Vibrações mecânicas e eléctricas

O que se segue tem por objectivo pôr mais uma vez em evidência a profunda analogia existente entre os fenómenos vibratórios, mecânicos ou acústicos, e o carácter sinusoidal de certos fenómenos eléctricos, como seja, por exemplo, o caso da corrente alternada.

Estas considerações terão a vantagem de nos conduzir a uma visão de conjunto destes fenómenos, com o consequente e útil aprofundamento dos conceitos, quer da Mecânica, quer da Electricidade, que forem postos em jogo.

Limitar-nos-emos, neste estudo, ao caso de vibrações harmónicas simples, quer do ponto de vista mecânico, quer eléctrico, isto é, representadas analìticamente por uma função sinusoidal simples do tempo.

Seja uma partícula material, de massa m, sujeita a uma força elástica de chamada proporcional à elongação da partícula x em cada instante, a uma força de atrito que supomos proporcional à velocidade da partícula, e ainda a uma força exterior, aplicada, de direcção constante e cujo módulo varia sinusoidalmente com o tempo, com frequência angular ω. O movimento da partícula será representado evidentemente pela equação diferencial,

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Kx = F_0 \cos \omega t \qquad (1)$$

cujo integral geral, em ordem ao tempo, mostra que ela executa, em regime permanente, um movimento vibratório sinusoidal. Notemos, desde já, que, no primeiro membro desta equação, a primeira parcela representa a força de inércia, a segunda parcela a força de atrito, e a terceira a força elástica, todas de reacção ao movimento, e por isso mesmo opostas à força aplicada F, que figura isolada no segundo membro.

Escrevamos também a equação diferencial da corrente, ou da carga de um condensador inserido num circuito eléctrico de características L, R, C, no qual existe também uma *f. e. m.* aplicada do tipo

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

isto é, que varia sinusoidalmente com o tempo. Sabemos que é

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{c} = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

que exprime, afinal, ser nula, em cada instante, a tensão ao longo de todo o circuito fechado (como exige o princípio da conservação da energia em regime quase estacionário).

Podemos escrever ainda

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{c}q = \varepsilon_0 \cos \omega t \qquad (2)$$

Também aqui as três tensões do primeiro membro são tensões de reacção do circuito à *f. e. m.* aplicada, que figura no segundo membro.

Deixando de lado a interpretação destas tensões à luz da equação (1), a flagrante analogia entre as equações (1) e (2) está longe de ser meramente formal, e sugere que se faça a seguinte correspondência de coeficientes

$$L \to m \qquad R \to \beta \qquad K \to \frac{1}{C}$$

a qual arrasta a correspondência da carga q do condensador a uma elongação x, o que é perfeitamente justificável, deste ponto de vista analógico, dado que as derivadas em ordem ao tempo são respectivamente

$$\dot{q} = i$$
$$\dot{x} = v$$

e a intensidade de uma corrente eléctrica pode ser tratada como uma velocidade de uma partícula material. Mais precisamente, a intensidade da corrente eléctrica terá o carácter de uma vazão, na analogia hidrodinâmica, o vector correspondente à velocidade num ponto de um meio fluído sendo rigorosamente a densidade de corrente. Mas, do ponto de vista de dimensões, as duas grandezas diferem apenas por um factor área que não interessa considerar agora aqui. Notemos que as equações (1) pressupõem ser a trajectória da partícula rectilínia, o que permite abstrair do carácter vectorial da sua velocidade.

Sabido que os nomes das grandezas eléctricas, *força electromotriz*, tensão, resistência, e outras, não engeitam a sua primitiva concepção mecânica, vemos agora a justeza dessas denominações, à luz da analogia indicada.

Com efeito a parcela $R\dot{q} = Ri$ da equação (2) representa fundamentalmente, no circuito da corrente alternada, o mesmo papel que o atrito no movimento mecânico em meio fluido: Só que aqui se sabe calcular rigorosamente a dissipação da energia por efeito Joule, correspondente ao desenvolvimento de calor por atrito no movimento mecânico, calor este mais difícil de calcular, ao menos em função só das características intrínsecas do sistema.

Se não houver resistência no circuito (caso ideal, correspondente à não existência de atrito mecânico) não haverá dissipação da energia e o movimento ou a corrente, permaneceriam indefinidamente, sem consumo de energia, àparte a inicialmente fornecida; mesmo sem existência de força exterior aplicada ([1]).

([1]) Voltarei adiante a este assunto, no caso de existência de força aplicada.

Com efeito, os primeiros integrais gerais das equações (1) e (2) seriam então respectivamente:

$$\frac{1}{2}mv^2 + K\frac{x^2}{2} = const. = M_1 \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{c} = const. = E_1 \qquad (4)$$

em perfeita correspondência simbólica, e que traduziam, no mov. mecânico, a conservação da soma das energias potencial e cinética da partícula, e na corrente alternada, a conservação da soma das energias magnética da *self*, e electrostática do condensador, e, em ambos os casos, a conservação de toda a energia inicialmente posta em jogo, mecânica em (3), electro-magnética em (4).

A analogia formal das expressões $1/2\ mv^2$ e $1/2\ Li^2$ lembra, com efeito, o carácter cinético da energia magnética, justificado pelas condições do equilíbrio electro-dinâmico, em que se verifica um máximo de energia magnética para condição de equilíbrio estável. O carácter potencial da energia armazenada no condensador, também fica sobejamente demonstrado.

Lembremos apenas que as trocas de energia electro-magnética se dariam exclusivamente entre o condensador e a *self*, à semelhança das trocas de energia potencial em cinética da partícula oscilatória, ou de um sistema pendular livre, sem atrito.

É interessante notar que esta conservação de energia eléctrica, representada pela troca, sem perdas,

energia eléctrica do condensador ⇆
⇆ energia magnética da *self*,

está ligada ao facto da corrente na *self*, ou na capacidade, não estar em fase com a tensão nos seus extremos, mas em quadratura, e assim poder ser armazenada a potência desenvolvida.

De facto a potência dissipada durante um período sendo dada pelo valor médio da expressão *vi*, durante um período, tem-se

$$\bar{P} = \overline{vi} = \frac{1}{T}\int_0^T vi dT =$$
$$\frac{1}{T}\int_0^T V\cos\omega t \cdot I\cos\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) dt =$$
$$= \mp\frac{1}{T} VI \int_0^T \cos\omega t \cdot sen\,\omega t \cdot dt =$$
$$= \mp\frac{1}{T} VI \int_0^T \frac{1}{2} sen\,2\omega t \cdot dt = 0$$

por ser nulo, em cada período, o valor médio da função seno.

A identificação dos coeficientes $L \to m$, faz pensar na existência de uma inércia dos circuitos eléctricos, que a lei de Ohm da corrente contínua exclui [1], mas que vem a aparecer com os fenómenos de indução electro-magnética; enquanto que a correspondência

$$K \to 1/C$$

nos convida a ver a capacidade sob um aspecto mecânico, qualquer coisa, que, no sistema, variaria na razão inversa de reacção elástica, da rigidez duma mola, por exemplo, e que, no sistema pendular, estaria na razão directa do momento de inércia e na inversa do comprimento (distância *d*). É evidente que a analogia apontada se vai verificar «ipso facto» nos integrais gerais das equações (1) e (2), e ainda, em todas as características dos sistemas e do movimento que elas representam.

E assim, ambos os integrais gerais se podem escrever sob a forma

$$x = Ce^{-\frac{\beta}{2m}t}(\cos\omega' t - \psi) + a\cos(\omega t - \Phi) \qquad (5)$$

em que

$$\omega' = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}$$
$$a = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \beta^2\omega^2}} \qquad (6)$$
$$\Phi = \omega\, ctg \frac{\beta\omega}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \qquad (7)$$

e C e ψ são as duas constantes arbitrárias de integração, a determinar em cada caso concreto, pelas condições iniciais de posição e velocidade, ou de carga e intensidade [1].

Como se vê o movimento da partícula, ou a corrente no circuito, são compostos de duas partes: a primeira representa o regime livre, regime transitório que tende ràpidamente para zero; a segunda o regime forçado, regime sinusoidal com a frequência imposta — no caso eléctrico, a corrente alternada.

Atentemos no que se passa, com a pulsação, por exemplo. A pulsação própria do sistema mecânico, isto é, a pulsação do sistema livre, e sem amortecimento, é

$$\omega_m^0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

ao passo que a pulsação própria de circuito eléctrico, será, nas mesmas condições

$$\omega_e^0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

[1] A corrente contínua corresponderá assim ao movimento uniforme e rectilínio, onde também não há que falar de inércia. Se dermos á lei de Ohm da corrente contínua a forma

$$V - Ri = 0$$

a tensão V representará a força constante aplicada ao móvel para vencer a força de atrito, sempre existente na prática, e representada pelo termo $-Ri$, sendo nula a resultante, e portanto uniforme o movimento.

[1] A primeira parcela do integral geral, não tem necessàriamente a forma apresentada em (6), podendo o regime transitório, embora exponencial, não ser oscilatório.

enquanto que a pulsação do movimento amortecido é, no primeiro caso

$$\omega'_m = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}} < \omega_0^m$$

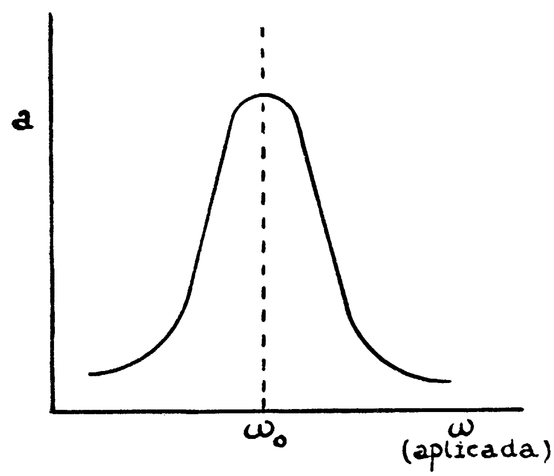
e no segundo

$$\omega'_e = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} < \omega_0^e$$

de acordo com a correspondência dos coeficientes posta inicialmente, como era de esperar. Ainda aqui, a resistência, ou a self, têm, sobre a pulsação eléctrica, o mesmo efeito que o atrito, ou a massa da partícula sobre a pulsação do movimento mecânico.

As variações de amplitude a e da fase Φ do regime forçado com a frequência imposta, podem também ser estudadas num paralelismo absoluto.

Nomeadamente, a ressonância eléctrica corresponde à ressonância mecânica ou acústica, e os efeitos são absolutamente paralelos. Como se sabe, a curva da ressonância é da forma



com um máximo muito acentuado para $\omega = \omega_0$. Este máximo vale, como se vê da expressão de a, $F_0/\beta\omega_0$ e torna-se infinito quando $\beta = 0$ (quando não há amortecimento, ou resistência), e é tanto maior quanto menor for a pulsação própria, sempre finita; e, em todo o caso, sempre maior que a amplitude imposta F_0 ou ε_0. Perto da ressonância mecânica, a amplitude do movimento cresce ràpidamente com grande amplificação em relação à amplitude da força aplicada, o que traz como consequência o aparecimento de grandes forças de chamada elástica, que podem, como sabemos, destruir o objecto vibrante. (Veja equação 1).

Do mesmo modo, perto da ressonância eléctrica, aparecem perigosas sobretensões nos circuitos, muito superiores às aplicadas, fenómeno sobejamente conhecido dos electroctécnicos. E o teorema das bandas de passagem, zona em que se aproveita a amplificação, base da selectividade acústica, é também a base da selectividade eléctrica, tão aproveitada na recepção em T. S. F.

A amplificação na ressonância entre a tensão nos pratos do condensador e a f. e. m. aplicada vale, como é facil de calcular $L\omega/R$ que se chama factor de sobretensão do circuito.

Basta notar que, no simbolismo imaginário, se tem, na ressonância

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{V}{-\frac{j}{C\omega}} = jC\omega V$$

sendo ε a f. e. m. aplicada e V a tensão no condensador. A amplificação vale portanto

$$\frac{|V|}{|\varepsilon|} = \frac{1}{RC\omega} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

Mas

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega}$$

e portanto

$$\frac{|V|}{|\varepsilon|} = \frac{L\omega_0}{R}$$

como se queria demonstrar. É de prever que, a este factor de sobretensão nos circuitos eléctricos, corresponda, nas vibrações mecânicas, o factor $m\omega_0/\beta$. Ora, esta expressão, à parte o factor $1/\pi$, representa o quociente da constante de tempo do circuito, pelo período próprio:

$$\frac{2m}{\beta} \div \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{m}{\pi}\frac{\omega_0}{\beta}$$

Quer dizer, se pudéssemos falar da sobretensão acústica, ela representaria, medido em períodos próprios do objecto vibrante, o tempo que a amplitude da vibração, levaria, em regime livre, a reduzir-se a $1/e$ de seu valor inicial.

Os valores desta sobretensão acústica, são, em geral, muito superiores, aos das sobretensões das bobinas eléctricas. Assim é que, para um diapasão, de 64 vibrações por segundo, posto em vibração, esta perdurará cerca de 1 minuto. Tomando metade deste valor para constante de tempo, obtemos para factor de sobretensão um valor de cerca de 2.000, enquanto que, em bobinas para alta frequência, usadas nos receptores de T. S. F., raramente se atinge um coeficiente de sobretensão superior a 200. (V. Dynamique Géneral des Vibrations, Y. Rocard. Pag. 64).

Atentemos ainda, e para terminar, no caso interessante do circuito self-capacidade, ou de um sistema pendular sem amortecimento, em regime forçado, isto é, com uma força aplicada, mecânica ou eléctrica, sinusoidal.

Num tal sistema, representado pela equação

$$m\ddot{x} + K\dot{x} = F_0 \cos \omega t \qquad (8)$$

para pequenas frequências ($\omega \ll \omega_0$) a amplitude do movimento forçado é aproximadamente constante e igual a

$$\frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{K}$$

como se deduz da expressão (6).

É o que pode deduzir-se também da equação (8), se nos lembrarmos de que, por ser ω pequeno, o termo $m\ddot{x} = -m\omega^2 x$ pode desprezar-se por conter o quadrado de ω. Fìsicamente, isto quer dizer que a força de inércia se pode desprezar e o movimento do sistema será «controlado pela elasticidade».

A equação (8) pode então escrever-se, com a aproximação referida,

$$x = \frac{F_0}{K} \cos \omega t$$

e a amplitude é independente da frequência imposta.

Pelo contrário, se a frequência ω imposta cresce muito além de ω_0, vê-se da mesma expressão (6) que a amplitude do movimento forçado tende para zero, o mesmo sucedendo portanto à elongação x e ao termo Kx da equação (8) que representa a força elástica. E assim chegamos nesta hipótese, à equação

$$m\ddot{x} = F_0 \cos \omega t$$

que representa um movimento apenas «controlado pela inércia».

(V. Dynamique Géneral des Vibrations, Pag. 9),

Tudo se passa semelhantemente nos circuitos eléctricos correspondentes.

Para pequena frequência da *f. e. m.* imposta, a equação toma a forma

$$\frac{1}{C} q = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

$$q = \varepsilon_0 C \cos \omega t$$

$$i = -\omega \varepsilon_0 \operatorname{sen} \omega t$$

e o circuito comporta-se, dentro da aproximação referida, como um condensador único ao qual se aplicasse a *f. e. m.* $\varepsilon_0 \cos \omega t$ (circuito controlado pelo condensador). Notar que a corrente tende para zero com ω e seria mesmo nula no caso limite da corrente contínua (ω = 0).

Ao contrário, para ω grande, a equação seria

$$L\ddot{q} = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

$$q = -\frac{\varepsilon_0}{L} \times \frac{1}{\omega^2} \cos \omega t$$

$$I = \frac{\varepsilon_0}{L} \times \frac{1}{\omega} sen\, \omega t$$

e a corrente tende agora para zero à medida que ω cresce, o que mostra fisicamente que o sistema está sendo «controlado pela bobina», de grande impedância às altas frequências.

É o que se vê imediatamente das expressões imaginárias, que dão o valor da corrente na bobine e no condensador, quando se lhe aplica respectivamente a mesma tensão (ε^0,ω)

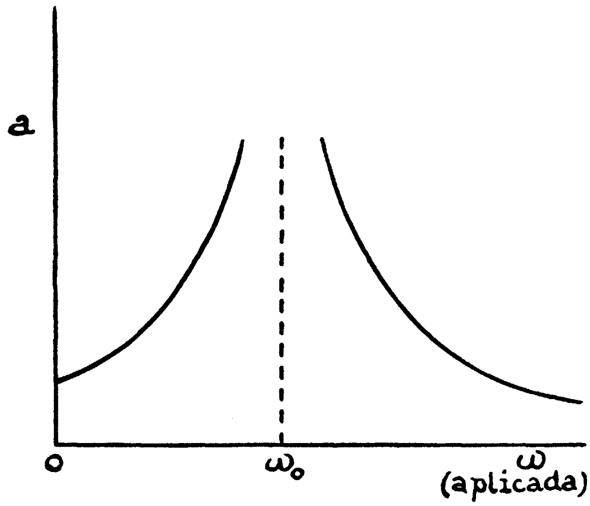
$$i = \frac{\varepsilon}{jL\omega} \quad \text{(para a bobina)}$$

$$i = j\omega C.\varepsilon \quad \text{(para o condensador)}$$

Se ω tende para zero $\begin{cases} i \to \infty & \text{(na bobina)} \\ i \to 0 & \text{(no condensador)} \end{cases}$

Se ω tende para infinito $\begin{cases} i \to 0 & \text{(na bobina)} \\ i \to \infty & \text{(no condensador)} \end{cases}$

ou mais sugestivamente ainda do gráfiico da variação da amplitude com a frequência imposta donde se vê claramente que, à esquerda da ordenada ω_0 o sistema é controlado pelo condensador, enquanto que, à direita, o é pela bobina.



Em próximo artigo procurarei tratar alguns casos interessantes de acopulamentos de sistemas vibrantes mecânicos e eléctricos, considerados deste mesmo ponto de vista.

LÍBANO MONTEIRO
2.º Assistente da F. C. L.

BIBLIOGRAFIA

Y. ROCARD — Dynamique Géneral des Vibrations.
YOOS — Theoretical Physics.

NOTA AOS ASSINANTES — Em virtude da notável despesa que acarreta para a «Gazeta de Física» a cobrança das assinaturas, pedimos novamente aos nossos estimados assinantes que nos enviem um vale com a quantia de 40$00 referente à actual assinatura cujo recibo lhes será imediatamente enviado. Os nossos agradecimentos a todos os que já corresponderam a este pedido — A COMISSÃO DE REDACÇÃO