PONTOS DE EXAME

EXAMES UNIVERSITÁRIOS (FÍSICA)

Universidade de Lisboa — Faculdade de Ciências — Curso Geral de Física. 2.º Exame de frequência — 1955. — Ponto n.º 1.

I

361 — Medição do coeficiente médio de dilatação de um líquido.

362 — Prove a equivalência entre os enunciados de Kelvin e de Clausius, do 2.º princípio.

363 — Livre percurso médio das moléculas de um gás.

II

364 — Ondas planas: propagação da energia.

365 — Composição de vibrações circulares de sentidos opostos.

366 — Teoria das ondas estacionárias.

III

367 — Demonstre o teorema de Gauss.

368 — Teoria do electrómetro de pratos planos horizontais.

369 — Lei de Ohm da corrente alternada.

Ponto n.º 2

370 — Cálculo da energia mecânica recebida por um gás perfeito numa transformação adiabática.

371 — Estabeleça as igualdades de Clausius.

372 — Termodinâmica do escoamento dos fluidos.

II

373 — Representação de Fresnel e sua aplicação num caso particular.

374 — Estudo do movimento oscilatório amortecido.

375 — Tubo de Kundt e suas aplicações.

III

376 — Demonstre o teorema de Coulomb.

377 — Lei de Ohm da corrente contínua.

378 — Fundamento da medição de resistências pelo processo da perda de carga.

F. C. L. — Termodinâmica — Ex., de freq. 1954-55

379 — *a*) Segundo princípio da Termodinâmica. Expressão geral dos calores específicos.

380 — *b*) Calcular a diferença dos calores específicos com pressão constante e com volume constante, para o cobre a 20,0 ° C. Valores a empregar: do coeficiente de dilatação isobárica do cobre, $d = 48{,}9 \times 10^{-6} \times {}^\circ C^{-1}$; do coeficiente de compressibilidade isotérmica do cobre, $\chi = 0{,}78 \times 10^{-6}\ atm^{-1}$; da densidade do cobre, $\rho = 8{,}95\ g/cm^3$.

R: *A diferença pedida de calores específicos calcula-se pela fórmula* $C_p - C_v = T\alpha^2/\rho\chi$, *em que as letras têm os significados que indica o enunciado. Substituindo valores, resulta imediatamente* $C_p - C_v = 293{,}2 \times (48{,}9 \times 10^{-6})^2 / 8{,}95 \times 0{,}78 \times 10^{-6} \times (1013 \times 10^3)^{-1} = 1{,}02 \times 10^5\ erg/g \times {}^\circ C = 0{,}244 \times 10^{-2}\ cal/g \times {}^\circ C$.

F. C. L. — Mecânica Física — Ex. final 1954-55

381 — *a*) Coeficiente de viscosidade. Estabelecimento da fórmula de Poiseuille, $Q = \pi PR^4/8\eta l$.

382 — De um suporte fixo, suspende-se por um fio um corpo de massa $m = 4{,}0$ kg. Características do fio; comprimento, $l = 10$ m; secção recta, $s = 0{,}10\ mm^2$; módulo de Young, $E = 20 \times 10^3\ kp/mm^2$. *b*) Determinar o alongamento Δl do fio. *c*) Demonstrar que a equação do movimento do corpo suspenso, quando abandonado a si próprio depois de um pequeno deslocamento longitudinal z_0, é $d^2z/dt^2 = -(sE/lm)z$. Calcular o período T das oscilações.

R: *b*) *Da expressão da lei de Hooke,* $\Delta l/l = f/Es$, *resulta imediatamente, supondo que a situação a que se refere o enunciado tem lugar no campo gravítico normal,* $\Delta l = 10 \times 4{,}0\ (20 \times 10^3 \times 0{,}10) = 0{,}020$ m. *c*) *Tome-se, como eixo* Oz, *a vertical descendente que passa pelo fio, com origem* O *na posição de equilíbrio do corpo suspenso — posição à distância* $(l + \Delta l)$ *do extremo fixo do fio, na qual o corpo é actuado pelas forças verticais* mg *e* $-(\Delta l/l)sE$, *inversamente iguais. Quando a posição instantânea do corpo é definida pela coordenada positiva* z, *a resultante (ascendente) das forças aplicadas vale* $mg - [(\Delta l + z)/l]sE = -(sE/l)z$; *logo, a equação newtoniana do movimento do corpo escreve-se* $m\ddot{z} = -(sE/l)z$ *ou* $dz^2/dt^2 = -(sE/lm)z$: *trata-se, como é bem conhecido e pode ser verificado por integração da equação diferencial estabelecida, de um movi-*

mento oscilatório simples de período $T = 2\pi\sqrt{lm/sE}$. *A introdução dos valores numéricos dados (*E *em* N/mm^2*) conduz a*

$$T = 2\times 3{,}14\times\sqrt{10\times 4{,}0/(20\times 10^3\times 9{,}8)\times 0{,}10} = 0{,}28\,s.$$

(Resoluções de Arnaldo Silvério)

Universidade do Porto — Faculdade de Ciências — Física Geral — 1.º Exame de frequência — Fevereiro de 1955.

383 — Uma massa de 8 g executa um movimento oscilatório ao longo do eixo dos *x*, sujeita a uma força retardadora de 0,1 *N/cm.* Supondo o movimento não amortecido, qual é a frequência de oscilação?

R: *A equação do movimento é*

$d^2x/dt^2 + Kx/m = 0$ *ou* $x = A\cos(\omega t + \alpha)$ *em que* $\omega = \sqrt{K/m}$; $K = 0{,}1$ N/cm e $m = 8$ g.

A frequência será:

$$f^2 = \frac{1}{4\pi^2}\times\frac{0{,}1}{8}\frac{N}{cm}\cdot\frac{1}{g} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{0{,}1}{8}10^5\frac{dines}{cm\cdot g};$$

donde: $$f = \frac{10^2}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{8}}\ \text{Hertz}$$

384 — O descarregador de cheias duma barragem de forma rectangular tem 10 m de comprimento e 3 m de altura. Gira em torno do lado horizontal inferior e está seguro por dois tirantes de aço nas extremidades do lado horizontal superior. Qual deve ser a secção mínima desses tirantes para que o descarregador suporte as forças de pressão da água?

$$\tau_{máx} = 15\ kg/mm^2$$

R: *O momento das forças de pressão da água relativamente ao lado horizontal inferior é:* $C = \int_0^H df(H-h)$ *considerando as alturas contadas a partir da superfície livre do líquido, ou:* $C = \int_0^H L\rho gh(H-h)dh = L\rho gH^3 : 6$.

O momento das forças tensoras dos tirantes é $C_1 = 2HF$ *sendo* F *a força tensora num tirante.*

Como deverá ser $C = C_1$ *vem:* $L\rho gH^3{:}6 = 2HF$; *donde* $F = L\rho gH^2{:}12$.

Como $\rho = 10^3\ kg/m^3$ *e* $g = 9{,}8\ m/s^2$, *vem:* $F = 10\cdot 9\cdot 10^3\cdot 9{,}8$ N:12. *A secção mínima deverá ser:* $S = F{:}\rho$, *o que, para* $\tau = 15\ kg/mm^2$ *dá:* $S = 5\ cm^2$.

385 — Mostrar que, se P_1 e P_2 são as amplitudes de pressão de duas ondas sonoras, a diferença entre os níveis de intensidade dos sons é

$$\beta_2 - \beta_1 = 20\log(P_2 : P_1)$$

R: *A intensidade dum som está relacionada com a pressão sonora pela expressão* $I = c(P_{ef}^2 : \varepsilon)$ *em que* c *é a velocidade do som no meio de módulo de elasticidade* ε. *Donde* $I = c(P^2 : 2\varepsilon)$, *em que* P *é a amplitude da onda de pressão; portanto* $I_2 : I_1 = P_2^2 : P_1^2$. *O de intensidade f define-se, relativamente à intensidade de referência* I_0 *por:* $\beta = 10\log(I : I_0)$ *e* $\beta_2 - \beta_1 = 10\log(P_2^2 : P_1^2) = 20\log(P_2 : P_1)$.

(Resoluções de Frederico de Carvalho, estudante da F. C. P.)

Universidade de Coimbra — Faculdade de Ciências — Física Geral — 1.º exame de frequência — Março de 1955.

I

386 — Um ponto material de peso *P* está apoiado, com atrito, no interior dum aro circular, vertical, numa posição *A* tal que o raio tirado por *A* forma com a vertical um ângulo de 30°. Consegue-se o equilíbrio com uma força horizontal, complanar com o aro e dirigida para fora, cuja intensidade mínima é P/2. Determinar o coeficiente de atrito.

387 — Um projectil é lançado, para cima, com velocidade inicial, v_0, que faz com o plano horizontal 30°. Provar que a sua velocidade, acima do nível do ponto de lançamento, varia entre v_0 e $\frac{\sqrt{3}}{2}v_0$

388 — Dois espelhos esféricos, um côncavo e outro convexo, ambos com raios de curvatura de 20 cm, são colocados, frente a frente, à distância de 25 cm, centrados no mesmo eixo Para um objecto a 15 cm do espelho côncavo, determinar a posição, natureza e amplificação linear da imagem formada por duas reflexões, a primeira no espelho côncavo e a outra no convexo.

II

389 — Um ponto material de peso *P*, sob a acção de duas forças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, , constantes. tem aceleração igual a g/3, vertical e dirigida para cima. Suprimindo $\vec{F_1}$ o ponto passa a ter aceleração horizontal igual a $\frac{g}{\sqrt{3}}$. Dado *P*, determinar $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$.

390 — Mostrar que, se o índice de refracção duma esfera for inferior a 2, não se pode formar no infinito a imagem, por refracção, de qualquer bolha no interior.

Se uma bolha estiver a 8/2 do centro, determinar a distância das imagens obtidas, por refracção, para $n = \frac{4}{3}$.

III

391 — Sobre um ponto material actuam constantemente duas forças, uma horizontal e outra vertical, que têm a mesma intensidade, *F*. Provar que, quando a velocidade for horizontal, o seu valor é a diferença dos valores algébricos das projecções da velocidade inicial segundo as direcções duma e doutra força. Deduzir a expressão da velocidade em qualquer ponto *P* da trajectória, em função de *F*, da massa *m* do móvel, do valor v_0 da sua velocidade inicial, e das coordenadas *x*, *y*, de *P*, em relação a eixos com a direcção das forças e com origem no ponto de partida.

Universidade de Coimbra — Faculdade de Ciências — Física Geral — 1.º exame de frequência — Chamada justificada — Março de 1955.

I

392 — Determinar a resultante de dois vectores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$, sabendo que a sua projecção da resultante sobre uma delas vale 4 e que $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$, e $|\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}| = 12$.

393 — Sobre um ponto móvel de peso *P*, actua uma força horizontal ele intensidade igual a *P*. Sabendo que o móvel parte com velocidade inicial v_0, com direcção da resultante, determinar a posição e o tempo ao fim do qual o móvel muda de sentido.

394 — Espalhou-se sobre uma lamela de vidro horizontal certa solução que numas regiões forma uma camada de faces paralelas, noutras gotas esféricas, tudo com uma espessura de 3 mm. Um observador olhando na direcção da vertical vê as impurezas da superfície do vidro colocadas no eixo vertical das gotas a 0,5 mm acima da superfície do vidro, ao passo que na camada vê esses impurezas a 1 mm acima dessa superfície. Determinar o índice de refracção da solução e o raio de curvatura das gotas.

II

395 — Um pêndulo simples de comprimento 1 m e massa 1000 g é afastado para a posição que faz 60° com a vertical e abandonado sem velocidade inicial. Verifica-se que o fio parte assim que ultrapassa a posição que faz 30° com a vertical. Determinar a tensão máxima que o fio pode suportar.

396 — Uma lente ideal convergente de distância focal 40 cm encontra-se sobre o mesmo eixo e à distância de 40 cm da face esférica duma lente plano-convexa de espessura 3 cm, de raio de curvatura 5 cm e cuja face plana é espelhada. No interior desta lente encontra-se uma bolha de ar a 0,5 cm da face plana. Determinar a distância entre as duas imagens que podem ser vistas por um observador colocado em frente da lente convergente.

III

397 — Lança-se um ponto material de peso *P* da base dum plano de inclinação α tal que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$, com velocidade inicial 19,6 m/s, dirigida para cima segundo a linha de maior declive. A força de atrito é P/5.

No mesmo instante lança-se do mesmo ponto um projectil com velocidade inicial v_0' que faz 30° com v_0. Determinar v_0' de tal modo que o projectil intercepte o ponto material quando este atinge a altura máxima no plano inclinado.

Universidade de Coimbra — Faculdade de Ciências — 1.º Exame de frequência. Março de 1955 — Electricidade.

398 — Determinar o factor de redução da bússola, considerando-a como bússola das tangentes, ou como

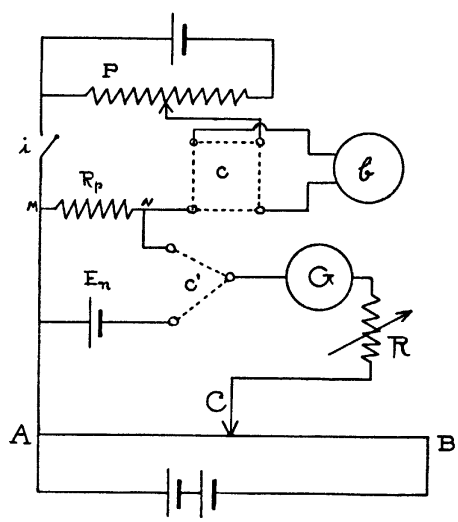


Fig. 1 — Esquema das ligações

P — *potenciómetro*
i — *interruptor*
c, c' — *comutadores*
b — *bússola*
E_n — *elemento normal*
G — *galvanómetro*
R_p — *resistência padrão*
R — *resistência de protecção a* G
C — *cursor*
AB — *reocórdio*

bússola dos senos, e medindo a intensidade da corrente por compensação. Fazer a determinação para valores da intensidade da corrente que correspondam a desvios intervalados de 10°, aproximadamente, e, para cada valor fazer a inversão da corrente na bússola.

Apresentar os resultados sob forma gráfica e basear as conclusões neste gráfico. No relatório, prestar particular atenção à teoria da bússola, discutindo a influência da forma da bobine e as dimensões do magnete; do processo de compensação empregado para a determinação da intensidade da corrente fazer apenas o esquema.

Discutir a possibilidade de utilizar a bússola para a determinação da componente horizontal do campo magnético terrestre.

R: *Consideremos a bússola das tangentes. O fiel é levado inicialmente ao zero da escala dos ângulos sem que a bússola seja atravessada por alguma corrente. Sobre o iman actua apenas o campo magnético terrestre, cuja componente horizontal* $\vec{H}$ *terá a direcção do iman em equilíbrio, portanto a direcção normal ao fiel. Quando a bússola fôr atravessada por uma corrente* I *a bobine cria um campo magnético* $\vec{B}(P)$, *função do ponto do espaço e proporcional a* I, *cuja expressão é dada pela lei de Biot e Savart.*

$$\vec{B} = \mu_0 I \oint \vec{t} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} dl$$

$\vec{B}$ *será perpendicular ao plano de simetria da bobine (Fig. 2) nos pontos desse plano.*

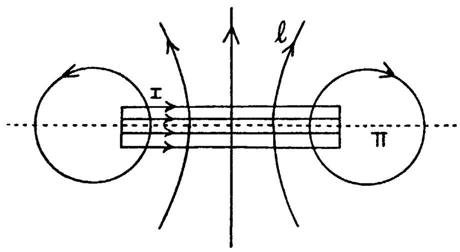


Fig. 2

I — *linhas de força do vector* $\vec{B}$
π — *plano longitudinal de simetria da bobine*

Quando a bobine está a ser atravessada pela corrente I *a agulha roda até tomar a direcção da resultante de* $\vec{B}$ *com* π_t, *sendo o ângulo de rotação a indicado pelo fiel na escala dos ângulos O campo magnético* B *que actua na agulha poderá supor-se simplesmente proporcional a* I *se a agulha for suficientemente pequena para que se possa supor que quando roda os seus polos não mudam sensìvelmente de posição:*

$$B = KI \quad (1).$$

Baseados nestas considerações poderemos desenhar a Fig. 3. H_t *é norma, a* B, *porque sendo este normal a π é normal à direcção inicial da agulha, por o fiel apontar para o zero.*

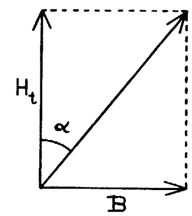


Fig. 3

Da Fig. 3:

$$B = H_t \operatorname{tg} \alpha \quad (2)$$

e devido a (1)

$$I = k \operatorname{tg} \alpha \quad (3)$$

em que

$$k = \frac{H_t}{K}$$

Resoluções de João da Providência e Costa
Assistente de Electricidade

Universidade de Coimbra — Faculdade de Ciências — Física Geral — Exame final — 2.ª chamada — 9 de Outubro de 1954.

1.° Tratar das questões apresentadas em três das seguintes alíneas:

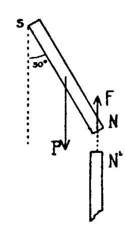
399 — Enunciar a condição de equilíbrio duma partícula assente com atrito numa superfície, entrando em consideração com o coeficiente, o ângulo e o cone de atrito.

400 — Um íman de comprimento 20 cm e de massa 10 g (homogéneo no que respeita à massa) é móvel em torno do polo sul. Determinar o seu momento magnético sabendo que o íman, em equilíbrio, faz um ângulo de 30° com a vertical quando sujeito à acção dum polo norte de 1000 unidades electromagnéticas *C. G. S.* situado na vertical do seu polo norte e a 2 cm deste.

R: $F = \frac{p \times p'}{d^2} = \frac{p \times 1000}{4} =$

$250\,p = 250 \times \frac{M}{20} = \frac{25}{2} M$ dines

$M = p \times l = 20p$



O íman fica sujeito às forças $\vec{P}$ *e* $\vec{F}$ *e para que esteja em equilíbrio é necessário que o momento resultante em relação ao ponto* S *seja nulo.*

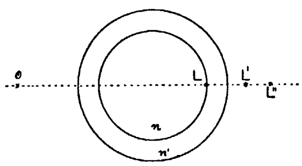
$$F \times 1 \times \operatorname{sen} 30° = P \times \frac{1}{2} \times \operatorname{sen} 30°$$

$$\frac{25}{2} M \times 20 = 9800 \times 10$$

donde

M = 392 *unidades electromagneticas* C. G. S.

401 — Uma esfera oca de vidro tem uma marca *L* na superfície interior e está cheia de água. Determinar a posição da imagem de *L* vista por um observador colocado sobre o diâmetro que passa por *L*, em *O*. índice de refracção da água: 4/3. Índice de refracção do vidro: 3/2. Espessura do vidro: 1 cm, e raio exterior: 6 cm.



R: *Imagem* L" *de* L *dada pelo dioptro água-vidro:*

$$\frac{n}{p_1} + \frac{n'}{p_1'} = \frac{n' - n}{r_1}$$

$$\frac{\frac{4}{3}}{10} + \frac{\frac{3}{2}}{p_1'} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{4}{3}}{-5} \quad \textit{donde} \quad p_1' = -9$$

Imagem de L" *dada pelo dioptro vidro-ar:*

$$\frac{n'}{p_2} + \frac{1}{p_2'} = \frac{1 - n'}{r_2} \quad \textit{em que} \quad p_2 = 10$$

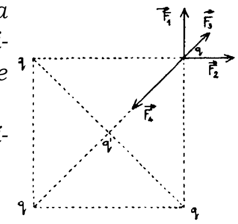
$$\frac{\frac{3}{2}}{10} + \frac{1}{p_2'} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{-6} \quad \textit{donde} \quad p_2' = -15$$

O observador vê uma imagem virtual, L', *a 15 cm da face da esfera voltada para ele.*

402 — Definir amplificação da observação e amplificação instrumental dum óculo e mostrar que esta é igual à relação das distâncias focais da objectiva e da ocular.

2.º — Tratar das questões apresentadas em duas das seguintes alíneas:

403 — Sobre os vértices dum quadrado estão colocadas quatro cargas pontuais iguais, uma em cada vértice, com o valor *q* unidades. Determinar o valor *q'* da carga pontual que, colocada no centro do quadrado, equilibra as quatro cargas.



R: *A carga* q *fica sujeita às forças* $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ e $\vec{F_3}$ *exercidas pelas outras cargas* q, *e* $\vec{F_4}$ *exercida pela carga* q'.

Para que esteja em equilíbrio é necessário que

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = 0$$

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{k} \frac{q^2}{a^2}$$

designando por a *o lado do quadrado;*

$$F_3 = \frac{1}{k} \frac{q^2}{2a^2}$$

A resultante de $\vec{F_1}$, *com* $\vec{F_2}$ *é um vector com a direcção e sentido de* $\vec{F_3}$ *e de móduto:*

$$\left|\vec{F_1} + \vec{F_2}\right| = F_1\sqrt{2} = \frac{1}{k} \frac{q^2}{a^2} \sqrt{2}$$

Somando esta resultante com $\vec{F_3}$, *vem:*

$$\left|\vec{F_1} + \vec{F_2} + +\vec{F_3}\right| = \frac{1}{k} \frac{q^2}{a^2} \sqrt{2} + \frac{1}{k} \frac{q^2}{2a^2} =$$

$$= \frac{1}{k} \frac{q^2}{a^2} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$\vec{F_4}$ *terá de ser, em valor absoluto, igual à resultante das três forças anteriores:*

$$F_4 = \frac{1}{k} \frac{|q'|q}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{k} \frac{4q|q'|}{2a^2}$$

$$\frac{1}{k} \frac{4q|q'|}{2a^2} = \frac{1}{k} \frac{q^2}{a^2} \left(\sqrt{2} + 1\right)$$

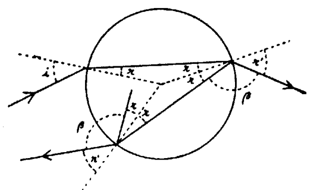
donde $\qquad q' = -q \dfrac{2\sqrt{2} + 1}{4}$

404 — Considerado um magnete como uma distribuição espacial de momento magnético, provar que o sistema de forças a que fica sujeito por acção dum campo magnético uniforme é equivalente ao que este campo exerce sobre um dipolo.

405 — Considerando um raio que incide na superfície duma esfera transparente, provar que o raio refracto não pode sofrer reflexão total e que considerando o ângulo que formam entre si o raio reflectido e o emergente correspondentes ao raio no interior da esfera, este ângulo se mantém sempre com o mesmo valor depois dum número qualquer de reflexões.

R: *Considerando o raio que incide segundo o ângulo* i, *refracta-se segundo o ângulo* r, *menor, dado por:*

$$\text{sen i} = \text{n sen r}$$



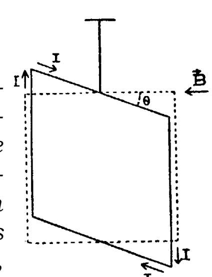
o ângulo de incidência do raio refracto na outra face da esfera vê-se, pela figura, que é igual a r *e, portanto, é sempre inferior ao ângulo limite; logo, o raio refracto não pode sofrer reflexão total ao chegar à segunda face.*

Vem para a segunda refracção: $\text{sen r} = \frac{1}{n}\text{sen r}'$ *donde* $r' = i$ *e o ângulo formado pelo raio emergente com o raio reflectido e:* $\beta = 180 - i - r$ *que é independente do número de reflexões do raio interior porque este continua sempre a incidir segundo o ângulo* r, *a refractar-se segundo o ângulo* i *e a reflectir-se segundo o ângulo* r.

406 — 3.º — Um circuito quadrado de lado *a*, que está suspenso por um fio fixado a meio dum lado, fica sujeito a um campo magnético $\vec{B}$ uniforme, de intensidade $\vec{B} = k_1 I$ em que *I* é a intensidade da corrente que atravessa o próprio circuito. A direcção de $\vec{B}$ é a da horizontal paralela ao plano do circuito antes de passar corrente. Sob a acção do campo $\vec{B}$ e das forças de torção, o quadrado vem a ficar, em equilíbrio, com o desvio θ. Dados os valores θ_1 e θ_2, de θ, correspondentes a correntes I_1 e I_2, determinar a relação $I_1 : I_2$.

R: *A força que o campo magnético* $\vec{B}$ *exerce sobre o elemento* ds *do circuito é dada pela lei de Laplace:*

$$d\vec{F} = I\vec{t} \wedge \vec{B}\,ds$$



em que $\vec{t}$ *é um vector unitário tangente ao elemento* ds *e com o sentido da corrente. Desta fórmula se conclui imediatamente que a resultante das forças que se exercem sobre cada um dos lados horizontais do quadrado é vertical e, portanto, não interessa para o movimento por ser paralela ao eixo de rotação.*

Para os lados verticais, a resultante das forças que se exerce em cada um dos lados é horizontal, paralela e de sentido contrário à que se exerce no outro lado. O circuito fica, portanto, sujeito a um binário.

Cálculo da intensidade da força que se exerce em cada lado:

$$d\vec{F} = I\vec{t} \wedge \vec{B}\,ds$$

Todas as forças elementares $d\vec{F}$ *têm a mesma direcção e sentido, e como* $\vec{t}$ *é perpendicular a* $\vec{B}$ *vem:*

$$dF = IB\,ds \qquad F = \int_0^a IB\,ds = IBa$$

Cálculo do momento do binário:

$$M_b = F\cos\theta \times a$$

visto que $\vec{F}$ *faz um ângulo* θ *com a perpendicular ao lado do quadrado.*

$$M_b = a^2 IB\cos\theta$$

Há equilíbrio quando o momento deste binário for igual, em valor absoluto, ao momento do binário das forças de torção:

$$c\theta = a^2 IB\cos\theta$$

O momento do binário de torção é proporcional ao ângulo de torção, donde:

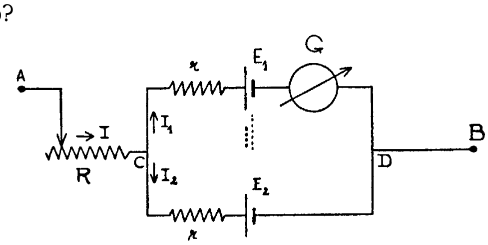
$$\frac{c\theta_1}{c\theta_2} = \frac{a^2 I_1 \times k_1 I_1 \times \cos\theta_1}{a^2 I_2 \times k_1 I_2 \times \cos\theta_2}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \sqrt{\frac{\theta_1}{\theta_2} \times \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}}$$

407 — 4.º — Entre os pontos *A* e *B* do circuito representado na figura aplica-se uma diferença de potencial constante igual a 100v. *R* é uma resistência variável; as resistências dos ramos CE_1D e CE_2D têm ambas o valor *r* = 2 *ohms*, e e_1 = 10v e e_2 = 4v são as *f e. m* dos respectivos geradores.

a) Determinar o valor da resistência *R* para o qual não passa corrente no galvanómetro.

b) Determinar o valor da resistência *R* para o qual a diferença de potencial entre os pontos *C* e *D* passa a ser nula devido à inversão dos polos do gerador E_1. Qual o valor da intensidade da corrente que, nestas circunstâncias, atravessa o galvanómetro?



a) $V_A - V_B = 100 = RI + e_1$

$$RI = 90 \therefore I = \frac{90}{R}$$

$$V_A - V_B = RI + rI + e_2 = 100$$

$$RI + 2I + 4 = 100$$

$$90 + 2 \times \frac{90}{R} 96$$

donde $R = 30\ \Omega$

b) $RI = 100 \therefore I = \frac{100}{R}$

$$I = I_1 + I_2$$

$$rI_1 - e_1 = 0 \text{ ou } 2I_1 - 10 = 0 \text{ ou } I_1 = 5$$

$$rI_2 + e_2 = 0 \text{ ou } 2I_2 + 4 = 0 \text{ ou } I_2 = -2$$

$$\frac{100}{R} = 5 - 2$$

Portanto

$$R = \frac{100}{3}\ \Omega$$

Resoluções de M. Amália Freitas Tavares
Assistente de Física

Certificado de Electrónica e Radioactividade Instituto de Rádio — Sorbonne — Paris — Junho de 1953.

2.ª Prova escrita — duração 3 horas

I — *Radioactividade:*

408 — Questão de desenvolvimento: Niveis nucleares. Estudos físicos conduzindo à sua determinação.

R: *Consultar qualquer livro-texto recente sobre Física Nuclear. Por exemplo: «Introductory Nuclear Physics» de David Halliday ou para maior desenvolvimento, «Excited States of Nuclei» de S. Devons e «Theoretical Nuclear Physics» de Blatt e Weisskopf.*

II — *Problema:*

409 — Calcular a massa, expressa em gramas, do polonio existente em uma tonelada de minério contendo 50% de urânio.

R: *O polónio encontra-se no minério de urânio no estado de equilíbrio radioactivo com o urânio devido ao facto de que o período do urânio é muito superior ao de qualquer dos seus descendentes. Uma vez que a quantidade de* AcU *e de* UII *presente no minério é muito pequena pode admitir-se que todo o urânio se encontra sob a forma de* ^{238}U. *Nesta hipótese, ter-se-á:*

$$\lambda_U N_U = \lambda_{Po} N_{Po} \quad \rightarrow \quad \frac{N_{Po}}{N_U} = \frac{\lambda_U}{\lambda_{Po}} = \frac{T_{Po}}{T_U}$$

Por outro lado virá

$$\frac{m_{Po}}{m_U} = \frac{A_{Po}}{A_U} \times \frac{N_{Po}}{N_U} = \frac{A_{Po} T_{Po}}{A_U T_U} \therefore m_{Po} = \frac{A_{Po}}{A_U} \times \frac{T_{Po}}{T_U} m_U$$

$$m_{Po} = \frac{210}{238} \times \frac{140}{4{,}5 \times 10^9 \times 365{,}25} \times 5 \times 10^5 =$$

$$= \frac{1{,}47 \times 10^{10}}{3{,}91 \times 10^{14}} = 0{,}376 \times 10^{-4} \text{ g } \textit{de} \text{ Po.}$$

visto que $T_{Po} = 140$ *dias*; $T_{^{238}U} = 4{,}5 \times 10^5$ *anos*;

$$A_{Po} = 210\ ;\ A_U = 238 \ \textit{e}\ m_U = \frac{10^6}{2} = 5 \times 10^5 \text{ g.}$$

410 — Calcular a quantidade de calor dissipada em uma hora por um miligrama de polónio.

R: tem-se $\frac{m_{Po}}{m_{Ra}} = \frac{210}{226} \times \frac{T_{Po}}{T_{Ra}} \quad \therefore$

$$m_{Ra} = \frac{226}{210} \times \frac{1610 \times 365{,}25}{140} \times 10^{-3} = \frac{1{,}33 \times 10^8}{2{,}94 \times 10^7} =$$

$$= 4{,}5 \text{ g } \textit{de} \text{ Ra.}$$

Donde 1 mg, *de* Po *vale* 4,5 curies *e por consequência emite* $4{,}5 \times 3{,}72 \times 10^{10}$ *raios* α *por segundo. Como* 1 hora ≪ 140 dias = T_{Po}, *o número de partículas* α *emitidas durante este tempo é proporcional ao tempo, isto* é:

$$4{,}5 \times 3{,}72 \times 10^{10} \times 3600 = 6{,}05 \times 10^{14}$$

partículas α *emitidas em 1 hora.*

Isto corresponde a uma energia libertada de

$$Q = 6{,}05 \times 10^{14} \times 5{,}3 \times 10^6 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 0{,}24$$
$$= 123 \text{ p. } \textit{calorias por hora.}$$

411 — Possui-se *Ra D* puro proveniente da destruição completa de 200 milicuries de *Rn.* Ao fim de um mês, extrai-se uma certa quantidade de *Po* que, colocado em uma câmara de ionização de radiação total onde são absorvidos inteiramente os raios α, dá uma corrente de saturação de 16 *U. E. S.* Calcular a proporção de *Po* extraído.

R: *No final da destruição dos átomos de* Rn *tem-se* $(N_{RaD})^t = (N_{Rn})^{t=0}$ *o que significa que o número inicial de átomos de* Rn *se converteu em um número igual de átomos de* RaD *presentes no final da destruição do* Rn *(devido ao facto de se poder desprezar a destruição dos átomos de* RaD *formados nesse intervalo uma vez que* $T^{RaD} \gg T_{Rn}$).

Por outro lado

$$(\lambda Rn\, NRn)^0 = 0{,}2 \times 3{,}72 \times 10^{10} \rightarrow (NRn)^{t=0} = \frac{0{,}2 \times 3{,}72 \times 10^{10}}{\lambda Rn}$$

Logo

$$(\lambda RaD\ NRaD)^t = \lambda RaD\ (NRn)^{t=0} = \frac{\lambda RaD}{\lambda Rn} \times$$

$\times\ 0.74 \times 10^{10} = 3{,}52 \times 10^6$ *raios* α *emitidos por segundo pelo* RaD *no final da destruição do* Rn. *Vamos agora exprimir a formação do* Po *a partir do* RaD: *Como* TRaD ≫ TPo. TRaE *tem-se (desprezando a formação intermedia do* RaE) *que*

$$\lambda Po\ NPo = \lambda RaD\ NRaD\left(1 - e^{-\lambda Pot}\right) \approx \lambda RaD\ NRaD\ \lambda_{Po} t$$

visto que um mês é bastante inferior ao período do Po. *Logo, substituindo* λRaD NRaD *pelo seu valor calculado precedentemente, tem-se*

$$\lambda_{Po} N_{Po} \approx \frac{\lambda RaD\, \lambda_{Po}}{\lambda Rn} 0{,}74 \times 10^{10} \times 30$$

Actividade do Po *no fim de um mês:*

$$\lambda Po\, NPo \approx 2{,}22 \times 0{,}693 \frac{TRn}{TRaD\, TPo} 10^{11} = 1{,}53 \times \frac{3{,}82 \times 10^{11}}{22 \times 365{,}25 \times 140} = \frac{5{,}85 \times 10^{11}}{1{,}12 \times 10^6}$$

λPo NPo ≈ $5{,}22 \times 10^5$ *raios* α *emitidos por segundo pela quantidade de* Po *existente ao fim de um mês.*

Uma parte deste Po *foi medida em uma câmara de ionização onde ela produziu* $\frac{16}{4{,}8 \times 10^{-10}}$ *pares de iões por segundo o que corresponde à emissão de*

$$\frac{16}{4{,}8 \times 10^{-10} \times 1{,}53 \times 10^5}$$

raios α *por segundo sob um ângulo sólido de* π *esterradianos que são absorvidos no gás da câmara. Logo o número de raios* α *emitidos durante o mesmo tempo pela fonte foi o dobro deste. Isto é:* $2 \times 2{,}19 \times 10^5 = 1{,}38 \times 10^5$ *raios* α *emitidos por segundo pela porção extraída de* Po. *Como a proporção das massas presentes nas duas quantidades é igual à razão do número de raios emitidos nos dois casos teremos:*

$$\frac{m'}{m} = \frac{4{,}38 \times 10^5}{5{,}22 \times 10^5} = 0{,}84$$

Logo a proporção de Po *extraída foi de* 84%.

412 — Quanto tempo será necessário esperar para que se possa extrair de novo uma quantidade *Po* dando, nas mesmas condições, uma corrente de saturação de 100 *U. E. S.*? Calcular a quantidade máxima de *Po*, expressa em curies, que se poderia extrair deste *RaD.*

Desprezar-se-á a formação intermédia do *RaE.*

Dados: Período do *Po* = 140 dias
» » *Ra* = 1610 anos
» » ^{238}U = $4{,}5 \times 10^9$ anos
» » *Rn* = 3,82 dias
» » *RaD* = 22 anos

Número de pares de iões produzidos por um raio α do *Po* = $1{,}53 \times 10^5$. Energia dos raios α do *Po* = 5,30 *MeV.*

1 *p caloria* 4,18 *Joules*; *e* = $4{,}8 \times 10^{-10}$ *U. E. S.*; Número de *Avogadro* = $6{,}02 \times 10^{23}$ átomos por átomo-grama.

R: *A* 100 U. E. S. *corresponde uma actividade do* Po:

$$(\lambda_{Po} N_{Po})' = \frac{2 \times 100}{4{,}8 \times 10^{-10} \times 1{,}53 \times 10^5} = 2{,}78 \times 10^6$$

raios α *emitidos por segundo pelos átomos de* Po. *Esta actividade do* Po *é aquela que corresponde à quantidade de* Po *formada a partir do* RaD *puro ao fim de um tempo* t_2. *Com a mesma hipótese simplificadora atrás adoptada (desprezar a formação intermédia do* RaE) *vamos calcular este tempo mediante a equação de formação do* Po *a partir do* RaD *inicialmente puro. Como esta actividade do* Po *já é uma fracção importante da actividade do equilíbrio de regime entre o* Po *e o* RaD *a aproximação feita atrás de se limitar ao primeiro termo o desenvolvimento em série da exponencial* $e^{-\lambda_{Po} t}$ *deixa de ser válida e tem que se calcular* t_2 *a partir da fórmula exponencial:*

$$e^{-\lambda_{Po} t} = 1 - \frac{\lambda_{Po} N_{Po}}{\lambda RaD\, NRaD} \quad \therefore$$

$$t = \frac{1}{\lambda_{Po}} \ln \frac{1}{1 - \dfrac{\lambda_{Po} N_{Po}}{\lambda RaD\, NRaD}} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_{Po}} \ln \frac{\lambda RaD\, NRaD}{\lambda RaD\, NRaD - \lambda_{Po} N_{Po}}$$

Com os valores correspondentes a t_2 *tem-se:*

$$t_2 = \frac{T_{Po}}{0{,}693} \ln \frac{3{,}52 \times 10^6}{(3{,}52 - 2{,}78) 10^6} =$$

$$= 202 \ln 4{,}75 = 202 \times 2{,}30 \times 0{,}672 = 314 \text{ dias.}$$

Ao fim de 30 dias, depois de extrairmos 84% *da quantidade presente de* Po *nesse instante, a parte restante ficou com uma actividade igual à diferença das actividades total e extraída, isto é,* $(5{,}22 - 4{,}38)\ 10^5 = 0{,}84 \times 10^5$ *raios* α *por segundo emitidos pelo* Po *restante. Esta actividade é igual áquela que se reformaria a partir do* RaD *inicialmente puro ao fim de um intervalo de tempo* t_1 *que se pode calcular de maneira análoga a* t_2:

$$t_1 = \frac{140}{0{,}693} \ln \frac{3{,}52 \times 10^6}{(35{,}2 - 0{,}84) 10^5} =$$

$$= 202 \times 2{,}30 \times \log 1{,}02$$

$$t_1 = 465 \times 0{,}0086 = 4 \text{ dias.}$$

Portanto o tempo ao fim do qual se pode extrair da parte restante uma quantidade de Po *dando* 100 U. E. S. *é igual à diferença* $t_2 - t_1 = 314 - 4 = 310$ dias. *A quantidade máxima de* Po, *expressa em curies, que se poderia extrair deste* RaD é a *mesma que a quantidade de* RaD *presente, expressa também em curies.*

Vale portanto

$$\frac{3{,}52 \times 10^6}{3{,}72 \times 10^{10}} = 0{,}95 \times 10^{-4} \ \textit{curies de } \mathrm{Po}.$$

(Resoluções de Sant'Ana Dionísio, Bolseiro em Paris)

ERRATA

No último número da «Gazeta de Física» incluímos, por lapso, a 1.ª prova escrita para o Certificado de Electrónica e Radioactividade, na rubrica EXAMES DO ENSINO MÉDIO, do que pedimos desculpa aos nossos leitores.