Um olhar físico sobre o *bungee jumping*

Bruno Couto

CADA VEZ MAIS OS CHAMADOS DESPORTOS RADICAIS ESTÃO NA MODA, E O NÚMERO DE PARTICIPANTES E ADEPTOS NÃO PARA DE AUMENTAR. O *BUNGEE JUMPING* É UM DOS DESPORTOS RADICAIS QUE, NOS ÚLTIMOS ANOS, SE TEM VINDO A INTEGRAR NO NOSSO PAÍS E, COMO QUALQUER OUTRO DESPORTO, RADICAL OU NÃO, PODE TORNAR-SE PERIGOSO CASO NÃO SE TOMEM AS DEVIDAS PRECAUÇÕES.

O princípio do *bungee jumping* é simples: numa visão de mero utilizador, o desportista salta de um sítio alto, e cai devido ao seu peso, sendo a queda amortecida por um cabo elástico, designado de *bungee*.

De um ponto de vista físico, e claro que com algumas aproximações normalíssimas – por exemplo, o facto de desprezarmos a resistência do ar – a descrição do movimento também é algo intuitiva e relativamente fácil de se efectuar. Consideremos, como origem do referencial, o local de onde o desportista salta, sendo o sentido positivo do eixo vertical o sentido do movimento (descendente).

Podemos dizer que o movimento do desportista é constituído por duas fases distintas: a primeira, a que podemos chamar de queda livre, onde o peso (*mg*) é a única força a actuar, dado que o *bungee* não se encontra esticado; e uma segunda fase em que o *bungee* está esticado e inicia o seu alongamento, actuando como um elástico, realizando uma força no sentido oposto.

PRIMEIRA FASE: A QUEDA LIVRE ($y < l$)

A partir do momento em que o desportista salta, o seu corpo comporta-se como qualquer outro em queda livre, em que a única força a que está sujeito é o seu peso. Durante este movimento, a sua velocidade *v* aumenta de forma gradual, dado que está sujeita à aceleração gravítica *g*,

$$F = mg; \quad a = g \,. \tag{1}$$

Através da combinação das equações da posição *y* e da velocidade *v* de um corpo em queda livre, obtemos, como é conhecido,

$$v^2 = 2gy \,. \tag{2}$$

Este movimento verifica-se até o percurso igualar o comprimento do *bungee*, $y = l$.

SEGUNDA FASE: QUANDO O DESPORTISTA ULTRAPASSA O COMPRIMENTO DO BUNGEE ($y > l$)

A partir de uma posição $y = l$ passa a existir uma força exercida pelo cabo elástico em simultâneo com o peso do desportista, mas actuando em sentido oposto. Esta força vai aumentando à medida que o cabo se alonga, enquanto que o peso do desportista se mantém inalterado (Fig. 1).
A força exercida pelo *bungee* é de natureza elástica e é determinada com base na lei de Hooke. Sendo *k* o coeficiente de elasticidade e Δy o alongamento em relação à posição l [1],

$$F_{bungee} = F_{elástica} = -k\Delta y = -k(y-l) \,. \tag{3}$$

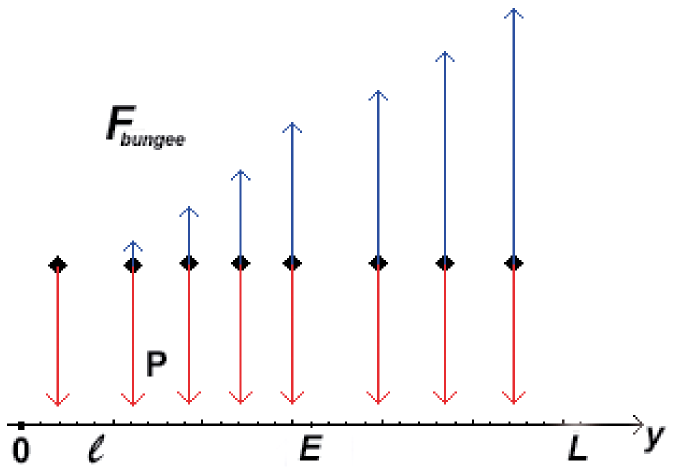

Fig. 1 – Representação do peso (a vermelho) e da variação da força exercida pelo *bungee* (a azul) em função da posição vertical. l é o comprimento do bungee, E é o ponto de equilíbrio, L o comprimento máximo do *bungee*.

Naturalmente, o valor de *k* depende do tipo de *bungee* utilizado, assim como o seu comprimento *l*, embora o desportista o possa ajustar. Com o uso, a elasticidade vai-se perdendo e, no máximo, um bom *bungee* deve realizar mil e duzentos saltos [2].
Nesta situação, a força resultante aplicada no desportista é

$$F = mg - k\,(\,y - I\,) \,. \tag{4}$$

Dado que a força exercida pelo *bungee* varia consoante o seu alongamento, podemos ainda dividir esta fase do movimento em duas partes: uma primeira em que a força do *bungee* é inferior ao peso do desportista, $mg > k\,(\,y - I\,)$, e uma segunda onde se tem o oposto.
Na primeira parte, verifica-se que a aceleração total (que até então era apenas gravítica, $a = g$ para $y = l$) começa a diminuir, dado que a força do *bungee* está gradualmente a aumentar, até atingir um valor nulo no ponto de equilíbrio *y=E*. Neste ponto as forças anulam-se e tem-se $mg = k\,(E - l)$, resultando em

$$E = l + \frac{mg}{k} \,. \tag{5}$$

Na segunda parte, em que a relação de forças se inverte, a resultante aponta no sentido contrário ao do movimento, tal como a aceleração, que volta a aumentar (em módulo),

$$a = g - \frac{k}{m}\,(y - l) \,. \tag{6}$$

Esta expressão aplica-se também à primeira parte de actuação da força do *bungee*, sendo que nesse caso se tinha *a*>0 e agora se tem *a*<0. A Fig. 2 ilustra a evolução da aceleração nas várias fases descritas.

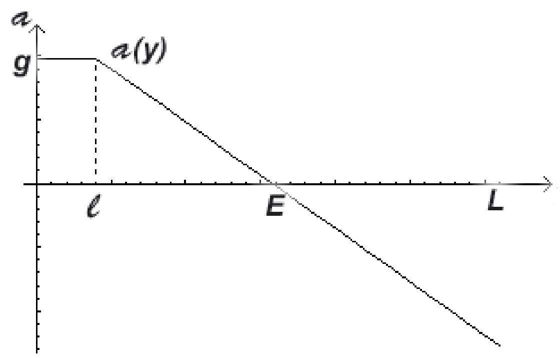

Fig. 2 – Gráfico da aceleração *a* do desportista em função da distância *y* percorrida.

Até ao ponto de equilíbrio, a velocidade do desportista está a aumentar continuamente a uma taxa constante, mas a partir de $y > l$ a taxa vai diminuindo, uma vez que a aceleração diminui. Neste ponto, o desportista atinge a sua velocidade máxima de queda, o que é matematicamente compreensível pelo facto de o máximo e o mínimo de uma função serem determinados pelos zeros da sua primeira derivada: sendo a aceleração a derivada temporal da velocidade, $a = v = {}^{dv}/_{dt}$, o valor máximo da velocidade é atingido no ponto de aceleração nula. A partir deste ponto, a velocidade vai diminuir até atingir um valor nulo, uma vez que a aceleração agora actua em sentido contrário ao do movimento, desacelerando-o.

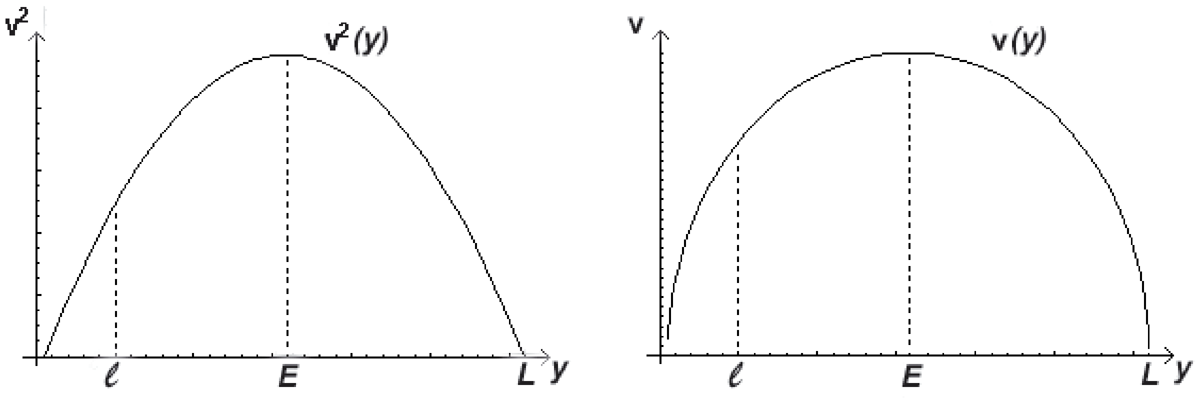

Fig. 3 – Gráficos do quadrado da velocidade (à esquerda) e da velocidade (à direita) em função da distância percorrida.

DETERMINAÇÃO DO ALONGAMENTO MÁXIMO *L* DO *BUNGEE*

No ponto $y=L$ onde o valor da velocidade é nulo, o alongamento do *bungee* é máximo. Novamente, podemos constatar que o máximo da função (neste caso a posição) pode ser determinado pelos zeros da sua derivada, a velocidade. Assim, podemos partir para a obtenção da expressão de L.
Dado que a posição do desportista é uma função unicamente dependente do tempo, podemos reescrever a aceleração em função da sua posição,

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}y} \qquad (7)$$

Apesar de ser um passo matemático trivial, podemos confirmar substituindo a Eq. (2) em (7) e obtemos que $a = g$ para $y < l$. Combinando as Eqs. (6) e (7), obtemos

$$\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}y} = 2g - 2\frac{k}{m}(y - l) = \frac{\mathrm{d}\left[2gy - {}^{k}\!/\!_{m}(y - l)^2\right]}{\mathrm{d}y} \qquad (8)$$

Igualando agora as funções dentro das derivadas, podemos escrever

$$v^2 = 2gy - \frac{k}{m}(y - l)^2 \qquad (9)$$

Esta equação é interessante pelo facto de que se retirarmos o segundo termo do lado direito, recuperamos a Eq. (2), ou seja, o caso $y < l$.
Para obtermos a expressão de L sabemos que neste ponto a velocidade é nula, ou seja

$$0 = 2gL - \frac{k}{m}(L - l)^2 \qquad (10)$$

e, obtendo a solução da equação, temos por fim

$$L = l + \frac{mg}{k}\left[1 + \sqrt{1 + 2\frac{kl}{mg}}\right] \qquad (11)$$

Podemos escrever este resultado de um modo mais simplificado, usando a definição (Eq. (5) do ponto de equilíbrio, resultando em

$$L = \mathrm{E} + \sqrt{\mathrm{E}^2 - l^2} \qquad (12)$$

Através desta expressão é possível determinar o comprimento máximo que o cabo poderá atingir e, consequentemente, a altura máxima de que o desportista poderá saltar. Obviamente, deve-se sempre considerar uma margem de segurança. Por exemplo, se um desportista de 60 kg saltar com um *bungee* de comprimento 20 m e constante de elasticidade 50 N/m (E=31,8 m), o salto nunca poderá ter uma altura inferior a 56,4 m.

Referências

[1] Young & Freedman, University Physics, Addison - Wesley, San Francisco, 2000.

[2] C. Cavette, “bungee cord” (http://www.enotes.com/how-products-encyclopedia/bungee-cord)

Bruno Hélder Pacheco Couto é Professor de Ciências Físico-Químicas na Escola Secundária Antero de Quental, Ponta Delgada, S. Miguel – Açores. bhpcouto@hotmail.com