeiro pacote de software deste tipo foi o *Cactus Computational Toolkit* [49], desenvolvido originalmente por Paul Walker e Joan Massó a partir de 1997, e rapidamente expandido com contribuições, sobretudo do grupo de relatividade numérica de Ed Seidel no Instituto Albert Einstein em Potsdam. Rebatizado como *Einstein Toolkit* [50], é amplamente utilizado e desenvolvido até hoje — e inspirou o aparecimento de pacotes alternativos.

A era relativamente centralizada do *Grand Challenge* foi seguida por um período mais livre, durante o qual diversos grupos mais pequenos e investigadores individuais, agora munidos das novas ferramentas, começaram a explorar diferentes ideias sobre o que estaria a impedir o progresso na modelação de buracos negros. Isso remete-nos à discussão anterior sobre a bem-postura das equações diferenciais.

Como provado por Choquet-Bruhat, as equações de Einstein são bem-postas quando escritas na formulação harmónica, mas isso pode deixar de ser verdade noutras formulações. Não conheço uma analogia clara para esta peculiaridade das equações diferen-

ciais, mas um exemplo simples mostra como uma reescrita infeliz pode causar problemas: consideremos a equação trivial  $x=2$ . Está tudo certo. Mas, se elevamos ambos os lados ao quadrado, obtemos  $x^2=4$ . Embora pareça uma operação inofensiva, passamos a ter uma equação diferente que admite a solução  $x=-2$ , a qual não é solução da equação original. As subtilezas que distinguem formulações bem-postas e mal-postas das equações de Einstein são muito mais complexas e difíceis de detetar, mas a conclusão mantém-se: dada uma nova formulação, não temos qualquer garantia de que seja bem-posta.

Os investigadores estavam bem conscientes deste facto e começaram, desde os anos 1980, a estudar a bem-postura das formulações 3+1 das equações de Einstein. No final da década de 1990, as equações ADM foram analisadas em vários contextos e concluiu-se que, em geral, não são bem-postas — mais concretamente, são apenas fracamente hiperbólicas.

A procura de formulações alternativas e bem-postas das equações de Einstein mostra também outra forma pela qual a computação moderna auxilia a modelação física: a manipulação simbólica. Explorar novas formulações das equações de Einstein, embora crucial para os cálculos numéricos, é uma tarefa puramente analítica. Manipular à mão equações tão longas e complexas como as da relatividade de Einstein é trabalhoso e propenso a erros. Hoje, *softwares* como o Mathematica ou o Maple permitem-nos processar equações imensas com total rigor.

As investigações mais bem-sucedidas de formulações alternativas das equações de Einstein seguiram duas direcções principais: Modificações da formulação harmónica usada no estudo inicial de Choquet-Bruhat; Modificações das equações ADM através de uma decomposição conforme. A formulação harmónica, por construção, fixa uma escolha específica de coordenadas ou *gauge* — o *gauge* harmónico. Esta fixação impede-nos de adaptar as coordenadas às particularidades do sistema físico em estudo. As tentativas de generalizar esta abordagem para um *gauge* arbitrário, preservando as vantagens da formulação harmónica, remontam aos trabalhos de Helmut Friedrich [51] nos anos 1980 e foram depois desenvolvidas por David Garfinkle, Carsten Gundlach, Frans Pretorius e colegas no início dos anos 2000 [52-54], culminando na formulação de *gauge* harmónico generalizado (GHG).

Em paralelo, Thomas Baumgarte, Stuart Shapiro, Masaru Shibata, Takashi Nakamura, Kenichi Oohara e Yasufumi Kojima [55-57] desenvolveram uma modificação das equações ADM através de uma transformação conforme, análoga à decomposição de York-Lichnerowicz já referida na construção de dados iniciais. Esta formulação, hoje conhecida por BSSNOK (ou apenas BSSN), demonstrou empiricamente propriedades de estabilidade muito superiores às das equações ADM, no final dos anos 1990 e início dos anos 2000. Foi usada com sucesso em simulações de buracos negros isolados e de colisões frontais [58-61], que conseguiram manter-se estáveis durante longos períodos.

Mais tarde, estudos analíticos confirmaram que a formulação BSSNOK é de facto bem-posta. Mas um problema permanecia: as simulações de dois buracos negros em órbita — apesar de terem conseguido completar uma única órbita graças ao trabalho de Bernd Brügmann e colegas em 2004 [64] — continuavam a falhar

antes de se poder desvendar plenamente a sua dinâmica e a emissão de ondas gravitacionais. O Santo Graal parecia ainda fora de alcance — mas não por muito mais tempo.

### 3.6 – O Avanço de 2005

No início de 2005, a comunidade da relatividade numérica continuava a enfrentar o desafio de acomodar, de forma numericamente estável, o movimento prolongado de dois buracos negros em órbita um do outro, culminando na sua fusão final e na formação de um remanescente rotativo. Objetos em movimento não são problemáticos em configurações numéricas “normais”, mas os buracos negros contêm pontos singulares no seu interior, e o seu movimento é muito mais difícil de lidar.

Ao longo dos anos, tinham-se desenvolvido e utilizado duas abordagens principais para lidar com este problema: Primeiro, coordenadas com movimento comóvel (*comoving coordinates* [63]): com elas, podemos absorver a rotação — tal como fixamos latitude e longitude na superfície da Terra, apesar da sua rotação. Temos de considerar algumas consequências não triviais, como a força de Coriolis, mas, no geral, as coordenadas co-rotativas funcionam bem desde que permaneçamos “na Terra”. Tornam-se, no entanto, bastante problemáticas quando queremos descrever simultaneamente objetos distantes; por exemplo, as posições de Plutão ou das sondas Voyager tornam-se um verdadeiro caos quando expressas em latitude, longitude, tempo e distância à superfície terrestre. Segundo, excisão (*excision*), atribuído a Bill Unruh [64] (ver também [65]): nesta abordagem, corta-se numericamente uma região em torno da singularidade do buraco negro. Isto é viável, já que o interior do buraco negro está escondido por detrás do horizonte de eventos — não é visível do exterior ou, mais precisamente, nada do que ocorre dentro do horizonte pode influenciar causalmente o exterior.

O verdadeiro avanço chegou finalmente em abril de 2005, quando Frans Pretorius [66] apresentou a primeira simulação completa de uma espiral com várias órbitas, fusão e *ringdown* de uma binária de buracos negros — com sinal completo de onda gravitacional — numa conferência em Banff, Alberta. Ao combinar a excisão de buracos negros com condições de coordenadas cuidadosamente ajustadas, e modificando a formulação GHG segundo sugestões de Gundlach e colegas [54], Pretorius ultrapassou todos os obstáculos que até então impediam o acesso ao Santo Graal. Embora já pairasse no ar um certo sentimento de progresso, o sucesso abrangente de Pretorius rebentou como um trovão — cujo eco ainda se sente na comunidade. Ao revermos a história — científica ou outra — os desenvolvimentos são muitas vezes apresentados com tal compressão temporal que se ignora facilmente o sofrimento causado por décadas de trabalho árduo e persistente em busca de um único objetivo. Mas a catarse da relatividade numérica ainda teria mais uma reviravolta. Cerca de seis meses depois, dois grupos independentes — o da Universidade do Texas em Brownsville [67] e o do NASA Goddard Space Flight Center [68] — apresentaram um segundo avanço decisivo, em duas comunicações numa outra conferência de relatividade numérica, realizada no Goddard. De forma surpreendente, as suas simulações completas da espiral, fusão e *ringdown* de buracos negros empregaram métodos completamente diferentes dos de Pretorius, em quase todos os aspetos: usaram a formulação BSSNOK (em vez da GHG); acomodaram o movimento dos buracos negros com outras condições de *gauge*, conhecidas como “*punctures móveis*” (*moving punctures*);

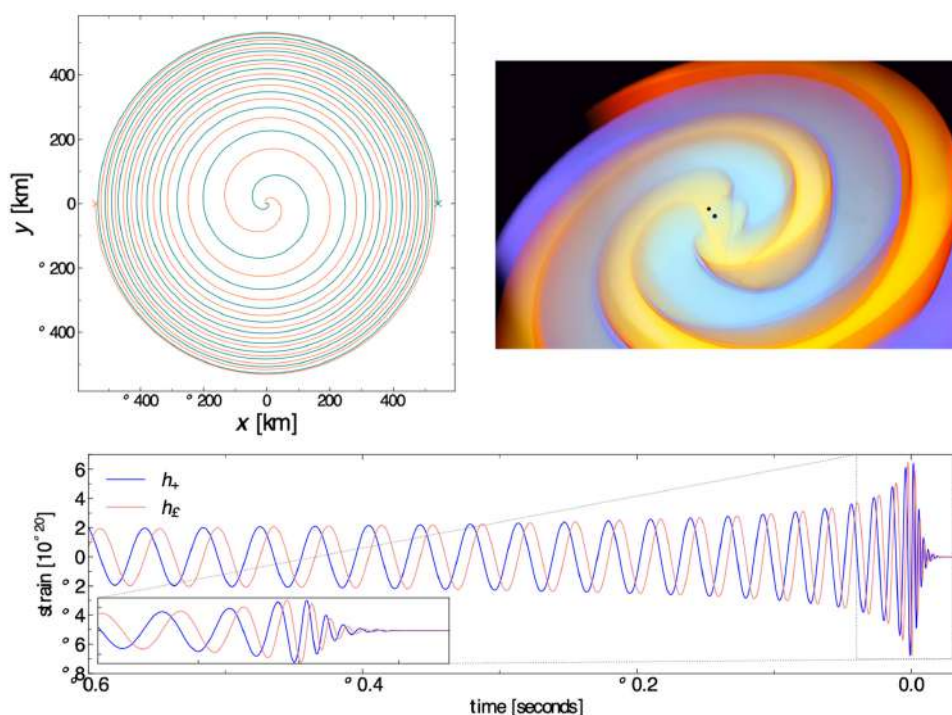


Figura 2 - Canto superior esquerdo: Trajetória de dois buracos negros, cada um com 30 vezes a massa do Sol, em órbita um do outro, espiralando gradualmente até à fusão devido à emissão de ondas gravitacionais. O buraco negro à esquerda (cruz laranja) começa com velocidade para baixo; o da direita (cruz azul-petróleo) com velocidade para cima. Canto superior direito: Uma imagem da simulação numérica, mostrando os dois buracos negros pouco antes da fusão, juntamente com as ondulações no espaço-tempo criadas pelo seu movimento. [Créditos da imagem: Markus Kunesch, Saran Tunyasuvunakool, Pau Figueras (GRChombo); Paul Shellard, Juha Jaykka (Centre for Theoretical Cosmology (CTC), Cambridge); Carson Brownlee, James Jeffers, Ingo Wald (Intel Advanced Visualization)]. Paine inferior: Amplitude da onda gravitacional tal como seria medida na Terra caso a binária estivesse localizada na galáxia M87. O tempo é medido relativamente ao momento de intensidade máxima. O destaque mostra a *ringdown*, quando os buracos negros já se fundiram num só.

e utilizaram dados iniciais diferentes.

Importa destacar que os resultados mostraram excelente concordância com os cálculos de Pretorius. Isto não só forneceu confirmação quantitativa com elevada precisão, como também demonstrou que existem múltiplas abordagens válidas para resolver as equações de Einstein, podendo-se assim escolher, consoante o problema, o método mais adequado. Uma síntese promissora das propriedades benéficas das formulações GHG e BSSNOK baseia-se no chamado sistema Z4, desenvolvido originalmente por Carles Bona e colaboradores [69], e tem vindo a ser cada vez mais utilizado em relatividade numérica nos últimos anos [70,71].

Então, como é que se apresenta a solução do problema dos dois corpos na relatividade geral?

Isso é ilustrado na Figura 2, que mostra o movimento de dois buracos negros não rotativos, cada um com 30 vezes a massa do Sol, e o sinal de onda gravitacional resultante, assumindo que a binária se encontra em M87, a maior galáxia do aglomerado de Virgem, a cerca de 53,5 milhões de anos-luz de distância. Vemos que os buracos negros, começando separados por cerca de 1000 km e com velocidades iniciais apontadas respetivamente para cima e para baixo, giram um em torno do outro num plano, de forma semelhante ao sistema Terra-Lua. Neste processo, contudo, o sistema binário perde energia e a sua separação vai diminuindo gradualmente — os buracos negros espiralam para o interior. Eventualmente, fundem-se num único buraco negro no centro. A imagem mostra os buracos negros pouco antes da fusão, juntamente com as ondulações no espaço-tempo geradas pelo seu movimento mútuo. O sinal de onda gravitacional mostrado no painel inferior representa a variação fracional no comprimento dos braços

dos nossos detetores em função do tempo. Este sinal é composto por duas contribuições que geram deslocamentos com forma semelhante aos símbolos + e x. Estas componentes estão representadas pelas curvas azul e laranja, respetivamente — note-se que ambas têm uma amplitude extremamente pequena, da ordem de  $10^{-20}$ . Sinais de buracos negros deste tipo apresentam três fases: Durante a espiral (*inspiral*), a amplitude e a frequência aumentam gradualmente — esta parte assemelha-se ao canto de pássaros e é chamada de “chirp”; O sinal atinge o pico no momento da fusão (*merger*); e depois decresce rapidamente na fase chamada de *ringdown*. A primeira deteção de ondas gravitacionais, GW150914 [14], galardoada com o Prémio Nobel, foi causada por um sistema binário semelhante, mas cerca de 20 vezes mais distante.

### 3.7 – Os Anos da Corrida ao Ouro e a Modelação de Fontes de Ondas Gravitacionais

Ao longo das décadas que antecederam os avanços de 2005, acumularam-se inúmeras questões sobre buracos negros nas áreas da astronomia, física gravitacional e física fundamental. Subitamente equipada com as ferramentas para explorá-los, a comunidade da relatividade numérica entrou numa era de corrida ao ouro, com novos — e por vezes inesperados — resultados a surgir quase semanalmente.

Os astrofísicos há muito se interessavam por um fenómeno chamado “kick de buraco negro”, em que a fusão de uma binária resulta numa emissão preferencial de ondas gravitacionais numa direção específica. Como consequência, o buraco negro remanescente sofre um recuo na direção oposta, de forma semelhante ao recuo de uma arma ao disparar. Este fenómeno era conhecido há décadas, mas a sua magnitude permanecia incerta. As simulações de

relatividade numérica revelaram que a velocidade de recuo pode atingir vários milhares de quilômetros por segundo em certos tipos de binárias com rotação [72-75]. Isto é mais do que suficiente para ejetar buracos negros das suas galáxias hospedeiras ou fazê-los viajar pelo cosmos como projéteis.

Acima, mencionámos que os buracos negros contêm singularidades no espaço-tempo, ou seja, pontos de curvatura infinita, mas que estão escondidos por detrás do horizonte de eventos. O horizonte funciona como uma prisão de alta segurança, protegendo o exterior de quaisquer catástrofes que possam surgir da singularidade interna. Roger Penrose formulou a conjectura da censura cósmica, segundo a qual todas as singularidades estão ocultas por um horizonte [76]. Os relativistas andam há muito a questionar a validade dessa hipótese. Embora tenham sido encontradas algumas exceções, estas ocorrem apenas na evolução temporal de condições iniciais finamente ajustadas ao extremo, e, portanto, são praticamente impossíveis de ocorrer na realidade — como equilibrar um lápis na ponta do dedo sem que ele caia: possível em teoria, mas inalcançável na prática. Curiosamente, simulações numéricas demonstram que a censura cósmica deixa de se verificar quando permitimos mais de três dimensões espaciais [77,78]. Nesse caso, a fusão de dois buracos negros tende a produzir um horizonte de eventos com estrutura fractal que encolhe até largura nula num tempo finito.

Já em 1993, Matt Choptuik [79] descobriu uma característica na formação de buracos negros conhecida como *fenómenos críticos*. Este tipo de fenómeno é familiar noutras áreas da física e apresenta semelhanças com a transição de fase da água à volta do ponto de congelamento. A água está em estado líquido a temperaturas ligeiramente acima de zero, mas quando a arrefecemos para ligeiramente abaixo, transforma-se qualitativamente em gelo. O comportamento dos sistemas físicos próximos da criticidade exibe características universais intrigantes, comuns a todo o tipo de sistemas, sejam fluidos, colapsos gravitacionais ou o comportamento de agulhas magnéticas num campo. Até aos avanços de 2005, a descoberta de colapso crítico de Choptuik era considerada por alguns como o principal resultado da relatividade numérica. Os códigos desenvolvidos após essa revolução permitiram estudos de alta precisão para um leque mais amplo de cenários de colapso, incluindo casos que vão além da simetria esférica explorada no trabalho pioneiro de Choptuik. Estas investigações continuam, mas já indicam uma fenomenologia mais complexa assim que se abandona a simetria esférica [80].

Na astrofísica, espera-se que os buracos negros colidam a velocidades inferiores a metade da velocidade da luz. Apesar de já serem velocidades exorbitantes para os padrões terrestres, são relativamente modestas à luz da teoria de Einstein. Por contraste, colisões ultra-relativistas de buracos negros próximas da velocidade da luz testam o regime mais extremo da relatividade, e os resultados das simulações numéricas superaram as expectativas. Cerca de 40% da massa total pode ser convertida em radiação gravitacional neste processo [81] — para comparação, as bombas de hidrogénio convertem menos de 1%. Embora estas colisões não tenham relevância direta na astrofísica, a sua simulação teórica é importante, sobretudo no estudo da hipotética formação de mini buracos negros em aceleradores de partículas como o CERN [82,83], especialmente em cenários com dimensões espaciais adi-

cionais. Embora nenhuma experiência tenha, até à data, detetado indícios de formação de buracos negros em laboratório, os resultados numéricos sobre colisões de alta energia têm proporcionado valiosos testes da teoria de Einstein, como os que referimos sobre a censura cósmica.

É indiscutível, contudo, que a aplicação mais importante da modelação de binárias de buracos negros surge no campo que motivou a relatividade numérica desde o início: a modelação de ondas gravitacionais. Para perceber isto, imagine que caminha à beira de um lago num dia de nevoeiro e sem vento. Sabe que o lago é popular entre aves, que chapinham alegremente ao centro, gerando ondas. Mas não as pode ver por causa do nevoeiro. Tudo o que vê são as ondas que chegam à margem. A sua tarefa é deduzir o máximo de informação sobre as aves com base nos padrões das ondas — onde estão, quantas são, quão grandes são, etc. Esta é, em essência, a situação em que nos encontramos quando detetamos ondas gravitacionais. Para as interpretar, precisamos de previsões teóricas: para cada configuração possível de aves — tamanho, localização, número — calculamos teoricamente como será o sinal da onda. O conjunto de todos esses sinais teoricamente possíveis constitui um catálogo de formas de onda. Depois, comparamos o sinal observado com o catálogo e identificamos a configuração mais provável. O sinal atua como uma impressão digital do sistema de buracos negros, e identificamo-lo com base na nossa “base de dados” teórica de impressões digitais.

Na astronomia de ondas gravitacionais, as binárias de buracos negros são o tipo de “aves” mais comum, e já vimos na Figura 2 como é o sinal de onda se tivermos dois buracos negros não rotativos de massas iguais numa órbita quase circular. Quando permitimos rotação, massas diferentes ou órbitas excêntricas, obtemos variações nesse sinal sob a forma de modulações de amplitude, modulações de frequência e diferentes formatos do “chirp” [84]. Além disso, a amplitude total do sinal e o intervalo de frequência dependem fortemente da distância e da dimensão dos buracos negros.

Calcular um catálogo que abranja todas essas variações possíveis é uma tarefa colossal, pois há muitos parâmetros a considerar, cada um com diversos valores possíveis. Embora alguns sejam relativamente simples de incluir nos modelos, uma abordagem de força bruta — realizar uma simulação para cada valor de parâmetro — seria proibitivamente dispendiosa, exigindo milhões de simulações, cada uma a usar centenas de núcleos de processamento durante semanas ou mais. No entanto, essa tarefa torna-se muito mais viável se combinarmos simulações numéricas com métodos de aproximação analítica, como os que encontrámos no início desta jornada.

Quando dividimos o sinal de onda gravitacional da Figura 2 em três partes — espiral (*inspiral*), fusão (*merger*) e *ringdown* — baseámo-nos nas fases físicas distintas da coalescência. Essas três fases também correspondem a regimes adequados a diferentes técnicas de modelação: Durante a espiral inicial, com os buracos negros ainda afastados, é possível descrever o sistema com cálculos pós-newtonianos; No *ringdown* tardio, temos um buraco negro resultante a oscilar em torno do equilíbrio — bem modelado por teoria de perturbações; Mas o final da espiral (cerca das últimas 10 órbitas) e a fusão estão além dessas aproximações e exigem simulações numéricas completas.

Para cada binária, os resultados das três abordagens podem ser combinados num único sinal composto, conhecido como forma de onda híbrida [85,86]. Análises mais detalhadas mostraram ainda que o sinal exibe dependências sistemáticas em relação a certos parâmetros, o que pode ser explorado para construir catálogos de formas de onda mais eficientes [87]. Apesar dessas simplificações, simular sistemas de buracos negros com precisão suficiente continua a ser um desafio dispendioso.

Com esse desafio em mente, os grupos de relatividade numérica do California Institute of Technology e da Universidade de Cornell iniciaram o desenvolvimento de um código baseado nos chamados métodos espectrais. Esta técnica de discretização já tinha demonstrado precisão excepcional noutras áreas da física, mas sabia-se também que tinha dificuldades em lidar com as singularidades dos buracos negros. No final dos anos 2000, após anos de trabalho rigoroso, o grupo Caltech–Cornell conseguiu combinar a excisão de buracos negros com uma versão especial da formulação GHG e condições de coordenadas elaboradas, permitindo assim a primeira simulação de binárias com precisão espectral [88-90].

Esse código continuou a ser desenvolvido e é atualmente mantido no seio da colaboração *Simulating eXtreme Spacetimes* (SXS) [91], que envolve institutos dos EUA e da Alemanha. No momento em que escrevo, a colaboração SXS fornece as formas de onda mais precisas e numerosas na modelação de fontes para a rede de detetores terrestres LIGO–Virgo–KAGRA [92].

Isto não invalida a importância de outros códigos, que desempenham papéis essenciais na validação cruzada, exploração de modelos alternativos e, talvez mais importante, na descoberta de novas fontes de ondas gravitacionais. Apesar de os códigos espectrais atingirem uma precisão superior, tendem a ser menos robustos em contextos computacionais ainda pouco compreendidos ou exploratórios.

Em termos históricos, a nossa jornada pela genética da relatividade numérica levou décadas e, parafraseando Winston Churchill, chegámos apenas ao fim do princípio. Esta história terá certamente uma continuação a ser escrita no futuro e, como em qualquer boa narrativa, as previsões raramente coincidirão com a realidade. Ainda assim, não terminaremos este relato sem listar alguns dos mais entusiasmantes enigmas que a comunidade espera explorar com as futuras observações de ondas gravitacionais e simulações de relatividade numérica.

#### *Matéria escura e energia escura*

O tipo de matéria e energia com que estamos familiarizados representa apenas cerca de 5 % de todo o conteúdo do universo. O restante, na ausência de um conhecimento mais descritivo, é denominado matéria escura e energia escura. As suas assinaturas gravitacionais oferecem oportunidades sem precedentes para compreendermos do que são realmente compostas [93].

#### *Gravidade modificada*

Ao longo deste texto, não escondemos a nossa fascinação pela teoria de Einstein. E, no entanto, ao contrário dos teoremas em matemática, as teorias físicas tendem a ser eventualmente substituídas por outras mais abrangentes. Isso não significa que a teoria anterior se torne inútil — por exemplo, a gravidade newtoniana foi

aplicada com grande sucesso para alcançar a alunagem. Ainda assim, espera-se que um dia a relatividade de Einstein seja substituída por uma teoria que inclua também a mecânica quântica. Observar a dinâmica da gravidade nos regimes mais extremos será, muito provavelmente, essencial para orientar estas buscas por uma teoria quântica da gravidade [94].

#### *Cosmologia e cosmografia*

Os modelos cosmológicos do universo dependem fortemente da medição de distâncias a galáxias e quasares distantes. As observações de ondas gravitacionais oferecem uma nova forma independente de obter essas medições e podem contribuir para resolver questões em aberto sobre a evolução e origem do universo [95].

#### *Novas fontes de ondas gravitacionais*

Todos os eventos de ondas gravitacionais detetados até à data são compatíveis com as previsões para binárias de buracos negros e estrelas de neutrões. No entanto, esta interpretação baseia-se parcialmente na navalha de Occam, segundo a qual, perante múltiplas explicações para uma observação, a mais simples é provavelmente a correta. Simulações de relatividade numérica demonstraram que objetos compactos exóticos, diferentes de buracos negros ou estrelas de neutrões, podem gerar sinais praticamente indistinguíveis daquele mostrado na Figura 2 [96]. Além disso, existe uma vasta gama de outras fontes de ondas gravitacionais teoricamente previstas, como buracos negros primordiais, cordas cósmicas ou paredes de domínio.

Como exemplo, apresentamos na Figura 3 um instantâneo de uma simulação numérica de uma rede de cordas cósmicas, que se conjectura ter permeado o universo nas suas fases iniciais. Usando a nossa analogia das aves no lago, pode haver ondas geradas por peixes, plesiossauros ou outros habitantes misteriosos do lago; para perceber se isto acontece, também precisamos de previsões teóricas sobre os sinais de onda que estes candidatos mais obscuros poderão gerar.

Estes são apenas alguns exemplos, e se a história da ciência nos ensinou alguma coisa, foi a esperar o inesperado. A teoria de Einstein mostrou-nos que tudo no universo contribui conjuntamente para o espaço-tempo, dando um novo significado ao título inspirado no Zen da peça musical de Tony Scott, “Is not all one?”. As futuras explorações de ondas gravitacionais revelarão, sem dúvida, novos e fascinantes vislumbres do mundo que habitamos, e isso será contado numa continuação desta história — um dia...

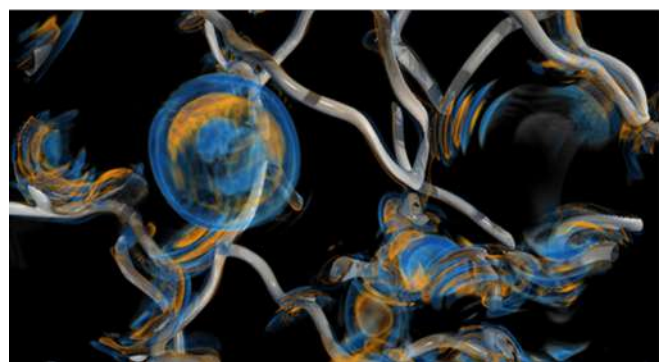


Figura 3 - Instantâneo de uma rede de cordas cósmicas.  
Créditos da imagem: Amelia Drew (CTC, Universidade de Cambridge), Carson Brownlee (Intel Visualização e Renderização Avançadas) e Paul Shellard (CTC, Cambridge).

## Agradecimentos

Estou grato por incontáveis discussões, projetos conjuntos e investigações com todos os colegas, estudantes e mentores com quem trabalhei ao longo das últimas décadas. Este artigo não existiria sem a sua inspiração. Evito listar todos individualmente, pois isso duplicaria o tamanho deste documento. Um agradecimento especial a Daniela Cors e Amelia Drew pela revisão do manuscrito.

### Referências

- [1] A. Einstein. The foundation of the general theory of relativity. *Annalen Phys.*, 49 (1916) 769-822.
- [2] J. P. Petit. *Le Géométrique*. Ed. Belin, 1980. ISBN-9782701103723.
- [3] K. Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1916 (191) 189-196.
- [4] R. P. Kerr. Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. *Phys. Rev. Lett.* 11 (2063) 237-238.
- [5] L. Blanchet. Post-Newtonian Theory for Gravitational Waves. *Living Rev. Rel.*, 17 (2014) 2.
- [6] T. Damour. Gravitational scattering, post-Minkowskian approximation and Effective One-Body theory. *Phys. Rev. D*, 94 (2016) 104015.
- [7] M. Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [8] T. W. Baumgarte and S. L. Shapiro. *Numerical Relativity*. Cambridge University Press, 2010.
- [9] C. Bona, C. Palenzuela-Luque, and C. Bona-Casas. *Elements of Numerical Relativity and Relativistic Hydrodynamics*. Springer Dordrecht Heidelberg London New York, 2009.
- [10] U. Sperhake. The numerical relativity breakthrough for binary black holes. *Class. Quant. Grav.* 32 (2015) 124011.
- [11] R. Penrose. Gravitational collapse and space-time singularities. *Phys. Rev. Lett.* 14 (1965) 57-59.
- [12] S. Hawking. The occurrence of singularities in cosmology. III. Causality and singularities. *Proc. Roy. Soc. Lond. A300* (1967) 187-201.
- [13] S. W. Hawking and R. Penrose. The Singularities of gravitational collapse and cosmology. *Proc. Roy. Soc. Lond. A 314* (1970) 529-548.
- [14] B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.* 116 (2016) 061102.
- [15] A. Einstein. Über Gravitationswellen. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1918 (1918) 154-167.
- [16] P. R. Saulson. Josh Goldberg and the physical reality of gravitational waves. *Gen. Rel. Grav.* 43 (2011) 3289-3299.
- [17] H. Bondi, M. G. J. van der Burg, and A. W. K. Metzner. Gravitational waves in general relativity VII. Waves from axis-symmetric isolated systems. *Proc. Roy. Soc. A*, 269 (1962) 21-52.
- [18] R. K. Sachs. Gravitational Waves in General Relativity. 8. Waves in asymptotically flat Space-times. *Proc. Roy. Soc. A*, 270 (1962) 103-126.
- [19] APS News. This Month in Physics History - Feb 2020: <https://www.aps.org/apsnews/2020/02/joseph-weber-first-gravitational-wave>.
- [20] LIGO website: <http://www.ligo.org>.
- [21] GEO600 website: <http://www.geo600.org/>.
- [22] Virgo website: <https://www.virgo-gw.eu/>.
- [23] KAGRA website: <http://gwcenter.icrr.u-tokyo.ac.jp/en/>.
- [24] LISA website: [https://www.esa.int/Science\\_Exploration/Space\\_Science/LISA](https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/LISA).
- [25] P. C. Peters and J. Mathews. Gravitational radiation from point masses in a keplerian orbit. *Phys. Rev.* 131 (1963) 435-439.
- [26] P. C. Peters. Gravitational Radiation and the Motion of Two Point Masses. *Phys. Rev.*, 136 (1964) B1224-B1232.
- [27] Y. F. F. F. Theoreme d'existence pour certains système d'équations aux dérivées partielles non linéaires. *Acta Math.* 88 (1952) 141-225.
- [28] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. The dynamics of general relativity. In L. Witten, editor, *Gravitation an introduction to current research*, pages 227-265. John Wiley, New York, 1962.
- [29] J. W. York, Jr. Kinematics and dynamics of general relativity. In L. Smarr, editor, *Sources of Gravitational Radiation*, pages 83-126. Cambridge University Press, Cambridge, 1979.
- [30] E. Gourgoulhon. *3+1 Formalism and Bases of Numerical Relativity*. Springer, New York, 2012. [gr-qc/0703035](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0703035).
- [31] S. G. Hahn and R. W. Lindquist. The two body problem in geometrodynamics. *Ann. Phys.* 29 (1964) 304-331.
- [32] C. W. Misner. Wormhole initial conditions. *Phys. Rev.* 118 (1960) 1110.
- [33] J. Crank and P. Nicolson. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of heat conduction type. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 43 (1947) 50-67.
- [34] J. G. Charney, R. Fjell, and J. Von Neumann. Numerical integration of the barotropic vorticity equation. *Tellus* 2 (1950) 237-254.
- [35] A. V. Clade. Colliding black holes. PhD thesis, University of North Carolina at Chapel Hill, 1971.
- [36] L. Smarr. The structure of general relativity with a numerical illustration: The collision of two black holes. PhD thesis, University of Texas at Austin, 1975.
- [37] K. R. Eppley. The numerical evolution of the collision of two black holes. PhD thesis, Princeton University, 1975.
- [38] L. Smarr and J. W. York, Jr. Kinematical conditions in the construction of spacetime. *Phys. Rev. D*, 17 (1978) 2529-2551.
- [39] L. Smarr. Gauge conditions, radiation formulae and the two black hole collision. In L. Smarr, editor, *Sources of Gravitational Radiation*, pages 245-274. Cambridge University Press, Cambridge, 1979.
- [40] D. R. Brill and R. W. Lindquist. Interaction Energy in Geometrodynamics. *Phys. Rev.* 131 (1963) 471-476.
- [41] A. Lichenrowicz. L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps. *J. Math. Pures et Appl.* 23 (1944) 37-63.
- [42] J. W. York, Jr. Gravitational degrees of freedom and the initial-value problem. *Phys. Rev. Lett.* 26 (1971) 1656-1658.
- [43] J. M. Bowen and J. W. York, Jr. Time-asymmetric initial data for black holes and black-hole collisions. *Phys. Rev. D* 21 (1980) 2047-2056.
- [44] S. Brandt and B. Brügmann. A Simple construction of initial data for multiple black holes. *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997) 3606-3609.
- [45] M. W. Choptuik. The binary black hole grand challenge project. In D. A. Clarke and M. J. West, editors, *Computational Astrophysics*, volume 123 of ASP Conference Series, page 305. San Francisco, 1997.
- [46] P. Anninos, D. Hobill, E. Seidel, L. Smarr, and W.-M. Suen. Head-on collision of two equal mass black holes. *Phys. Rev. D*, 52 (1995) 2044-2058, 1995.
- [47] P. Anninos and S. Brandt. Head-on collision of two unequal mass black holes. *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998) 508-511.
- [48] P. Anninos, K. Camarda, J. Massó, E. Seidel, W.-M. Suen, and J. Towns. Three-dimensional numerical relativity: The evolution of black holes. *Phys. Rev. D* 52 (1995) 2059-2082.
- [49] T. Goodale, et al. The Cactus Framework and Toolkit: Design and Applications. In *Vector and Parallel Processing - VECPAR'2002, 5th International Conference, Lecture Notes in Computer Science*, Berlin, 2003. Springer. <http://www.cactuscode.org>
- [50] Einstein Toolkit webpage: <http://einstein Toolkit.org/>
- [51] H. Friedrich. On the Hyperbolicity of Einstein's and Other Gauge Field Equations. *Comm. Math. Phys.* 100 (1985) 525-543.
- [52] D. Garfinkle. Harmonic coordinate method for simulating generic singularities. *Phys. Rev. D* 65 (2002) 044029.
- [53] F. Pretorius. Numerical relativity using a generalized harmonic decomposition. *Class. Quantum Grav.* 22 (2005) 425-452.

- [54] C. Gundlach, G. Calabrese, I. Hinder and J. M. Martín-García. Constraint damping in the Z4 formulation and harmonic gauge. *Class. Quantum Grav.* 22 (2005) 3767-3773.
- [55] T. Nakamura, K. Oohara, and Y. Kojima. General Relativistic Collapse To Black Holes And Gravitational Waves From Black Holes. *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 90 (1987) 1-218.
- [56] M. Shibata and T. Nakamura. Evolution of three-dimensional gravitational waves: Harmonic slicing case. *Phys. Rev. D* 52 (1995) 5428-5444.
- [57] T. W. Baumgarte and S. L. Shapiro. On the Numerical integration of Einstein's field equations. *Phys. Rev. D* 59 (1998) 024007.
- [58] M. Alcubierre and B. Brügmann. Simple excision of a black hole in 3+1 numerical relativity. *Phys. Rev. D* 63 (2001) 104006.
- [59] M. Alcubierre et al. Gauge conditions for long-term numerical black hole evolutions without excision. *Phys. Rev. D*, 67 (2003) 084023.
- [60] U. Sperhake, B. Kelly, P. Laguna, K. L. Smith, and E. Schnetter. Black-hole head-on collisions and gravitational waves with fixed mesh-refinement and dynamic singularity excision. *Phys. Rev. D* 71 (2005) 124042.
- [61] D. R. Fiske, J. G. Baker, J. R. van Meter, D.-I. Choi, and J. M. Centrella. Wave zone extraction of gravitational radiation in three-dimensional numerical relativity. *Phys. Rev. D* 71 (2005) 104036.
- [62] B. Brügmann, W. Tichy, and N. Jansen. Numerical simulation of orbiting black holes. *Phys. Rev. Lett.* 92 (2004) 211101.
- [63] B. Brügmann. Binary Black Hole Mergers in 3D Numerical Relativity. *Int. J. Mod. Phys.*, 8 (1999) 85-100.
- [64] J. Thornburg. Coordinates and boundary conditions for the general relativistic initial data problem. *Class. Quantum Grav.* 4 (1987) 1119-1131.
- [65] P. Anninos, G. Daves, J. Massó, E. Seidel and W.-M. Suen. Horizon boundary condition for black hole spacetimes. *Phys. Rev. D* 51 (1995) 5562-5578.
- [66] F. Pretorius. Evolution of Binary Black-Hole Spacetimes. *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005) 121101.
- [67] M. Campanelli, C. O. Lousto, P. Marronetti, and Y. Zlochower. Accurate Evolutions of Orbiting Black-Hole Binaries without Excision. *Phys. Rev. Lett.* 96 (2006) 111101.
- [68] J. G. Baker, J. Centrella, D.-I. Choi, M. Koppitz, and J. van Meter. Gravitational-Wave Extraction from an Inspiral Configuration of Merging Black Holes. *Phys. Rev. Lett.* 96 (2006) 111102.
- [69] C. Bona, T. Ledvinka, C. Palenzuela, and M. Zázek. General-covariant evolution formalism for numerical relativity. *Phys. Rev. D* 67 (2003) 104005.
- [70] S. Bernuzzi and D. Hilditch. Constraint violation in free evolution schemes: Comparing BSSNOK with a conformal decomposition of Z4. *Phys. Rev. D* 81 (2010) 084003.
- [71] D. Alic, C. Bona-Casas, C. Bona, L. Rezzolla, and C. Palenzuela. Conformal and covariant formulation of the Z4 system with constraint-violation damping. *Phys. Rev. D* 85 (2012) 064040.
- [72] J. A. González-Alcázar, U. Sperhake, B. Brügmann, M. D. Hannam and S. Husa. The maximum kick from nonspinning black-hole binary inspiral. *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007) 091101.
- [73] J. A. González-Alcázar, M. D. Hannam, U. Sperhake, B. Brügmann and S. Husa. Supermassive kicks for spinning black holes. *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007) 231101.
- [74] M. Campanelli, C. O. Lousto, Y. Zlochower, and D. Merritt. Large Merger Recoils and Spin Flips From Generic Black-Hole Binaries. *Astrophys. J.* 659 (2007) 15-18.
- [75] M. Campanelli, C. O. Lousto, Y. Zlochower, and D. Merritt. Maximum gravitational recoil. *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007) 231102.
- [76] R. Penrose. Gravitational collapse: The role of general relativity. *Riv. Nuovo Cim.* 1 (1969) 252-276.
- [77] L. Lehner and F. Pretorius. Black Strings, Low Viscosity Fluids, and Violation of Cosmic Censorship. *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010) 101102.
- [78] T. Andrade, P. Figueras, and U. Sperhake. Violations of Weak Cosmic Censorship in Black Hole collisions. *JHEP*, 03 (2022) 111.
- [79] M. W. Choptuik. Universality and Scaling in Gravitational Collapse of a Massless Scalar Field. *Phys. Rev. Lett.* 70 (1993) 9-12.
- [80] C. Gundlach, D. Hilditch, and J. M. Martín-García. Critical Phenomena in Gravitational Collapse. e-print 2507.07636 [gr-qc].
- [81] U. Sperhake, E. Berti, V. Cardoso, and F. Pretorius. Universality, maximum radiation and absorption in high-energy collisions of black holes with spin. *Phys. Rev. Lett.* 111 (2013) 041101.
- [82] S. Dimopoulos and G. Landsberg. Black Holes at the LHC. *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001) 161602.
- [83] D. M. Eardley and S. B. Giddings. Classical black hole production in high-energy collisions. *Phys. Rev. D* 66 (2002) 044011.
- [84] A. H. Mroue et al. A catalog of 171 high-quality binary black-hole simulations for gravitational-wave astronomy. *Phys. Rev. Lett.* 111 (2013) 241104.
- [85] P. Ajith et al. The NINJA-2 catalog of hybrid post-Newtonian/numerical-relativity waveforms for nonprecessing black-hole binaries. *Class. Quantum Grav.* 29 (2012) 124001.
- [86] I. Hinder et al. Error-analysis and comparison to analytical models of numerical waveforms produced by the NRAR Collaboration. *Class. Quantum Grav.* 31 (2014) 025012.
- [87] R. Abbott et al. GWTC-3: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo during the Second Part of the Third Observing Run. *Phys. Rev. X* 13 (2023) 041039.
- [88] L. Lindblom et al. A New Generalized Harmonic Evolution System. *Class. Quantum Grav.* 23 (2006) S447-S462.
- [89] M. Boyle et al. High-accuracy comparison of numerical relativity simulations with post-Newtonian expansions. *Phys. Rev. D* 76 (2007) 124038.
- [90] M. A. Scheel et al. High-accuracy waveforms for binary black hole inspiral, merger, and ringdown. *Phys. Rev. D* 79 (2009) 024003.
- [91] Simulating eXtreme Spacetimes homepage: <https://www.black-holes.org/>.
- [92] M. A. Scheel et al. The SXS Collaboration's third catalog of binary black hole simulations. e-print 2505.13378 [gr-qc].
- [93] M. Baryakhtar et al. Dark Matter In Extreme Astrophysical Environments. In *Snowmass 2021*, 3 2022. e-print 2203.07984 [hep-th].
- [94] Emanuele Berti et al. Testing General Relativity with Present and Future Astrophysical Observations. *CQG* 32 (2015) 243001.
- [95] J. C. Aurrekoetxea, K. Clough, and E. A. Lim. Cosmology using numerical relativity. *Living Rev. Rel.* 28 (2025) 5.
- [96] T. Efstafyeva, U. Sperhake, I. Romero-Shaw, and M. Agathos. Gravitational-wave data analysis with high-precision numerical relativity simulations of boson star mergers. *Phys. Rev. Lett.* 133 (2024) 131401.
- [97] J. Calderón Bustillo et al. GW190521 as a Merger of Proca Stars: A Potential New Vector Boson of  $8.7 \times 10^{-13}$  eV. *Phys. Rev. Lett.* 126 (2021) 081101.
- [98] S. Clesse and J. Garcia-Bellido. GW190425, GW190521 and GW190814: Three candidate mergers of primordial black holes from the QCD epoch. *Phys. Dark Univ.* 38 (2022) 101111.
- [99] J. C. Aurrekoetxea, C. Hoy, and M. Hannam. Revisiting the Cosmic String Origin of GW190521. *Phys. Rev. Lett.* 132 (2024) 181401.



Ulrich Sperhake é Professor de Gravação no Departamento de Matemática Aplicada e Física Teórica (DAMTP) da Universidade de Cambridge e Investigador Visitante na Universidade Johns Hopkins. Ele obteve o doutoramento em 2001 na Universidade de Southampton. Trabalhou na Universidade Aristóteles de Tessalônica, na Universidade Estadual da Pensilvânia, na Universidade Friedrich Schiller de Jena, no Instituto de Tecnologia da Califórnia e, como bolseiro Ramón y Cajal no CSIC-IEEC em Barcelona. A sua investigação envolve a modelização de sistemas físicos em relatividade geral e as suas extensões, com aplicações que vão desde a astrofísica e a física de ondas gravitacionais até a física de altas energias e aspetos matemáticos da gravidade. Publicou mais de 100 artigos em revistas científicas internacionais. Coordenou projetos de investigação financiados pelo programa Marie-Curie da União Europeia, pelo Conselho de Laboratórios de Ciência e Tecnologia do Reino Unido (STFC) e pela National Science Foundation nos Estados Unidos. É membro da American Physical Society (APS) e líder do grupo de Cambridge dentro da Colaboração Científica LIGO-Virgo-KAGRA.