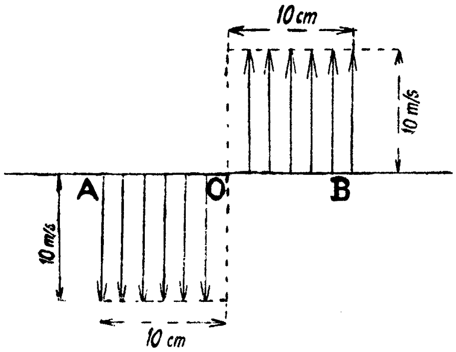
PONTOS DE EXAME

EXAMES UNIVERSITÁRIOS (FÍSICA)

F. C. L. — Óptica — 1.º exame de frequência — 1.ª chamada — 1957

413 — Na ocasião $t = 0$, as posições dos diferentes pontos dum fio elástico não se encontram perturbadas. Nessa mesma ocasião as suas velocidades distribuem-se como se indica na figura



Represente os perfis da onda de deslocamento, nas ocasiões: 0 *s*; $2{,}5\times10^{-3}$ *s*; 5×10^{-3} *s*; $7{,}5\times10^{-3}$ *s*; e 10^{-2} *s*. (Velocidade de propagação: 20 *m/s*.)

414 — Em certos problemas associa-se, ao movimento duma partícula livre de velocidade $\vec{v}$, uma onda plana propagando-se na direcção de $\vec{v}$ com as frequências angulares $\omega = \dfrac{E}{h/2\pi}$ e $K = \dfrac{p}{h/2\pi}$. *E*, *p* e $h/2\pi$ são respectivamente a energia cinética da partícula, a sua quantidade de movimento e a constante de Planck dividida por 2π ($h/2\pi = 1{,}04 \times 10^{-34}$ joule × segundo).

A) Calcule: 1.º) Velocidade de propagação da fase, V_f

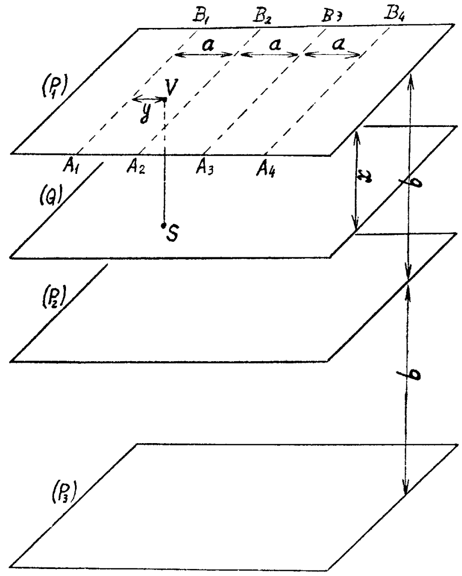
2.º) Velocidade de propagação do grupo, V_g

3.º) Lei da dispersão, $V_f(\omega)$

B) Se a partícula for um electrão e possuir uma energia de 1 *e-V,* calcule em Angström o comprimento de onda da onda associada.

Dados: $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ Coulomb
$m = 9{,}01 \times 10^{-31}$ kg.

415 — É dada uma onda electromagnética com as seguintes características:



$a = 1$ cm $b = 2$ cm

— sobre o plano P_1 encontram-se linhas A_1B_1, A_2B_2,... sobre as quais $\vec{E}$ é sempre nulo; fora dessas linhas o vector campo está situado sobre o plano e tem a direcção das linhas *AB*; a amplitude E_0 num ponto qualquer *V* tem por expressão

$$E_0 = 20\, sen \frac{\pi y}{a}\ (\text{volt/m});$$

— entre as linhas A_1B_1 e A_2B_2, a fase é a mesma em todos os pontos, mas difere de 180° da fase dos pontos situados entre A_2B_2 e A_3B_3, etc.

— sobre os planos P_2, P_3, etc., paralelos a P_1 e igualmente distanciados o fenómeno ondulatório repete-se em todos os seus aspectos; para um plano intermediário *Q* a única diferença encontra-se na fase: a diferença de fase α entre *V* e S tem por expressão $\alpha = 2\pi\dfrac{x}{b}$.

Calcule as características das ondas planas livres que permitem interpretar este tipo de onda. Em particular determine a direcção, o sentido, a amplitude e o comprimento de onda.

RESOLUÇÃO DO 1.º PROBLEMA (n.º 413)

O fio elástico é sede de uma perturbação que tem origem no troço $\overline{AB}$ *e se propaga a todos os pontos, provocando deslocamentos transversais variáveis de ponto para ponto e com o tempo, no plano definido pelas direcções das velocidades iniciais entre* A *e* B.

Essa perturbação é, pois, descrita por uma função y (x,t) (x, *abcissa de um ponto* P, *qualquer, do fio, a partir de* 0; y, *deslocamento do ponto* P *no instante* t, *em relação à sua posição inicial) que satisfaz à equação de propagação das ondas, na forma*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0 \quad (\text{V, } \textit{velocidade de propagação})$$

e é por isso uma das soluções contidas em

$$y = f(x - Vt) + g(x + Vt) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

onde $f(x - Vt)$ *e* $g(x + Vt)$ *representam ondas planas propagando-se na direcção do eixo dos* x x, *no sentido positivo e negativo, respectivamente, com velocidade* V. *A particularização da expressão geral* (1) *pelas condições iniciais fornecerá a solução adequada ao problema; prèviamente, porém, encontremos a expressão da velocidade* v *de cada ponto* P *(de direcção perpendicular ao fio), em cada instante* t*:*

$$v(x,t)=\frac{\partial y}{\partial t}=-Vf'(x-Vt)+Vg'(x+Vt)$$

Nestes termos as condições

$$\begin{cases} y(x,0)=0 \\ v(x,0)=v_0(x), \end{cases}$$

com

$$v_0(x)=\begin{cases} 0 & \text{para x fora de (-10 cm,+10 cm,)} \\ 10\ \text{m/s} & \text{para } 0\le x\le 10\ \text{cm} \\ -10\ \text{m/s} & \text{para } -10\ \text{cm}\le x\le 0, \end{cases}$$

conduzem a

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=0 \\ -Vf'(x)+Vg'(x)=v_0(x) \end{cases}$$

e portanto a

$$\begin{cases} f(x)=-g(x) \\ g'(x)=\dfrac{v_0(x)}{2V}; \end{cases}$$

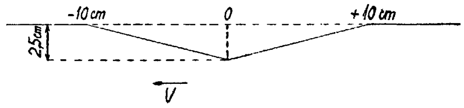
segue-se a integração da 2.ª equação de que resulta:

$$g(x)=\frac{1}{2V}\int_{-\infty}^{x} v_0(x)dx + C$$

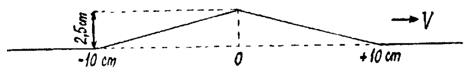
em que C *é uma constante que podemos arbitrar nula; e o cálculo numérico dá:*

$$g(x)=\begin{cases} 0 \quad \textit{para} \quad x\le -10\,\text{cm} \\ -0{,}25x-2{,}5 \ \textit{(em cm) para} -10\,\text{cm}\le x\le 0 \\ +0{,}25x-2{,}5 \ \textit{(em cm) para} \quad 0\le x\le 10\,\text{cm} \\ 0 \quad \textit{para} \quad x\ge 10\,\text{cm} \end{cases}$$

O perfil inicial de g (x +Vt) *é, portanto, da forma*

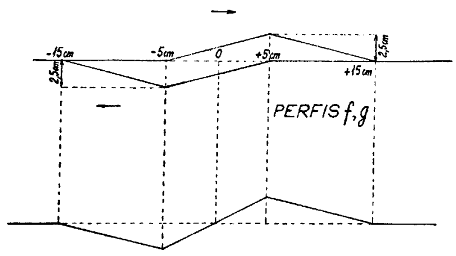


e o perfil inicial de f (x − Vt), *da forma*



Se supomos não haver dissipação de energia, não ocorre qualquer deformação de cada um destes perfis no decurso do tempo: pode passar-se do perfil inicial para o perfil no instante t por mera translação de −Vt *para g, de* +Vt *para* f, *de acordo com o significado físico destas funções. Então, para a representação dos perfis, de preferência a trabalhar com a expressão analítica* (1), *depois das convenientes substituições, lançamos, antes, mão da sobreposição gráfica dos dois perfis transladados de* −Vt *e* +Vt, *respectivamente, a partir da origem* 0.

Exemplificamos para $t = 2{,}5 \times 10^{-3}$ s.: *as translações são, em valor absoluto, de 5 cm.*



PERFIL RESULTANTE

RESOLUÇÃO DO 2.º PROBLEMA (n.º 414)

A) 1) $V_f=\dfrac{\omega}{k}=\dfrac{E}{p}=\dfrac{\frac{1}{2}mv^2}{mv}=\dfrac{1}{2}v$

2) $V_g=\dfrac{d\omega}{dk}=\dfrac{dE}{dp}=\dfrac{mvdv}{mdv}=v$

3) *De* $V_f=\dfrac{1}{2}v$ *e* $E=\dfrac{1}{2}mv^2\left(=\frac{h}{2\pi}\omega\right)$

vem:

$$V_f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2E}{m}} \quad ou \quad V_f = \sqrt{\frac{h/2\pi}{m}}\cdot\sqrt{\omega}$$

B) $$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\, h/2\pi}{p} = \frac{2\pi\, h/2\pi}{\sqrt{2mE}};$$

ora, no sistema de Giorgi:

$$h/2\pi = 1{,}04\times 10^{-34}\ \text{joule}\times\text{seg}$$
$$E = 1\ \text{eV} = 1{,}6\times 10^{-19}\ \text{joule}$$
$$m = 9{,}01\times 10^{-31}\ kg;$$

e daí resulta:

$$\lambda = \frac{2\times 3{,}14\times 1{,}04\times 10^{-34}}{\sqrt{2\times 9{,}0\times 10^{-31}\times 1{,}6\times 10^{-19}}}\,\text{m} = 1{,}2\times 10^{-11}\ \text{m}$$

$$\text{ou}\quad \lambda = 12\ \text{Å}$$

RESOLUÇÃO DO 3.º PROBLEMA (n.º 415)

Supondo tratar-se de uma onda monocromática (frequência angular ω*) e sendo* $\vec{K}$ *o versor das direcções* AB*, o campo pode representar-se, num mesmo instante* t:

a) *num ponto* V, *do plano* P_1, *entre as linhas* A_1B_1 *e* A_2B_2, *à distância* y *de* A_1B_1, *por:*

$$\vec{E}_v = 20\,\text{sen}\frac{\pi y}{a}e^{i\omega t}\vec{K} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

b*) num ponto* T, *do plano* P_1, *entre as linhas* A_2B_2 *e* A_3B_3, *à distância* y' *de* A_2B_2, *por:*

$$\vec{E}_T = 20\,\text{sen}\frac{\pi y'}{a}e^{i(\omega t-\pi)}\vec{K} =$$
$$= -20\,\text{sen}\frac{\pi y'}{a}e^{i\omega t}\vec{K}.$$

Ora, sendo y a *distância do ponto* T a A_1B_1, *tem-se* $y' = y - a$ *e com isso*

$$\vec{E}_T = 20\,\text{sen}\frac{\pi y'}{a}e^{i\omega t}\cdot\vec{K};$$

reconhece-se que o mesmo se dá em todas as outras regiões entre as linhas A B *e conclue-se que a expressão* (1) *é válida para o campo em cada ponto do plano* P_1, *desde que* y *represente a distância do ponto a* A_1B_1.

Para um ponto U *do plano* Q, *cuja projecção sobre* P_1 *dista* y *de* A_1B_1, *a expressão do campo é, no mesmo instante* t*:*

$$\vec{E}_u = 20\,\text{sen}\frac{\pi y}{a}e^{i\left(\omega t - 2\pi\frac{x}{b}\right)}\vec{K} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

traduzindo haver entre Q e P_1 *apenas uma diferenca de fase* $2\pi\frac{x}{b}$; *e esta mesma expressão é válida para todo, o ponto do espaço, escolhido um conveniente terno de referência* O x y z: *origem* O *em qualquer ponto de* A_1B_1, *eixo* Oz *coincidente com* A_1B_1, *eixo* Oy, *no plano* P_1, *perpendicular a* A_1B_1; *eixo* Ox *perpendicular ao plano* P_1.

Tal expressão representa uma onda que se propaga na direcção do eixo Ox, *no sentido positivo, com amplitude modulada na direcção do eixo* Oy; *ora esta onda pode interpretar-se como* a *sobreposição de duas ondas livres, de iguais amplitudes e frequências propagando-se segundo direcções do plano* xy, *cujos versores* $\vec{s_1}$ *e* $\vec{s_2}$ *fazem ângulos iguais com o eixo* Oy *e têm sentidos tais que o vector resultante* $\vec{s_1}+\vec{s_2}$ *é dirigido no sentido positivo do eixo* Ox.

Se for A, *o valor comum das amplitudes,* ω *o das' frequências,* V *a velocidade de propagação,* α *o ângulo que fazem* $\vec{s_1}$ *e* $\vec{s_2}$ *com o eixo* Ox, *a expressão do campo vem:*

$$\vec{E} = 2A\cos\left(\frac{\omega}{V}y\,\text{sen}\,\alpha\right)e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{V}x\cos\alpha\right)}\vec{K} \quad (3)$$

como resultante da sobreposição das duas ondas

$$\vec{E_1} = Ae^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{V}\vec{r}\vec{s_1}\right)}\vec{K}$$

e

$$\vec{E_2} = Ae^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{V}\vec{r}\vec{s_2}\right)}\vec{K}.$$

Para a identificação de (3) *com* (2) *é cómodo mudar, prèviamente, a origem de* O x y z *em* (2): *se* y *passa a ser no plano* P_1 *a distância de qualquer ponto à recta intermédia de* A_1B_1 *e* A_2B_2, *resulta:*

$$\vec{E}_u = 20\cos\frac{\pi y}{a}e^{i\left(\omega t - 2\pi\frac{x}{b}\right)}\vec{K} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2')$$

Teremos então:

$$\begin{cases} 2A = 20\,\text{volt/m} \\ \dfrac{\pi}{a} = \dfrac{\omega}{V}\text{sen}\,\alpha \\ \dfrac{2\pi}{b} = \dfrac{\omega}{V}\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a = 1\ \text{cm} \\ b = 2\ \text{cm} \end{pmatrix}$$

donde se tira:

$$A = 10\ \text{volt/m}$$
$$\alpha = 45°$$
$$\lambda = 2\pi\frac{V}{\omega} = 1{,}41\ \text{cm}$$

Resoluções de Noémio Marques

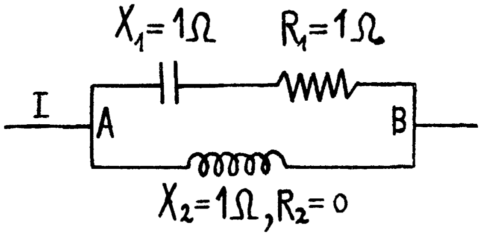
F. C. L. — Curso Geral de Física. Exame final — Ponto n.º 4 — 14 de Julho de 1956.

416 — *a*) Lei de AMPÈRE.
b) Medição de resistência eléctrica, pelo processo da perda de carga.
c) Bobina de reacção e bobina de choque.

417 — *a*) Lei de JOULE, da corrente alternada.
b) Efeito piezo-eléctrico.
c) Efeito de TYNDALL.

418 — *a*) Actividade óptica.
b) Acção do campo eléctrico sobre uma carga pontual móvel.
c) Microscópio electrónico.

419 — Calcule a corrente *I* na linha, sabendo que tensão entre *A* e *B* é *14,2 V eficaz.*



R: *O problema, sobre uma rede de condutores percorridos por corrente alternada, pode ser resolvido pelo* método dos imaginários. *Associam-se, como se fossem duas resistências em paralelo, as impedâncias imaginárias dos lados da malha figurada* (Z'_1, Z'_2); *e calcula-se a impedância imaginária equivalente do circuito* (Z'). *O módulo desta grandeza é a impedância equivalente do circuito* (Z), *que intervem na aplicação da lei de* OHM *ao circuito entre* A *e* B.
Tem-se:

$$1/Z' = 1/Z'_1 + 1/Z'_2 = 1/(R_1 - jX_1) + 1/(R_2 + jX_2),$$

$$Z' = 1 + j$$

$$|Z'| = Z = 1{,}42\ \Omega$$

$$I = V/Z = 10{,}0\ \text{A eficaz}$$

Resolução de A Silvério

F. C. L. — Curso Geral de Física. Exame final — Ponto n.º 5 — 19 de Julho de 1956.

420 — *a*) Efeito de OERSTED.
b) Acções electromagnéticas.
c) Lei de OHM, da corrente alternada.

421 — *a*) Campo magnético girante.
b) Efeito termiónico.
c) Actividade óptica.

422 — *a*) Rede de difracção.
b) Efeito de RAMAN.
c) Equação de BRAGG.

423 — Calcula-se, por via clássica, a velocidade de uma partícula com carga eléctrica, submetida a partir do repouso a uma dada tensão, obtendo-se o valor *1,41.c,* com *e* velocidade de propagação da luz no vácuo. Determine a verdadeira velocidade da partícula.

Se a partícula fosse um electrão ($m_0 = 9{,}1 \times 10^{-28}$ *g*; $e = 4{,}80 \times 10^{-10}$ *U. Es.*), qual seria a tensão aplicada?

R: *O valor da velocidade da partícula, que se apresenta,* v = 1,41.c *(superior ao valor da velocidade* c *de propagação da luz no vácuo), é evidentemente estranho ao problema relativista proposto. Porém, o conhecimento da via (clássica) por que foi obtido permite avaliar o grau de dependência, de* m_0, *do primeiro membro da expressão*

$$eV = mc^2 - m_0 \cdot c^2, \qquad (1)$$

que vale em teoria da relatividade: tem-se

$$eV = m_0 \cdot v^2/2. \qquad (2)$$

As anteriores expressões da energia cinética da partícula de carga eléctrica e, *submetida a partir do repouso à tensão* V, *conduzem à relação*

$$m = m_0\,(1 + v^2/2c^2),$$

entre as massas m_0 *e* m *da partícula, em repouso e em movimento com a velocidade (relativista)* v_r, *respectivamente. Por comparação à equação de transformação da massa,*

$$m = m_0/R_v, \qquad (3)$$

vem então

$$R_v \equiv \sqrt{1 - v_r^2/c^2} = 1/2{,}00,$$

logo

$$v_r = 0{,}87.c.$$

No caso de a partícula ser um electrão, calcula-se a tensão aplicada introduzindo em (2), *ou em* (1–3), *os dados fornecidos e o valor determinado do factor de* LORENTZ R_v. *Resulta*

$$V = 1{,}00 \times m_0 \cdot c^2/e = 17{,}1 \times 10^2\ \text{U. Es.}.$$

Resolução de A. Silvério

F. C. L. — Ano lectivo de 1956-57 — Mecâníca Física — 1.ª chamada.

424 — Achar o valor de $div(\overline{a} \times \overline{b})$

425 — Demonstrar, que no caso de um ponto actuado por forças conservativas, a soma das energias potencial e cinética é constante.

426 — Partindo da expressão

$$\overline{f} = \frac{d}{dt}(m\,\dot{\overline{r}})$$

fornecida pela mecânica relativista, demonstrar que um ponto material actuado por uma força central, descreve uma trajectória plana.

F. C. L. — Ano lectivo de 1956-57 — Termodinâmica — 1.º exame de frequência —1.ª chamada.

427 — Diga por que razão se torna possível aproveitar os gases na medição de temperaturas e quais as operações que lhe parece deveria realizar se tivesse de medir a temperatura de um corpo com uma porção de um gás que tomasse como substância termométrica.

428 — Considerando um sistema no qual não actuam forças gravíticas, nem quaisquer outras forças de volume, deduza a expressão do trabalho cedido ao meio exterior pelo sistema, quando este sofre uma transformação elementar, que leva a sua superfície exterior para uma posição final infinitamente próxima da inicial.

429 — Diga o que se entende por energia interna e aduza razões justificativas de que esta grandeza só depende do estado do sistema.

F. C. L. — Ano lectivo de 1956-57 — Electricidade — 1.º exame de frequência — 2.ª chamada.

430 — Admitindo que as atracções e repulsões eléctricas são coulombianas, e sabendo que, nesta hipótese, o fluxo do campo $\overline{E}$, criado por uma carga pontual q, através de um elemento de superfície dS, para o lado da respectiva normal n,

$$d\Phi = \overline{E} \cdot \overline{n} \cdot dS = EdS\,cos(\overline{E}, \overline{n})$$

tem o valor absoluto

$$|d\Phi| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,d\omega,$$

em que $d\omega$ é o ângulo sólido definido pela carga q e por dS, demonstrar, no caso de q ser uma carga positiva, que o fluxo de $\overline{E}$ que *sai* de uma superfície qualquer fechada, que envolve q, é dado por

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

R: $\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \overline{E} \cdot \overline{n}\,dS = \int_S E\cos(\overline{E}, \overline{n})\,dS$

como $\underline{q}$ *é positivo, o ângulo de* $\overline{E}$ *com a normal exterior a* S, $\overline{n}$, *é agudo (se a semi-recta* $q \to dS$ *só encontrar* S *num ponto); então,*

$$\cos(\overline{E}, \overline{n}) > 0 \text{ e } |d\Phi| = d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,d\omega;$$

e vem:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,d\omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_S d\omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Se a semi-recta $q \to dS$ *encontra* S *em mais de uns ponto, este número de pontos é impar ; a um dado* $d\omega$ *corresponde um número impar de elemento* dS, *para os quais é alternadamente,* $\cos(\overline{E}, \overline{n})$ *positivo e negativo e cujas contribuições, por isso, se reduzem duas a duas, excepto a do* dS *mais longe de* q, *que tem de dar contribuição positiva; e ainda vem o mesmo valor para* Φ.

431 — Calcule o potencial φ de uma esfera de raio a, cheia com uma carga eléctrica homogénea de densidade ρ, num ponto situado no exterior da esfera, aproveitando o facto da solução ser da forma geral,

$$\varphi = \frac{a}{r},$$

válida para todos os sistemas de cargas dotados de simetria esférica.

Para obter φ *basta determinar o valor da constante* a.

Para obter a *calcula-se o fluxo* Φ *do campo* $\vec{E}$ *através duma esfera concêntrica com a das cargas e que passa pelo ponto potenciado P. Este fluxo é igual ao cociente* q/ε_0, *em que* q *é a carga total. Vem, pois:*

$$\Phi = \int_{\text{esfera}} \vec{E} \cdot \vec{n}\,dS = \int E(r) \cdot r^2 \underbrace{\text{sen}\,d\theta\,d\varphi}_{d\omega} =$$
$$= E(r) \cdot r^2 \cdot 4\pi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Esta expressão obtem-se devido ao facto de E *ser radial (paralelo ou antiparalelo a* $\vec{n}$) *devido à simetria esfé-*