GAZETA DE FÍSICA

Fundador: ARMANDO GIBERT

Vol. III, Fasc. 2 Outubro de 1954

Sur la densité de force électrique en un point d'une surface électrisée

L'auteur présente dans cette note deux démonstrations de l'expression de la densité de force électrique, en un point d'une surface électrisée, différentes des démonstrations habituelles. La première est conduite du point de vue de la théorie du champ, la deuxième a trait à la théorie du potentiel.

Point de vue de la théorie du champ — Considérons une surface S portant une distribution d'électricité de densité σ fonction continue d'un point courant Q sur S.

De ce premier point de vue nous remplaçons la distribution superficielle par une couche d'électricité dont l'épaisseur λ tend vers zéro et la densité volumique ρ vers infini de telle sorte que l'on ait

$$\sigma = lim \int_0^\lambda \rho dn \qquad (1)$$

dn étant un élément de l'épaisseur de la couche.

Placée dans un champ électrique E, cette couche se trouve soumise à une force

$$F = \int \rho E dv \qquad (2)$$

dv étant un élément de son volume.

Nous distinguons les deux faces de la couche, supposées parallèles, ainsi que les grandeurs qui y peuvent être définies, par les indices + et −, et nous désignons par n le vecteur unité de la normale dirigé du côté de la face +.

Le raisonnement que nous allons faire pour établir l'expression de la densité de force, en un point ordinaire O de S, est du type de celui qui permet de déduire des deux équations du champ

$$rot\, E = 0 \qquad div\, E = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho \qquad (3)$$

les relations

$$\begin{aligned} \left[n, E^+ - E^-\right] &= 0 \\ \left(n, E^+ - E^-\right) &= \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho \end{aligned} \qquad (4)$$

ε étant la constante diélectrique du milieu, E^+ et E^- les valeurs de E sur les deux faces de la couche. Tenant compte de la deuxième relation (3), la force F s'écrira

$$F = \frac{\varepsilon}{4\pi}\int E\, div\, E\, dv. \qquad (5)$$

Il nous faut transformer cette intégrale de volume en une intégrale de surface étendue à la surface Σ qui limite v et dont les deux faces viennent se confondre avec S quand $\lambda \to 0$. Dans ce but nous utilisons l'identité intégrale

$$\int \{E\, div\, E + (E, grad\, E)E\}\, dv = \\ = \int (n', E)E\, d\Sigma \qquad (6)$$

n' étant le vecteur unité de la normale à Σ dirigé vers l'extérieur de v, laquelle peut être facilement déduite de la première identité de Green.

Or, puisque l'on a *rot* $E = 0$, on peut écrire

$$grad\, E^2 = 2(E,\, grad)E.$$

Portant cette expression en (6) et utilisant l'identité

$$\int grad\, E^2\, dv = \int E^2\, n'\, d\Sigma$$

il vient

$$\int E\, div\, E\, dv = \int \left\{\frac{1}{2}E^2 n' + [[n' E]E]\right\} d\Sigma. \qquad (7)$$

On a donc, d'après (5), désignant par f la densité de force sur S

$$F = \int f dS = \frac{\varepsilon}{4\pi}\int \left\{\frac{1}{2}E^2 n' + [[n' E]E]\right\} d\Sigma \qquad (8)$$

Cette deuxième intégrale de surface doit être étendue aux deux faces de Σ. Remarquant qu'à la limite on a au point 0 sur la face + : $n' = n^+ = n$ et sur la face − : $n' = = n^- = -n$, l'intégrande prend la forme

$$\frac{1}{2}(E^+ + E^-, E^+ - E^-)\, n + [[n\, E^+]E^+] - \\ - [[n\, E^-]E^-];$$

comme d'autre part

$$[n\, E^+] = [n\, E^-] = \frac{1}{2}[n, E^+ + E^-]$$

il vient pour la densité de force en 0

$$f = \frac{\varepsilon}{4\pi}(n, E^+ - E^-)\frac{E^+ + E^-}{2} \qquad (9)$$

ou, tenant compte de la deuxième relation (4):

$$f = \sigma \frac{E^+ + E^-}{2} \qquad (10)$$

Dans ces formules (9 et 10), E représente le champ électrique total, mais elles gardent évidemment la même forme dans le cas ou la surface électrisée S existe seule dans le champ, E représentant alors le champ dû aux seules charges de S [1].

Point de vue de la théorie du potentiel — Supposons la même surface électrisée S. De ce nouveau point de vue nous cherchons à calculer directement la force R qui agit sur l'unité de charge placée au point 0, due aux seules charges de la surface S. Elle est la résultante des forces élémentaires

$$-\frac{1}{\varepsilon} grad_0 \frac{1}{r} \sigma dS \qquad (11)$$

qui agissent en 0 selon la loi de Coulomb, r étant la distance du point courant Q sur S au point potentié 0. Seulement quand $r \to 0$ cette expression (11) est indéterminée. La force R ne devient alors intelligible qu'aux termes d'une plaque α, faite autour du point 0, limitée par un contour γ que l'on fait tendre en suite continûment vers 0, c'est à dire que l'on pose par définition

$$R = -\frac{1}{\varepsilon} \lim_{\alpha \to 0} \int^{(S-\alpha)} grad_0 \frac{1}{r} \sigma dS \qquad (12)$$

[1] On peut develloper une démonstration analogue pour la densité de force magnétique en un point d'une nappe de courant.

si toutefois cette intégrale est convergente.

Or, on sait ([1]) que la composante de R suivant la normale au point 0, calculée d'après (12), est absolument convergente, tandis que la composante tangentielle n'est que semi-convergente, c'est à dire que sa valeur dépend de la forme de la plaque α faite autour de 0 (on le verra par la suite).

On peut penser que l'on arrivera à tourner la difficulté en introduisant le champ électrique E défini par la relation

$$E = -\operatorname{grad} V \qquad (15)$$

V étant la fonction potentiel des charges électriques.

Sur la normale en 0, dirigée du côté de la face +, prenons alors un point potentié P que l'on fait tendre en suite vers 0. Le champ est donné par

$$E = -\frac{1}{\varepsilon} \lim_{P\to 0} \int^{(S)} \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} \sigma dS. \qquad (14)$$

Mais il arrive maintenant que la composante tangentielle de E est bien définie, tandis que la composante normale ne l'est pas.

Malgré les difficultés que nous venons de signaler l'on peut établir quelques résultats intéressants et déduire l'expression de la densité de force, en 0, de la différence des composantes tangentielles et normales des deux vecteurs R et E ([2]).

Calculons d'abord la différence des composantes tangentielles.

On a

$$\begin{aligned} \varepsilon\left[n, R - E^{+}\right] = &- \lim_{\alpha\to 0} \int^{(S-\alpha)} \left[n,\ \operatorname{grad}_0 \frac{1}{r}\right] \sigma dS + \\ &+ \lim_{P\to 0} \int^{(S)} \left[n,\ \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}\right] \sigma dS. \end{aligned} \qquad (15)$$

([1]) Voir les traités sur la théorie du potentiel.

([2]) J'ai déjà donné cette démonstration dans mon cours à la Faculté des Sciences.

Remarquons que cette première intégrale peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\int^{(S-\alpha)} \left[n,\ \operatorname{grad}_0 \frac{1}{r}\right] \sigma dS = \\ &= \lim_{P\to 0} \int^{(S-\alpha)} \left[n,\ \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}\right] \sigma dS \end{aligned} \qquad (16)$$

puisque P reste toujours extérieur à $(S-\alpha)$.

Si nous effectuons maintenant la décomposition

$$\int^{(S-\alpha)} = \int^{(S)} - \int^{(\alpha)}$$

le premier terme au second membre de (15) devient

$$\begin{aligned} &- \lim_{P\to 0} \int^{(S)} \left[n,\ \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}\right] \sigma dS + \\ &+ \lim_{(\alpha\to 0,\, P\to 0)} \int^{(\alpha)} \left[n,\ \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}\right] \sigma dS. \end{aligned} \qquad (17)$$

En substituant nous obtenons

$$\begin{aligned} &\varepsilon\left[n, R - E^{+}\right] = \\ &= \lim_{(\alpha\to 0,\, P\to 0)} \int^{(\alpha)} \left[n,\ \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}\right] \sigma dS. \end{aligned} \qquad (18)$$

Enfin, si l'on applique à cette intégrale le théorème de la moyenne et ensuite le lemme de Stokes on pourra écrire

$$\varepsilon\left[n, R - E^{+}\right] = \lim_{(\alpha\to 0,\, P\to 0)} \left(\bar{\sigma} \oint \frac{ds}{r}\right) \qquad (19)$$

$\bar{\sigma}$ étant une certaine valeur de σ sur α.

Si $P \to 0$ sur la normale en 0, mais du côté de la face − de la surface on obtient

$$\varepsilon\left[n, R - E^{-}\right] = \lim_{(\alpha\to 0,\, P\to 0)} \left(\bar{\sigma} \oint \frac{ds}{r}\right). \qquad (20)$$

Dans certains cas de symétrie le second membre de (19) et (20) vaut zéro, mais en général la limite de l'intégrale, quand $P \to 0$, dépend de la forme de la plaque α faite autour de 0.

Toutefois on a dans tous les cas par soustraction de (19) et (20)

$$\left[n, E^{+} - E^{-}\right] = 0 \tag{21}$$

qui est la première relation (4).

Passons maintenant à la différence des composantes normales. On a

$$\begin{aligned}\varepsilon\left(n, R - E^{+}\right) = &-\lim_{\alpha\to 0}\int^{(S-\alpha)}\left(n,\ grad_0\frac{1}{r}\right)\sigma dS + \\ &+\lim_{P\to 0}\int^{(S)}\left(n,\ grad_P\frac{1}{r}\right)\sigma dS.\end{aligned} \tag{22}$$

Un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait donne

$$\begin{aligned}&\varepsilon\left(n, R - E^{+}\right) = \\ &= \lim_{(\alpha\to 0,\, P\to 0)}\int^{(\alpha)}\left(n,\ grad_P\frac{1}{r}\right)\sigma dS.\end{aligned} \tag{23}$$

Or

$$\begin{aligned}&\lim_{P\to 0}\int^{(\alpha)}\left(n,\ grad_P\frac{1}{r}\right)\sigma dS = \\ &= \lim_{P\to 0}\left(\bar{\sigma}\int - d\Omega\right),\end{aligned} \tag{24}$$

$d\Omega$ étant l'angle solide sous lequel on voit de P la plaque α. On a donc en faisant $\alpha \to 0$

$$\varepsilon\left(n, R - E^{+}\right) = -2\pi\sigma \tag{25}$$

σ étant cette fois la densité en 0.

Si $P \to 0$ sur la normale, mais du côté de la face − de S, on obtient

$$\varepsilon\left(n, R - E^{-}\right) = +2\pi\sigma \tag{26}$$

Par soustraction de (25) et (26) il vient

$$\varepsilon\left(n, E^{+} - E^{-}\right) = \frac{4\pi}{\varepsilon}\sigma, \tag{27}$$

c'est à dire la deuxième relation (4). Par addition de (25) et (26) il vient

$$(n, R) = \frac{1}{2}\left(n, E^{+} + E^{-}\right) \tag{28}$$

Si nous convenons de choisir une forme de plaque telle que le second membre de (19) et (20) soit nul, comme c'est le cas d'une plaque circulaire de centre 0, on aura

$$[n, R] = \frac{1}{2}\left[n, E^{+} + E^{-}\right] \tag{29}$$

Dès lors il vient pour la densité de force

$$f = \sigma R = \sigma\frac{E^{+} + E^{-}}{2}:$$

c'est l'expression trouvée par le premier raisonnement.

ANTÓNIO DA SILVEIRA

A Gazeta de Física continua a publicar-se apesar dos sacrifícios que a sua publicação representa. Todos os que se interessam pela Física deverão auxiliar-nos procurando arranjar novos assinantes