Comprimento da parte da linha suspensa (dos quais 1 cm utilizado na fixação do gancho metálico) . . . . 16 cm

Peso da linha suspensa:

$$\frac{16\ \text{cm} \times 0{,}035\ \text{g}}{100\ \text{cm}} = 0{,}0056\ \text{g}$$

Peso do gancho suspenso da linha 0,010 g
Peso do prato, fios de suspensão e anilha metálica. . . . . . . 0,067 g
Média dos pesos colocados no prato em várias experiências efectuadas . . . . 0,130 g
Peso total: 0,0056 g + 0,010 g + 0,067 g + + 0,130 g = 0,2126 g.
Diâmetro $\overline{AB}$ da semicircunferência formada pela linha (fig. 35) 7,8 cm

O peso total F (fig. 36) exercido à distância AP = 7,8 cm do ponto fixo A, foi equilibrado pela força F' da contracção do líquido exercida à distância $AP/2$ do ponto A. A intensidade da força F' é, portanto, igual a $2 \times 0{,}2126$ g = 0,4252 g. A tensão superficial do líquido será dada por:

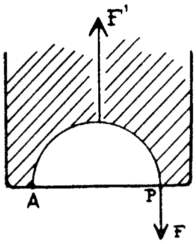


Fig. 36

$$T = \frac{0{,}4252\ \text{g}}{2 \times 7{,}8\ \text{cm}} = 0{,}0273\ \text{g/cm}$$

que equivale a 26,8 dines/cm, valor exactamente igual ao que obtiveramos anteriormente.

✳

TABELA dos valores da **Tensão Superficial** de alguns líquidos, expressos em dines/cm (extraídas das *Tables of Physical and Chemical Constants,* by G. W. C. Kaye, tenth edition, 1948)

LÍQUIDO	Temperatura em °C	Substância em contacto com o liquido	Tensão superficial em dines/cm
Agua	15	ar	72,8 a 77,6
Água	15	o seu vapor	71,4
Acetona	16,8	o seu vapor	23,3
Ácido acético	20	o seu vapor	23,5
Álcool etílico	20	o seu vapor	22
Azeite	20	ar	32
Benzeno	17,5	ar	29,2
Clorofórmio	15	ar	27,2
Essência de terebintina	15	ar	27,3
Éter	20	o seu vapor	16,5
Mercúrio	20	azoto	465
Sulfureto de carbono	19,4	o seu vapor	33,6

RÓMULO DE CARVALHO
Professor no Liceu D. João III, em Coimbra

A «GAZETA DE FÍSICA» luta pelos interesses dos cientistas portugueses

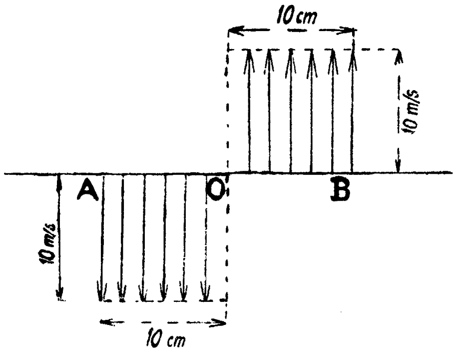
A indústria nacional necessita de físicos e de químicos portugueses

PONTOS DE EXAME

EXAMES UNIVERSITÁRIOS (FÍSICA)

F. C. L. — Óptica — 1.º exame de frequência — 1.ª chamada — 1957

413 — Na ocasião $t = 0$, as posições dos diferentes pontos dum fio elástico não se encontram perturbadas. Nessa mesma ocasião as suas velocidades distribuem-se como se indica na figura



Represente os perfis da onda de deslocamento, nas ocasiões: 0 *s*; $2{,}5\times10^{-3}$ *s*; 5×10^{-3} *s*; $7{,}5\times10^{-3}$ *s*; e 10^{-2} *s*. (Velocidade de propagação: 20 *m/s*.)

414 — Em certos problemas associa-se, ao movimento duma partícula livre de velocidade $\vec{v}$, uma onda plana propagando-se na direcção de $\vec{v}$ com as frequências angulares $\omega = \dfrac{E}{h/2\pi}$ e $K = \dfrac{p}{h/2\pi}$. *E*, *p* e $h/2\pi$ são respectivamente a energia cinética da partícula, a sua quantidade de movimento e a constante de Planck dividida por 2π ($h/2\pi = 1{,}04 \times 10^{-34}$ joule × segundo).

A) Calcule: 1.º) Velocidade de propagação da fase, V_f

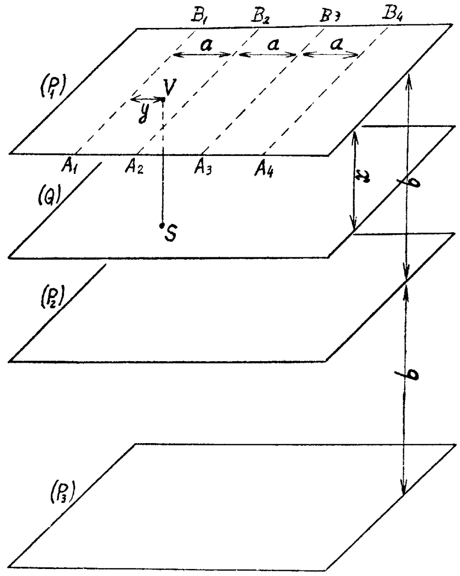
2.º) Velocidade de propagação do grupo, V_g

3.º) Lei da dispersão, $V_f(\omega)$

B) Se a partícula for um electrão e possuir uma energia de 1 *e-V*, calcule em Angström o comprimento de onda da onda associada.

Dados: $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ Coulomb
$m = 9{,}01 \times 10^{-31}$ kg.

415 — É dada uma onda electromagnética com as seguintes características:



$a = 1$ cm $b = 2$ cm

— sobre o plano P_1 encontram-se linhas A_1B_1, A_2B_2,... sobre as quais $\vec{E}$ é sempre nulo; fora dessas linhas o vector campo está situado sobre o plano e tem a direcção das linhas *AB*; a amplitude E_0 num ponto qualquer *V* tem por expressão

$$E_0 = 20\, sen \frac{\pi y}{a} \text{ (volt/m)};$$

— entre as linhas A_1B_1 e A_2B_2, a fase é a mesma em todos os pontos, mas difere de 180° da fase dos pontos situados entre A_2B_2 e A_3B_3, etc.

— sobre os planos P_2, P_3, etc., paralelos a P_1 e igualmente distanciados o fenómeno ondulatório repete-se em todos os seus aspectos; para um plano intermediário *Q* a única diferença encontra-se na fase: a diferença de fase α entre *V* e S tem por expressão $\alpha = 2\pi \dfrac{x}{b}$.

Calcule as características das ondas planas livres que permitem interpretar este tipo de onda. Em particular determine a direcção, o sentido, a amplitude e o comprimento de onda.

RESOLUÇÃO DO 1.º PROBLEMA (n.º 413)

O fio elástico é sede de uma perturbação que tem origem no troço $\overline{AB}$ *e se propaga a todos os pontos, provocando deslocamentos transversais variáveis de ponto para ponto e com o tempo, no plano definido pelas direcções das velocidades iniciais entre* A *e* B.

Essa perturbação é, pois, descrita por uma função y (x,t) (x, *abcissa de um ponto* P, *qualquer, do fio, a partir de* 0; y, *deslocamento do ponto* P *no instante* t, *em relação à sua posição inicial) que satisfaz à equação de propagação das ondas, na forma*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (V, \textit{velocidade de propagação})$$

e é por isso uma das soluções contidas em

$$y = f(x - Vt) + g(x + Vt) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

onde f(x − Vt) *e* g(x + Vt) *representam ondas planas propagando-se na direcção do eixo dos* x x, *no sentido positivo e negativo, respectivamente, com velocidade* V. *A particularização da expressão geral* (1) *pelas condições iniciais fornecerá a solução adequada ao problema; prèviamente, porém, encontremos a expressão da velocidade* v *de cada ponto* P *(de direcção perpendicular ao fio), em cada instante* t*:*

$$v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -Vf'(x - Vt) + Vg'(x + Vt)$$

Nestes termos as condições

$$\begin{cases} y(x,0) = 0 \\ v(x,0) = v_0(x), \end{cases}$$

com

$$v_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{para x fora de (-10 cm,+10 cm,)} \\ 10\ \text{m/s} & \text{para } 0 \le x \le 10\ \text{cm} \\ -10\ \text{m/s} & \text{para } -10\ \text{cm} \le x \le 0, \end{cases}$$

conduzem a

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = 0 \\ -Vf'(x) + Vg'(x) = v_0(x) \end{cases}$$

e portanto a

$$\begin{cases} f(x) = -g(x) \\ g'(x) = \dfrac{v_0(x)}{2V}; \end{cases}$$

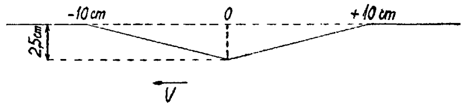
segue-se a integração da 2.ª equação de que resulta:

$$g(x) = \frac{1}{2V}\int_{-\infty}^{x} v_0(x)dx + C$$

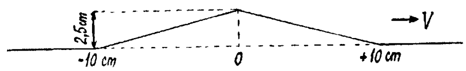
em que C *é uma constante que podemos arbitrar nula; e o cálculo numérico dá:*

$$g(x) = \begin{cases} 0 \quad \textit{para} \quad x \le -10\,\text{cm} \\ -0{,}25x - 2{,}5 \ \textit{(em cm) para} -10\,\text{cm} \le x \le 0 \\ +0{,}25x - 2{,}5 \ \textit{(em cm) para} \quad 0 \le x \le 10\,\text{cm} \\ 0 \quad \textit{para} \quad x \ge 10\,\text{cm} \end{cases}$$

O perfil inicial de g (x +Vt) *é, portanto, da forma*

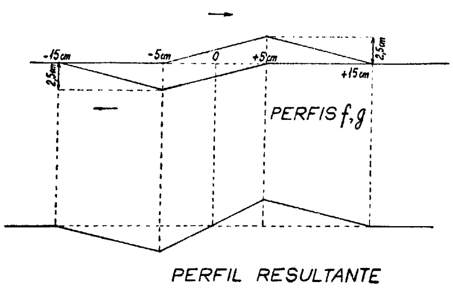


e o perfil inicial de f (x − Vt), *da forma*



Se supomos não haver dissipação de energia, não ocorre qualquer deformação de cada um destes perfis no decurso do tempo: pode passar-se do perfil inicial para o perfil no instante t por mera translação de −Vt *para g, de* +Vt *para* f, *de acordo com o significado físico destas funções. Então, para a representação dos perfis, de preferência a trabalhar com a expressão analítica* (1), *depois das convenientes substituições, lançamos, antes, mão da sobreposição gráfica dos dois perfis transladados de* −Vt *e* +Vt, *respectivamente, a partir da origem* 0.

Exemplificamos para t = 2,5 × 10^{-3} s.: *as translações são, em valor absoluto, de 5 cm.*



RESOLUÇÃO DO 2.º PROBLEMA (n.º 414)

A) 1) $V_f = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{E}{p} = \dfrac{\frac{1}{2}mv^2}{mv} = \dfrac{1}{2}v$

2) $V_g = \dfrac{d\omega}{dk} = \dfrac{dE}{dp} = \dfrac{mvdv}{mdv} = v$

3) *De* $V_f = \dfrac{1}{2}v$ *e* $E = \dfrac{1}{2}mv^2 \left(= {}^{h}\!/_{2\pi}\,\omega\right)$

vem:

$$V_f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2E}{m}} \quad ou \quad V_f = \sqrt{\frac{h/2\pi}{m}} \cdot \sqrt{\omega}$$

B) $$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\, h/2\pi}{p} = \frac{2\pi\, h/2\pi}{\sqrt{2mE}};$$

ora, no sistema de Giorgi:

$$\begin{aligned} h/2\pi &= 1{,}04 \times 10^{-34} \text{ joule} \times \text{seg} \\ E &= 1 \text{ eV} = 1{,}6 \times 10^{-19} \text{ joule} \\ m &= 9{,}01 \times 10^{-31}\ kg; \end{aligned}$$

e daí resulta:

$$\lambda = \frac{2 \times 3{,}14 \times 1{,}04 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9{,}0 \times 10^{-31} \times 1{,}6 \times 10^{-19}}} \text{ m} = 1{,}2 \times 10^{-11} \text{ m}$$

$$\text{ou} \quad \lambda = 12 \text{ Å}$$

RESOLUÇÃO DO 3.º PROBLEMA (n.º 415)

Supondo tratar-se de uma onda monocromática (frequência angular ω*) e sendo* $\vec{K}$ *o versor das direcções* AB, *o campo pode representar-se, num mesmo instante* t:

a) *num ponto* V, *do plano* P_1, *entre as linhas* A_1B_1 *e* A_2B_2, *à distância* y *de* A_1B_1, *por:*

$$\vec{E}_V = 20 \operatorname{sen} \frac{\pi y}{a} e^{i\omega t} \vec{K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

b*) num ponto* T, *do plano* P_1, *entre as linhas* A_2B_2 *e* A_3B_3, *à distância* y' *de* A_2B_2, *por:*

$$\begin{aligned} \vec{E}_T &= 20 \operatorname{sen} \frac{\pi y'}{a} e^{i(\omega t - \pi)} \vec{K} = \\ &= -20 \operatorname{sen} \frac{\pi y'}{a} e^{i\omega t} \vec{K}. \end{aligned}$$

Ora, sendo y a *distância do ponto* T a A_1B_1, *tem-se* y' = y − a *e com isso*

$$\vec{E}_T = 20 \operatorname{sen} \frac{\pi y'}{a} e^{i\omega t} \cdot \vec{K};$$

reconhece-se que o mesmo se dá em todas as outras regiões entre as linhas A B *e conclue-se que a expressão* (1) *é válida para o campo em cada ponto do plano* P_1, *desde que* y *represente a distância do ponto a* A_1B_1.

Para um ponto U *do plano* Q, *cuja projecção sobre* P_1 *dista* y *de* A_1B_1, *a expressão do campo é, no mesmo instante* t*:*

$$\vec{E}_U = 20 \operatorname{sen} \frac{\pi y}{a} e^{i\left(\omega t - 2\pi \frac{x}{b}\right)} \vec{K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)}$$

traduzindo haver entre Q e P_1 *apenas uma diferenca de fase* $2\pi \frac{x}{b}$; *e esta mesma expressão é válida para todo, o ponto do espaço, escolhido um conveniente terno de referência* O x y z: *origem* O *em qualquer ponto de* A_1B_1, *eixo* Oz *coincidente com* A_1B_1, *eixo* Oy, *no plano* P_1, *perpendicular a* A_1B_1; *eixo* Ox *perpendicular ao plano* P_1.

Tal expressão representa uma onda que se propaga na direcção do eixo Ox, *no sentido positivo, com amplitude modulada na direcção do eixo* Oy; *ora esta onda pode interpretar-se como* a *sobreposição de duas ondas livres, de iguais amplitudes e frequências propagando-se segundo direcções do plano* xy, *cujos versores* $\vec{s_1}$ *e* $\vec{s_2}$ *fazem ângulos iguais com o eixo* Oy *e têm sentidos tais que o vector resultante* $\vec{s_1} + \vec{s_2}$ *é dirigido no sentido positivo do eixo* Ox.

Se for A, *o valor comum das amplitudes,* ω *o das' frequências,* V *a velocidade de propagação,* α *o ângulo que fazem* $\vec{s_1}$ *e* $\vec{s_2}$ *com o eixo* Ox, *a expressão do campo vem:*

$$\vec{E} = 2A \cos\left(\frac{\omega}{V} y \operatorname{sen} \alpha\right) e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{V} x \cos \alpha\right)} \vec{K} \qquad \text{(3)}$$

como resultante da sobreposição das duas ondas

$$\vec{E_1} = A e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{V} \vec{r}\vec{s_1}\right)} \vec{K}$$

e

$$\vec{E_2} = A e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{V} \vec{r}\vec{s_2}\right)} \vec{K}.$$

Para a identificação de (3) *com* (2) *é cómodo mudar, prèviamente, a origem de* O x y z *em* (2): *se* y *passa a ser no plano* P_1 *a distância de qualquer ponto à recta intermédia de* A_1B_1 *e* A_2B_2, *resulta:*

$$\vec{E}_U = 20 \cos \frac{\pi y}{a} e^{i\left(\omega t - 2\pi \frac{x}{b}\right)} \vec{K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2')}$$

Teremos então:

$$\left\{ \begin{aligned} 2A &= 20 \text{ volt/m} \\ \frac{\pi}{a} &= \frac{\omega}{V} \operatorname{sen} \alpha \\ \frac{2\pi}{b} &= \frac{\omega}{V} \cos \alpha \end{aligned} \right. \qquad \begin{pmatrix} a = 1 \text{ cm} \\ b = 2 \text{ cm} \end{pmatrix}$$

donde se tira:

$$\begin{aligned} A &= 10 \text{ volt/m} \\ \alpha &= 45° \\ \lambda &= 2\pi \frac{V}{\omega} = 1{,}41 \text{ cm} \end{aligned}$$

Resoluções de Noémio Marques