# Cinemática dos Corpos Rígidos em Relatividade (1)

**Resumo**

Expressão geral da distância elementar de dois pontos dum corpo. Aplicação: *A*) distância medida no espaço próprio do corpo; *B*) distância medida no espaço dum referencial; *C*) Contracção de Lorentz. Condição necessária suficiente de movimento rígido. Número de graus de liberdade de um corpo rígido.

**1.** Quando se pretende avaliar, no espaço de um referencial admissível da Relatividade Restricta, o comprimento de uma régua em repouso noutro referencial (admissível também), é-se conduzido afinal ao seguinte problema (já por nós tratado em [1]):

*Dadas as linhas de universo de dois pontos materiais* P *e* Q *(extremidades da régua) com a mesma velocidade em relação a um referencial (de coordenadas* $x_i$, t), *determinar a sua distância no espaço de um ponto material* R *animado de velocidade constante em relação àquele referencial.*

Do ponto de vista matemático somos conduzidos a procurar a distância de duas linhas de universo temporais do tipo particular

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_i &= v_i t + a_i, \\ x_i &= v_i t + b_i \end{aligned}$$

que correspondem a *P* e *Q*, no espaço de uma terceira linha de universo temporal

$$(2) \qquad x_i = u_i t + d_i,$$

que corresponde a *R*.

Essa distância é dada pela fórmula ([1])

$$(3) \qquad I_u^v = \frac{v^2 - c^2}{u/v - c^2}(u/r)^2 - 2\frac{v/r\,u/r}{u/v - c^2} + r^2$$

Se passarmos agora da Relatividade Restricta para a Relatividade Geral, então, como deixam de existir os sistemas *admissíveis* ou sistemas de inércia (a não ser com carácter local), e além disso só tem sentido (de um modo geral) falar de distâncias elementares, o problema enunciado anteriormente perde, todo o interesse.

Assim, em Relatividade Geral, o que tem interesse é, por exemplo, a distância de duas linhas de universo temporais (de tipo qualquer) infinitamente próximas, como são as que correspondem às extremidades de uma régua elementar ou, de um modo geral, a dois pontos infinitamente próximos de um corpo. É este em concreto o caso quando se trata do problema do movimento de um corpo rígido.

Ora, como um corpo é representado analìticamente por uma congruência de linhas temporais, vamos calcular precisamente a distância de duas linhas infinitamente próximas de uma tal congruência

$$(4) \quad x^\alpha = x^\alpha(y^i, \theta), \ \alpha = 1, 2, 3, 4, \ i = 1, 2, 3,$$

na qual $y^i$ são os parâmetros definidores das linhas (da congruência) e θ um parâmetro tempo como por exemplo o *tempo próprio.*

Designando por $V^\alpha$ as componentes contravariantes de um vector temporal arbitrário, a distância da linha $y^i$ à linha

(1) Este artigo completa, ampliando-o bastante, um outro que publicamos no n.º 58 da *Gazeta de Matemática.*

(1) Ver [1], p. 37.

$y^i + dy^i$, distância calculada no ponto $\theta$ da primeira e no espaço do $V^\alpha$, será dada por

$$(5) \qquad d\sigma^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

sendo

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

a métrica do universo e supondo que as diferenciais $dx^\alpha$ estão obrigadas à *condição de ortogonalidade*

$$(6) \qquad g_{\alpha\beta} dx^\alpha V^\beta = 0$$

tomada no ponto $x^\alpha = x^\alpha(y^i, \theta)$.

Diferenciando (4) e substituindo as expressões em (5), vem

$$(7) \qquad d\sigma^2 = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{dx^\beta}{dy^i} dy^i dy^i + 2 g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{dx^\beta}{dy^i} dy^i d\theta + g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{\partial\theta} \frac{dx^\beta}{\partial\theta} d\theta^2.$$

E fazendo o mesmo em (6), tem-se

$$(8) \qquad g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} V^\beta dy^i + g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{\partial\theta} V^\beta d\theta = 0.$$

Atendendo agora a que $\frac{\partial x^\alpha}{\partial\theta}$ e $V^\beta$ são ambos vectores temporais, donde

$$(9) \qquad g^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\theta} V^\beta \neq 0,$$

é possível eliminar $d\theta$ de (7), resultando simplesmente

$$(10) \qquad d\sigma^2 = \left[ g^{\alpha\beta} - 2 \frac{U^\alpha}{U_\mu} \frac{V^\beta}{V^\mu} + U_\mu U^\mu \frac{V^\alpha V^\beta}{(U_\mu V^\mu)^2} \right] \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} dy^i dy^j,$$

em que

$$(11) \qquad U^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial\theta}, \quad U^\alpha = g_{\alpha\beta} U^\beta, \quad V_\alpha = g_{\alpha\beta} V^\beta$$

Normalizando $U^\alpha$ e $V^\beta$ por intermédio de

$$(12) \qquad u^\alpha = \frac{U^\alpha}{\sqrt{-U_\mu U^\mu}}, \quad v^\alpha = \frac{V^\alpha}{\sqrt{-V_\mu V^\mu}},$$

ainda podemos escrever

$$(13) \qquad d\sigma^2 = \left[ g_{\alpha\beta} - 2 \frac{u_\alpha v_\beta}{u_\mu v^\mu} - \frac{v_\alpha v_\beta}{(u_\mu v^\mu)^2} \right] \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} dy^i dy^j,$$

o que nos dá a distância pedida em termos de uma forma quadrática nas diferenciais dos parâmetros definidores das linhas da congruência.

*Casos particulares*

A. *Distância no espaço das próprias linhas da congruência.*

Neste caso é $v^\alpha = u^\alpha$, donde [1]

$$(14) \qquad d\sigma^2 = (g_{\alpha\beta} + u_\alpha v_\beta) \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} dy^i dy^j,$$

visto que

$$(15) \qquad u_\alpha u^\alpha = -1$$

B. *A congruência coincide com a das próprias linhas coordenadas $x^4$ (que supomos temporais segundo a convenção habitual).*

Então as alterações imediatas

$$(16) \qquad y^i = x^i, \ \theta = x^4,$$

conduzem a

$$(17) \qquad d\sigma^2 = \left[ g_{ik} - 2 \frac{u^i v^k}{u_\mu v^\mu} - \frac{v_i v_k}{(u_\mu v^\mu)^2} \right] dx^i dx^k.$$

---

[1] A expressão (14) está deduzida em [3] mas seguindo outro raciocínio.

Admitamos agora que é no espaço de cada linha $x^4$ que se calcula a distância. Haverá que fazer

(18) $$v^i = u^i,$$

e portanto vem

(19) $$d\sigma^2 = (g_{ik} + u_i u_k)\, dx^i dx^k.$$

Mas atendendo a que

(20) $$u^i = 0,$$

pois ao longo de uma linha $x^4$ as diferenciais das outras coordenadas são nulas, vem

(21) $$u_i = g_{i\alpha} u^\alpha = g_{i4} u^4$$
$$u_4 = g_{44} u^4,$$

o que, tendo em conta (15), conduz a

(22) $$u_4 = \frac{1}{\sqrt{-g_{44}}}, \quad u_i = \frac{g_{i4}}{\sqrt{-g_{44}}}.$$

Substituindo estas expressões em (19), chegamos à fórmula conhecida (ver [1], p. 62)

(23) $$d\sigma^2 = \left( g_{ik} - \frac{g_{i4} g_{k4}}{g_{44}} \right) dx^i dx^k =$$
$$= \gamma_{ik} dx^i dx^k.$$

É evidente que podemos aproveitar (23) para exprimir (14), mas com a condição de transformarmos primeiro as variáveis $x^\mu$ nas variáveis $y^i$, $y^4 = 0$ por intermédio de (4), dando a $ds^2$ a forma

(24) $$ds^2 = g'_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu,$$

donde

(25) $$d\sigma^2 = \gamma'_{ik} dy^i dy^k,$$

em que

(26) $$\gamma'_{ik} = g'_{ik} - \frac{g'_{i4} g'_{k4}}{g'_{44}}.$$

Verifica-se, pois, a identidade

(26') $$\gamma'_{ik} = (g_{\alpha\beta} + \mu_\alpha \mu_\beta) \frac{dx^\alpha}{dy^i} \frac{dx^\beta}{dy^k}$$

O elemento $ds$, relativo ao universo, e o elemento $d\sigma$, relativo ao espaço da congruência, estão relacionados entre si por

(26") $$ds^2 = d\sigma^2 + \frac{(g'_{\mu 4} dy^\mu)^2}{g_{44}},$$

como se conclue imediatamente de (24), (25) e (26).

De (26") decorre (1) que $d\sigma^2$ é uma forma definida-positiva, uma vez que $ds^2$, por hipótese, é pseudo-euclideana (localmente) e $g_{44}$ negativo (pelo facto de serem temporais as linhas coordenadas $x^4$, isto é, as linhas de universo do ponto do corpo).

C. *A Contracção de Lorentz.*

Suponhamos que o sistema de referência é absoluto, portanto $ds^2$ redutível (sem mudança de sistema) à forma

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k + g_{44} dx^{4^2},$$

correspondente a $g_{4i} = 0$.

Se tomarmos para parâmetro temporal da congruência (4) precisamente a coordenada $x^4$, teremos em vez de (4)

(4') $$x^k = x^k(y^i, x^4)$$
$$x^4 = x^4,$$

e portanto $d\sigma^2$ tomará a forma

(13') $$d\sigma^2 = \left[ g_{pq} - 2\frac{u_p v_q}{u_\mu v^\mu} - \frac{v_p v_q}{(u_\mu v^\mu)^2} \right]$$
$$\frac{\partial x^p}{\partial y^i} \frac{\partial x^q}{\partial y^j} dy^i dy^j,$$

em que $p$ e $q$ só podem assumir os valores 1, 2, 3.

---

(1) Ver [6], pp. 8 e 9.

Ora, aplicando (13') à hipótese

$$v^i = 0,$$

que implica

$$v_i = g_{4i}v^4 = 0,$$

vem

$$d\sigma_0^2 = g_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial x^q}{\partial y^j}dy^i dy^j.$$

E aplicando-a à hipótese

$$v^\mu = u^\mu,$$

tem-se

$$d\sigma^2 = (g_{pq} + u_p u_q)\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial x^q}{\partial y^j}dy^i dy^j$$

Logo,

$$d\sigma_0^2 = d\sigma^2 - \left(u_p\frac{\partial x^p}{\partial y^i}dy^i\right)^2,$$

quere dizer: *a distância elementar $d\sigma_0$ de dois pontos de um corpo medida num sistema absoluto de coordenadas é menor ou igual à distância $d\sigma$ medida no espaço do próprio corpo. E só terá lugar a igualdade quando a variação de $x^i$ para $x^4$ constante, que é o vector da componente*

$$\delta x^p = \frac{\partial x^p}{\partial y^i}dy^i,$$

*for ortognal ao vector $u^p$ segundo* a m*étrica do espaço das coordenadas $x^\mu$.*

*Tal é a expressão da contracção de Lorentz em Relatividade Geral.*

Se aplicarmos este enunciado ao caso de $x^\mu$ ser um sistema admissível da Relatividade Restricta, que é um sistema absoluto, e na hipótese de a congruência (4') coincidir com outro sistema admissível, obtém-se o conhecido resultado [1]

$$I_u^u = r^2 - \frac{(u/r)^2}{u^2 - c^2},$$

[1] Ver [2] e atender à diferença de notações e a que esta fórmula se refere a distâncias finitas quaisquer e não a distâncias elementares.

que estabelece a relação entre o comprimento calculado e o comprimento próprio de uma régua admissível.

**2.** *Movimento de um corpo rígido.*

Adaptando à Relatividade Geral a definição dada por M. Born e G. Herglotz [1] para a Relatividade Restrita, diremos *que um corpo se mantém rígido se a distância das linhas de universo de dois quaisquer dos seus pontos infinitamente próximos, avaliada no respectivo espaço, não variar no decorrer do movimento.*

Nestes termos, se o corpo em movimento é representado pela congruência (4), *a condição necessária e suficiente* de rigidês será dada por

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(g_{\alpha\beta} + \mu_\alpha\mu_\beta)\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}\right] = 0, \tag{27}$$

pois são estas as equações que exprimem que os coeficientes de $d\sigma^2$ [fórmula (14)] não dependem do parâmetro-tempo $\theta$.

Substituindo a derivação em ordem a $\theta$ pela derivação em ordem ao arco $s$, visto ser

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{-U_\beta U^\beta} \neq 0,$$

e desenvolvendo (24), vem [2]

$$\left[(g_{\alpha\mu} + \mu_\alpha\mu_\mu)\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\beta} + (g_{\beta\mu} + \mu_\beta\mu_\mu)\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} + \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\mu}u_\beta + \frac{\partial u_\beta}{\partial x^\mu}u_\alpha\right)u^\mu\right]\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^j} = 0. \tag{28}$$

[1] Ver [4] e [5].

[2] Ver [3], p. 1660.

E ainda é possível dar a esta equação a forma equivalente ([1])

(29) $$u_{\mu;\nu} + u_{\nu;\mu} + u_{\mu;\lambda}u^{\lambda}u_{\nu} + u_{\nu;\lambda}u^{\lambda}u_{\mu} = 0,$$

na qual $u_{\mu;\nu}$ são as componentes da derivada covariante de $u_{\mu}$ (em ordem às variáveis $x^{\alpha}$).

Pondo

(30) $$U_{\mu\nu} = u_{\mu;\nu} + u_{\mu;\lambda}u^{\lambda}u_{\nu}.$$

podemos exprimir (26) segundo o

*Teorema. A condição necessária e suficiente para que um corpo (representado pela congruência (4)), seja rígido, é que o tensor* $U_{\mu\nu}$ *seja hemi-simétrico.*

E como complemento vamos demonstrar o

*Teorema. A condição necessária e suficiente para que um corpo seja rígido e, além disso, dotado de espaço (comum a todos os seus pontos), é que* $U_{\mu\nu}$ *seja idênticamente nulo.*

Na verdade, introduzindo o vector contravariante ([2])

(31) $$a^{\mu} = \frac{1}{2}\left(-g\right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} u_{\alpha} u_{\beta;\gamma},$$

que representa a velocidade angular local da matéria com relação ao sistema (local) da inércia (ver [1], p. 74 e [3], p. 1661), obtém-se fàcilmente

(32) $$2\left(-g\right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} a^{\mu} u^{\nu} = U_{\tau\sigma} - U_{\sigma\tau}.$$

Portanto, se o corpo é rígido, (29) transforma-se em

(33) $$U_{\tau\sigma} = 2\left(-g\right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} a^{\mu} u^{\nu}$$

que nos dá imediatamente $U_{\tau\sigma} = 0$ se o corpo possui um espaço (comum a todos os seus pontos), visto ser então $a^{\mu} = 0$ (ver [13], p. 74, 75).

Inversamente, como $U_{\tau\sigma} = 0$ é um caso particular de hemi-simetria, a fórmula (33), então aplicável, conduz-nos a

(34) $$a^{\mu}u^{\nu} - a^{\nu}u^{\mu} = 0,$$

pois $\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}$ é hemi-simétrico em $\sigma\tau$.

Mas (34) implica a existência de dois factores $p$ e $q$, não conjuntamente nulos, tais que

(35) $$pa^{\mu} - qu^{\mu} = 0.$$

E como as componentes $u^{\mu}$ não podem ser todas nulas visto que $u_{\alpha}u^{\alpha} = -1$, $p$ tem de ser diferente de zero, de contrário arrastaria o anulamento de $q$, o que é impossível por hipótese.

Multiplicando agora (35) por $u_{\mu}$, somando e atendendo a que $a^{\mu}$ e $u^{\mu}$ são sempre ortogonais ([1]) vem

$$q\mu^{\mu}u_{\mu} = -q = 0,$$

donde

(36) $$a^{\mu} = 0,$$

em virtude de (34) e de $p \neq 0$, como desejávamos demonstrar.

## 3. *O número de graus de liberdade de um corpo rígido.*

Em Cinemática Clássica um corpo rígido tem, como é sabido, seis graus de liberdade. Não basta, portanto, dar o movimento de um dos seus pontos para ficar univocamente determinado o movimento de um corpo rígido.

---

([1]) Ver [3], p. 1660.

([2]) É indiferente recorrer às derivadas covariantes ou às derivadas parciais de $u_{\alpha}$, dadas as propriedades de anti-simetria do tensor $\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}$, igual a ± 1 conforme $\mu\alpha\beta\gamma$ é uma permutação par ou ímpar de 1,2,3,4.

([1]) Ver [1], p. 74. Em [3], p. 1662, a ortogonalidade entre estes dois vectores aparece como uma equação (51), quando se trata apenas de uma consequência da expressão (81) de $a^{\tau}$.

Ora, em Relatividade não é assim e, na Relatividade Restricta, sabe-se que (1) um *corpo rígido tem em geral três graus de liberdade e não seis.*

Para chegarmos a esse resultado vamos começar por reduzir $d\sigma^2$ que figura em (26")

$$ds^2 = d\sigma^2 + \frac{\left(g_{4\mu} dy^\mu\right)^2}{g_{44}},$$

à forma simplificada (2)

$$d\sigma^2 = dy^2 + \varphi\left(dy^2, dy^3\right), \tag{37}$$

na qual $\varphi$ só envolve as diferenciais $dy^2$ e $dy^3$ (embora os seus coeficientes dependam em geral, de $y^1$, $y^2$ e $y^3$).

Obtém-se a forma (37) adoptando para coordenada $y^1$ o comprimento do arco de geodésica a partir de um ponto fixo $P$ do espaço tri-dimensional das coordenadas $y^i$ e para coordenadas $y^2$ e $y^3$ quaisquer dois parâmetros que sirvam para fixar as geodésicas que passam (3) pelo ponto $P$.

Efectivamente as equações das geodésias do espaço tri-dimensional de métrica $d\sigma^2$

$$\frac{d^2 y^i}{d\sigma^2} + \begin{Bmatrix} j & k \\ & i & \end{Bmatrix} \frac{dy^j}{d\sigma}\frac{dy^k}{d\sigma} = 0, \tag{38}$$

só admitem as soluções

(39) $y^1 = \sigma$, $y^2 = \text{const.}^e$, $y^3 = \text{const.}^e$,

se

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & i & \end{Bmatrix} = 0. \tag{40}$$

*Mas* com

$$\begin{Bmatrix} j & k \\ & i & \end{Bmatrix} = \gamma_{ip} \begin{bmatrix} j & k \\ & p & \end{bmatrix} \tag{41}$$

e, por outro lado, o descriminante de $d\sigma^2$ é diferente de zero, vem, em particular,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & p & \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial \gamma_{1p}}{\partial y^1} - \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial y_p}\right) = 0. \tag{42}$$

Atendendo, porém, a que $y^1$ é precisamente o arco $\sigma$ das geodésicas ao longo das quais $y^2$ e $y^3$ são constantes, tem de ser

$$\gamma_{11} = 1, \tag{43}$$

portanto

$$\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial y^1} = \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial y^1} = 0. \tag{44}$$

Mas no ponto $P$, caracterizado por $y^1 = 0$,

$$d\sigma^2 = dy_1^2, \tag{45}$$

quere dizer

$$\gamma_{12} = \gamma_{13} = 0 \tag{46}$$

para $y^1 = 0$. Combinando este resultado (45) com (44) concluimos que

$$\gamma_{12} = \gamma_{13} = 0 \tag{47}$$

*em todo o espaço tridimensional*, como queríamos demonstrar.

Em consequência, para um corpo rígido podemos escrever (37) e, portanto,

$$ds^2 = dy^{1^2} + \varphi\left(dy^2, dy^3\right) + \frac{\left(g_{\mu 4} dy^\mu\right)^2}{g_{44}}, \tag{48}$$

não figurando a variável $y^4$ senão na última parcela.

Distingamos agora os dois casos: $U_{\mu\nu} = 0$, $U_{\mu\nu} \neq 0$.

A: $U_{\mu\nu} = 0$.

Neste caso sendo $a^\mu = 0$, como já demonstrámos, as linhas de universo dos pontos do corpo rígido, isto é, as linhas coordenadas $y^4$ admitem uma família a um parâmetro

$$f\left(y^1, y^2, y^3, y^4\right) = \lambda \tag{49}$$

---

(1) Ver [3].

(2) Suprimimos as plicas que figuravam em (26"). Quanto ao desenvolvimento de cálculo seguimos fundamentalmente [5].

(3) São as coordenadas normais de Gauss.

de hipersuperfícies ortogonais, bastando substituir a coordenada $y^4$ por $y'^4$ tal que

$$y'^4 = f(y^1, y^2, y^3, y^4) \tag{50}$$

para resultarem nulos (1) os coeficientes $g_{i4}$ de (48).

Podemos portanto admitir que

$$ds^2 = dy^{1^2} + \varphi(dy^2, dy^3) + g_{44} dy^{4^2} \tag{51}$$

Ora dada a forma (51) é imediato que as linhas coordenadas $y^1$ satisfazem às equações

$$\frac{d^2 y^\mu}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ & \mu \end{matrix} \right\} \frac{dy^\alpha}{ds} \frac{dy^\beta}{ds} = 0, \tag{52}$$

quer dizer, são geodésicas do universo. Por outro lado, são geodésicas ortogonais às novas linhas coordenadas $y^4$, donde se conclui que as hipersuperfícies (49) (ou $y^4 = \lambda$) ficam perfeitamente determinadas por uma só das linhas de universo de congruência (4). Cada uma dessas hipersuperfícies é o lugar das geodésicas ortogonais a essa linha num mesmo ponto — naquele em que a hipersuperfície intersecta a linha de universo em questão.

Se o universo é pseudo-euclideano, como sucede na Relatividade Restricta, então, aquelas hipersuperfícies coincidem com os hiperplanos ortogonais a uma linha $y^4$ (e portanto a todas).

Consequentemente, se $U_{\mu\nu} = 0$, o movimento fica inteiramente determinado quando se dá a linha de universo de um ponto do corpo, pois as linhas de universo dos outros pontos coincidem com as trajectórias das hipersuperficiais geodésicas ortogonais à linha de universo daquele ponto

B: $U_{\mu\nu} = - U_{\nu\mu} \neq 0$.

(1) Ver [1], p. 75.

Neste caso já não é válida a passagem de (48) para (51) por intermédio de (50), mas basta substituir $y^4$ por

$$y'^4 = f(y^1, y^2, y^3, y^4) \tag{53}$$

tal que

$$g_{11} + g_{44} \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0, \tag{54}$$

para (48) se reduzir a

$$ds^2 = dy^{1^2} + \varphi(dy^2, dy^3) - (Bdy^2 + + Cdy^3 + Ddy^4)^2. \tag{55}$$

E atendendo a (55) e a (52) imediatamente se conclue que as linhas coordenadas $y^1$ são geodésicas de $ds^2$ e ortogonais às novas linhas coordenadas $y^4$, isto é, às linhas de universo dos diferentes pontos do corpo rígido.

Ora, se $ds^2$ é pseudo-euclideana pode demonstrar-se que os coeficientes $B$, $C$ e $D$ não dependem de $y^4$.

Se determinarmos $f$ pela condição de coincidir com $y^4$ para $y^1 = 0$ e se atendermos a que ao longo das linhas coordenadas $y^1$ se tem precisamente $ds^2 = dy^{1^2}$, é evidente que as geodésicas em causa (linhas coordenadas $y^1$) têm as equações paramétricas

$$x^\mu = x_0^\mu(y^4) + y^1 x_1^\mu(y^2, y^3, y^4), \tag{56}$$

designando por

$$x^\mu = x_0^\mu(y^4) \tag{57}$$

as equações paramétricas da linha de universo $C_0$ (parâmetros primitivos correspondentes ao ponto $P$).

E as fórmulas (56) permitem-nos passar das coordenadas cartesianas $x^\mu$ para as coordenadas $y^i$, $y^4$ que garantem a forma (55) de $ds^2$.

Identificando então (55) com

$$ds^2 = dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2} - dx^{4^2} \tag{58}$$

por intermédio de (56) e não esquecendo a ortogonalidade entre $C_0$ e as rectas (56), que nos dá

$$x_1^\mu \frac{\partial x_0^\mu}{\partial y^4} = 0 \tag{59}$$

donde, por derivação,

$$\frac{\partial x_1^\mu}{\partial y^2}\frac{\partial x_0^\mu}{\partial y^4} = \frac{\partial x_1^\mu}{\partial y^3}\frac{\partial x_0^\mu}{\partial y^4} \tag{60}$$

obtém-se finalmente,

$$\begin{aligned} \varphi(dy^2, dy^3) + (Bdy^2 + Cdy^3)^2 &= \\ = y_1^2 \int \left( \frac{\partial x_1^\mu}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial x_1^\mu}{\partial y^2} dy^3 \right)^2 &= \\ = y_1^2 \psi(\partial y_1^2 dy^3), \end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned} -BD &= y_1^2 \int \frac{\partial x_1^\mu}{\partial y^2}\frac{\partial x_1^\mu}{\partial y^4} = y_1^2 \beta \\ -CD &= y_1^2 \int \frac{\partial x_1^\mu}{\partial y^3}\frac{\partial x_1^\mu}{\partial y^4} = y_1^2 \gamma \\ -D^2 &= y_1^2 \int \left( \frac{\partial x_0^\mu}{\partial y^4} + y^1 \frac{\partial x_1^\mu}{\partial y^4} \right)^2, \end{aligned} \tag{62}$$

designando por $\int (b^\mu)^2$ a soma

$$b^{1^2} + b^{2^2} + b^{3^2} - b^{4^2}. \tag{63}$$

Nas fórmulas (61) e (62) tanto os coeficientes de $\psi$ como $\beta$ e $\gamma$ não dependem de $y^1$.

Fazendo agora $y^1 = 0$ em (63) deduz-se

$$(D)_0 = 1, \quad \left( \frac{B}{y^{1^2}} \right)_0 = \beta, \quad \left( \frac{C}{y^{1^2}} \right)_0 = \gamma \tag{64}$$

e depois

$$\left( \frac{B}{y^1} \right)_0 = \left( \frac{C}{y^1} \right)_0 = 0, \tag{65}$$

donde, por (61),

$$\left( \frac{\varphi}{y^{1^2}} \right)_0 = \psi. \tag{66}$$

Associando estes resultados a (61), vem

$$(Bdy^2 + Cdy^3)^2 = \varphi(dy^2 dy^3) - y_1^2 \left( \frac{\varphi}{y_1^2} \right)_0, \tag{67}$$

Ora como os coeficientes de $\varphi$ não dependem de $y^4$ o mesmo sucede a $B$ e $C$, por força de (67), e ainda a $\beta$ e $\gamma$, por força de (64). E portanto a $D$, como consequência de (62).

Os três coeficientes $B$, $C$, $D$ são independentes [1] de $y^4$.

Sendo assim o grupo (a um parâmetro) de transformações

$$z^1 = y^1,\ z^2 = y^2,\ z^3 = y^3,\ z^4 = y^4 + h, \tag{68}$$

deixa invariante a forma fundamental, quere dizer, é um grupo de movimentos do universo pseudo-euclideano.

E, por outro lado, conservando os parâmetros $y^i$ transforma em si mesmas as linhas de universo dos diferentes pontos do corpo rígido.

Em resumo: na *Relatividade Restricta as linhas de universo de um corpo rígido ou são as trajectórias ortogonais de uma família de hiperplanos (normais a qualquer delas) ou as trajectórias de um grupo a um parâmetro de movimentos de um espaço pseudo-euclideano.*

Portanto, dado o movimento de um ponto, quere dizer, conhecida a linha de universo $C_0$ de um dos seus pontos, há sempre um movimento possível — aquele precisamente em que as linhas de universo dos outros pontos são as trajectórias ortogonais à família a um parâmetro das hipersuperfícies geodésicas ortogonais à linha $C_0$. E isto tanto em Relatividade Restricta como em Relatividade Geral.

---

[1] A não ser que $B$ e $C$ se anulem, mas então caímos na hipótese $U_{\mu\nu} = 0$.

Mas se considerarmos apenas a Relatividade Restricta poderá haver outras soluções — caso a linha dada $C_0$ admitir como grupos de invariância algum ou alguns grupos a um parâmetro de movimentos do espaço pseudo-euclideano.

Mas para isso a linha $C_0$ tem de satisfazer a certas condições geométricas (1).

As linhas de universo dos diferentes pontos do corpo coincidem com as trajectórias daqueles possíveis grupos de movimentos (2).

(1) Ver G. Herglotz, [3], p. 403.

(2) Como os grupos de movimento conservam $ds^2$ e, por outro lado, as suas trajectórias são transformadas em si mesmas, a distância $d\sigma$ de duas delas infinitamente próximas não depende de $\theta$, quere dizer, é constante ao longo dessas linhas. Essas linhas satisfazem, pois, à condição de rigidez e portanto representam um movimento possível. E a condição necessária e suficiente para que um movimento rígido satisfaça a uma tal condição é que o vector-aceleração $u_\alpha = u_{\alpha;\beta}\, u^\beta$ seja um gradiente (ver [3], p. 1662).

Assim, em Relatividade Restricta, um corpo rígido tem em geral três graus de liberdade e não seis como em Cinemática Clássica.

*E se* $U_{\mu\nu} = 0$ *o número de graus de liberdade é exactamente três, quer na Relatividade Restricta quer na Relatividade Geral.*

RUY LUIS GOMES

BIBLIOGRAFIA

[1]— RUY LUIZ GOMES, *A Teoria da Relatividade,* Ed. Monsanto, Lisboa, 1954.

[2]— — *Gazeta de Matemática,* N.os 57 e 58, 1954.

[3]— G. SALZMAN and A. H. TAUB, *Born-Type Rigid Motion in Relativity,* Physical Review, vol. 95, N.er 6, Sept. 1954, p. 1659-1669.

[4]— MAX BORN, *Annalen der Physik,* **30**,1,1909.

[5]— G. HERGLOTZ, *Über den von Standpunkt des Relativitätsprinzips aus als «starr» zu bezeichnenden Körper,* Annalen der Physik, 31, 393--415,1909.

[6]— A. LICHNEROWICZ, *Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnétisme,* Ed. Masson, Paris, 1955.

# Dr. Rui Gustavo Couceiro da Costa

Nos últimos trinta ou quarenta anos, esteve a direcção do Laboratório Químico da Universidade de Coimbra a cargo duma série de professores notáveis pela sua dedicação ao ensino e pelo esforço que desenvolveram no sentido de melhorarem a preparação dos estudantes e de aperfeiçoarem a formação dos seus colaboradores. Na obra assim realizada, avulta a contribuição do Dr. Rui Gustavo Couceiro da Costa prematuramente falecido — tinha apenas 54 anos de idade — em Dezembro passado.

Nomeado assistente em 1920, quando era ainda aluno da Universidade, doutorou-se em 1928, e fez o concurso para professor catedrático em 1936. Em 1937, assumiu a direcção, do Laboratório Químico.

Foi a partir de então que revelou todo o dinamismo da sua forte personalidade, indiferente a convenções ou a normas cómodas de bom comportamento.

Uma destas normas, de origem obscura, estabelecia que os directores dos estabelecimentos que partilham a dotação da Faculdade de Ciências, não deveriam, nos seus projectos de orçamento, pedir muito mais que a dotação usual. Logo que, depois da guerra, a situação económica do País começou a estabilizar-se, o Dr. Couceiro da Costa, revelando um conhecimento perfeito da enorme distância que separava aquilo que, no seu Laboratório, era possível fazer-se, de tudo o que se deveria fazer, passou a apresentar, nos projectos que elaborava, corajosas afirmações da triste realidade. Mas não se limitou a essas afirmações: com a perseverança de que só ele era capaz, realizou todas as diligências ao seu alcance para que fossem concedidos os substanciais aumentos de dotação que propusera. Foi ouvido o seu apelo. E dentre os inúmeros benefícios resultantes da maneira inteligente como se aplicaram os subsídios assim obtidos, citarei apenas a magnífica