

## Acerca do número de imagens dadas pelos espelhos planos inclinados entre si

**1.** Encontra-se, nos Compêndios de Física elementar, uma fórmula matemática destinada a calcular o número de imagens dadas por dois espelhos planos, inclinados entre si, relativamente a um objecto colocado entre eles. Obtém-se esse número de imagens ( $n$ ) dividindo o número de graus da circunferência (360) pelo valor ( $\alpha$ ), em graus, do ângulo diedro que os espelhos formam entre si, e subtraindo uma unidade ao cociente obtido:

$$n = \frac{360}{\alpha} - 1$$

Se o referido ângulo diedro fôr, por exemplo, de  $90^\circ$ , divide-se 360 por 90, o que dá 4, e deste cociente subtrai-se uma unidade. O número de imagens será, neste caso, de 3.

Como o número de imagens fornecidas tem de ser, forçosamente, inteiro, logo se reconhece a reduzida utilidade daquela fórmula, que apenas poderá aplicar-se quando o valor do ângulo diedro dos espelhos fôr divisor de 360.

Quando o professor lecciona este assunto perante a sua turma, há sempre um aluno, ou mais do que um, que pretende saber qual é o número de imagens que se formam quando o ângulo diedro dos espelhos vale, por exemplo,  $50^\circ$ , ou  $80^\circ$ , ou, em suma, qualquer número de graus que não seja divisor de 360. Não sabemos que resposta dará o professor a esta pergunta. Falando por nós diremos que respondemos com hesitações e evasivas enquanto não tivemos oportunidade de conhecer a devida resposta. Agora, que julgamos conhecê-la, parece-nos útil comunicá-la a quem a desconheça.

**2.** O número de imagens fornecidas por dois espelhos planos, inclinados entre si, relativamente a um objecto colocado entre eles, depende de três factores:

- a) do valor do ângulo diedro que os espelhos formam entre si;
- b) do lugar que o objecto ocupa no campo limitado pelos espelhos;
- c) do lugar onde o observador se coloca para observar as imagens. <sup>(1)</sup>

Nas figuras que acompanham esta exposição representamos os espelhos planos por dois segmentos de recta,  $E_1$  e  $E_2$ , concorrentes num ponto  $O$ . O ângulo assim formado representará o ângulo diedro que os espelhos fazem entre si, os quais supomos serem normais ao plano do papel em que as figuras estão impressas. Representamos por  $P$  o objecto pontual de que os espelhos darão imagens. Como é sabido, todas as imagens pontuais formadas se situam numa circunferência de raio  $OP$  e centro em  $O$ . Chamamos «campo do objecto» ao sector circular que for limitado pelos raios que definem os espelhos  $E_1$ ,  $E_2$ , dentro do qual se supõe colocado o objecto  $P$ . Quanto ao observador admitiremos que fará as suas observações servindo-se apenas de um dos olhos, o qual, depois de escolhido o seu ponto de observação, poderá olhar livre-

<sup>(1)</sup> Os compêndios de Física elementar costumam omitir estas duas condições, *b*) e *c*), as quais são indispensáveis, mesmo no caso de o valor do ângulo dos espelhos ser divisor de 360, pois nem sempre, mesmo neste particular, é válida a fórmula matemática anteriormente citada. Só nos recordamos de um Compêndio onde se apontam estas três condições como necessárias para se poder dizer qual é o número de imagens formadas (*Lições de Física Experimental*, do professor Xavier de Brito, Lisboa, 1950).

mente em todas as direcções em torno desse ponto de observação. O campo de observação é o mesmo campo do objecto.

3. Começaremos por considerar o caso limite em que o ângulo dos espelhos vale  $180^\circ$ . Nesta condição os espelhos ficam na continuação um do outro, e tudo se passará como se fossem um só. Obter-se-á, portanto, uma imagem. Este caso está de acordo com a referida fórmula matemática.

4. Suporemos agora que os espelhos formam entre si ângulos sucessivamente inferiores a  $180^\circ$ , imaginando, para isso, que os fazemos rodar em torno do segmento de recta da sua intersecção. Considerando a figura no papel (fig. 1), imaginaremos que os segmentos  $E_1$  e  $E_2$  rodam em torno da sua intersecção  $O$ .

Assim que iniciarmos esse movimento de rotação, logo que os espelhos deixam de

situado entre  $E_1$  e  $B$  (prolongamento de  $E_2$ ); e nunca  $E_1$  e  $E_2$  poderão ser vistas simultaneamente. Se o observador se situar

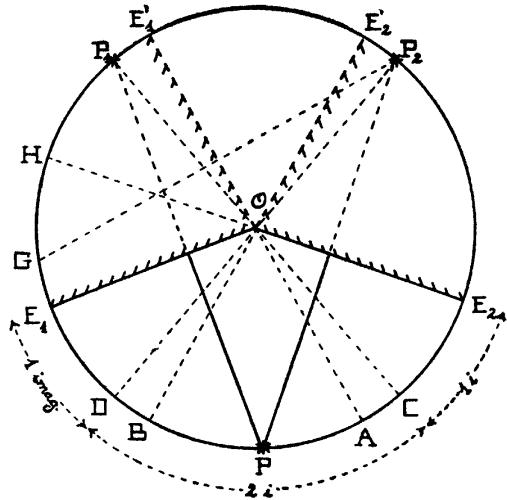


Fig. 2

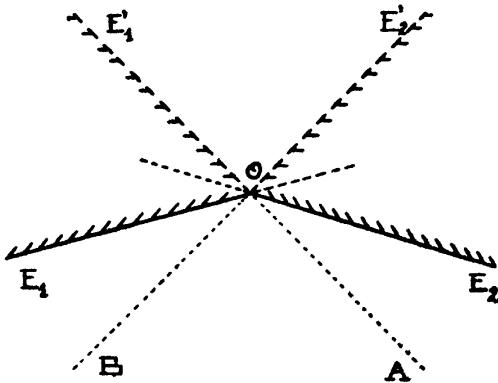


Fig. 1

estar na continuação um do outro ( $180^\circ$ ), imediatamente se torna possível observar a imagem  $E_1'$  (fig. 1) do espelho  $E_1$ , dada por  $E_2$ , assim como a imagem  $E_2'$  do espelho  $E_2$ , dada por

É claro que estas imagens virtuais dos espelhos não podem ser vistas de qualquer lugar do campo de observação. A imagem  $E_1'$  só pode ser vista do sector situado entre  $E_2$  e  $A$  (prolongamento de  $E_1'$ ); a imagem  $E_2'$  só pode ser vista do sector

entre  $A$  e  $B$  não poderá ver nenhuma das imagens,  $E_1'$  ou  $E_2'$ .

5. Consideremos então o objecto pontual  $P$ , situado entre  $E_1$  e  $E_2$ , e vejamos qual o número de imagens que os espelhos poderão assim fornecer. O ângulo dos espelhos escolhido para o exemplo da fig. 2, é de  $140^\circ$ . Para facilitar as conclusões vamos supor dois casos: a) que  $P$  está situado, na bissectriz do ângulo dos espelhos; b) que  $P$  está colocado fora dessa bissectriz.

a) —  $P$  está situado na bissectriz (fig. 2).

O espelho  $E_1$  dá a imagem  $P_1$  de  $P$ , e o espelho  $E_2$  dá a imagem  $P_2$  do mesmo  $P$ . Estas imagens,  $P_1$  e  $P_2$ , não são porém visíveis de todos os lugares em que o observador posse; estar colocado. De facto a imagem  $P_1$  não pode ser vista do sector  $COE_2$  (reparando em que  $OC$  é o prolongamento de  $OP_1$ ), assim como a imagem  $P_2$  não pode ser vista do sector  $DOE_1$  (pois  $OD$  é o prolongamento de  $OP_2$ ). Assim, considerando  $P$  na bissectriz, ver-se-á ape-

nas 1 imagem. ( $P_1$ ) quando, se olhar entre  $E_1D$ ; ver-se-ão 2 imagens ( $P_1$  e  $P_2$ ) quando se olhar entre  $DC$ ; e novamente só 1 imagem ( $P_2$ ) quando se olhar entre  $CE_2$ .

Quanto aos espelhos virtuais  $E'_1$  e  $E'_2$  nunca podem (com  $P$  na bissetriz) dar imagens das imagens  $P_1$  ou  $P_2$ . A imagem que  $E'_1$  daria de  $P_2$  (de  $P_1$  não poderia dar porque está «de costas» para ela) ficaria (em  $G$ ) fora do possível campo de observa-

$P_2$  se formar suficientemente perto de  $E'_1$  (fig. 3) já poderá suceder que a sua nova imagem ( $P_3$ ), dada por  $E'_1$ , venha cair dentro do campo de observação. É o que sucede quando  $P$  está situado fora da bissetriz do ângulo dos espelhos reais,  $E_1$ ,  $E_2$ , suficientemente perto de  $E_1$ , conforme mostra a figura 3. Nestas condições poderá o observador, conforme a região do campo em que se colocar, ver 1 imagem ( $P_1$ ), 2 ( $P_1, P_2$ ) ou 3 ( $P_1, P_2, P_3$ ).

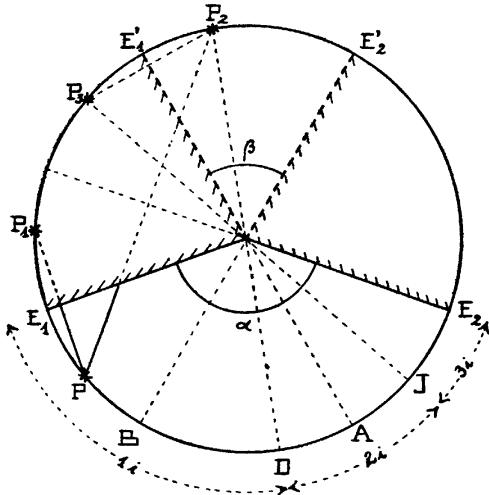


Fig. 3

ção. De facto o espelho  $E'_1$  só pode ser visto pelo observador colocado entre  $A$  e  $E_2$ , região esta a que corresponde uma zona virtual visível entre  $E'_1$  e  $H$ . O ponto  $G$  está fora dessa zona.

Analogamente, também  $E'_2$  não pode formar imagem de  $P_1$ .

Em resumo: com  $P$  situado na bissetriz podem observar-se ou 1 ou 2 imagens, respectivamente  $P_1$  ou  $P_2$ , e  $P_1$  e  $P_2$ .

b) — O objecto  $P$  está situado fora da bissetriz (fig. 3).

Mostrámos, na figura antecedente, que o espelho virtual  $E'_1$  (e análogamente diríamos de  $E'_2$ ) não pode formar uma nova imagem ( $P_3$ ) de  $P_2$  porque ela iria cair num ponto ( $G$ ) situado fora do possível campo de observação  $CE_2$ . Porém, se a imagem

**6.** Chegámos às conclusões anteriores tomando para exemplo um ângulo diedro dos espelhos de  $140^\circ$ . Estas mesmas conclusões são extensíveis a todos os valores que vão de  $180^\circ$  a  $120^\circ$  (com exclusão dos valores extremos).

Dissemos, no § 4, que assim que o ângulo dos espelhos começa a diminuir a partir de  $180^\circ$ , imediatamente se torna possível observar as imagens virtuais,  $E'_1$  e  $E'_2$ , de  $E_1$  e  $E_2$ . Designemos por  $\alpha$  (fig. 3) o ângulo dos espelhos  $E_1$  e  $E_2$ , e por  $\beta$  o ângulo das suas imagens  $E'_1$  e  $E'_2$ . À medida que  $\alpha$  diminui, também  $\beta$  diminui, como se reconhece considerando as figuras 2 e 3, e  $\beta$  anula-se quando  $\alpha = 120^\circ$ , isto é, à medida que o ângulo dos espelhos diminui desde  $180^\circ$  até  $120^\circ$ , os espelhos virtuais vão-se aproximando um do outro até coincidirem quando  $\alpha = 120^\circ$ , o que é, naturalmente, uma consequência da simetria das imagens fornecidas pelos espelhos planos, fácil de demonstrar geometricamente.

**7.** Em resumo: quando o valor do ângulo dos espelhos estiver compreendido entre  $180^\circ$  e  $120^\circ$  ( $180^\circ > \alpha > 120^\circ$ ) podem observar-se 1, 2 ou 3 imagens de um objecto colocado entre eles, o que depende da localização do objecto e da do olho do observador.

**8.** Consideremos agora  $\alpha = 120^\circ$  e separemos este caso também em dois, conforme  $P$  está situado ou não na bissetriz daquele ângulo.

a) — *P* está situado na bissetriz (Fig. 4).  
 Formam-se, neste caso, apenas 2 imagens,  $P_1$  e  $P_2$ , dispostas nos vértices de um

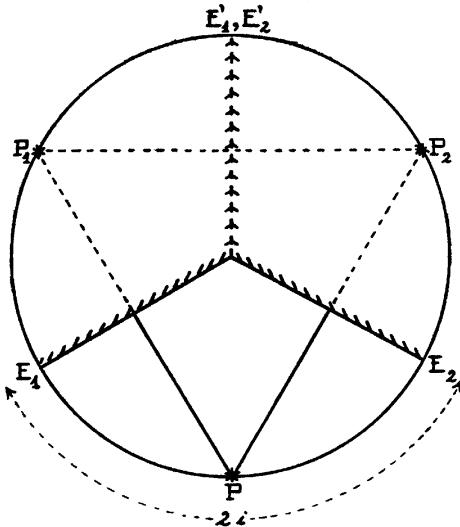


Fig. 4

triângulo equilátero cujo terceiro vértice é ocupado pelo objecto. A imagem de  $P_1$ , que seria dada pelo espelho virtual  $E'_2$ ; coincide com  $P_2$ ; e a de  $P_2$  que seria dada por  $E_1$ , coincide com  $P_1$ . Neste caso, qualquer que seja a posição em que o Observador se coloque, o número de imagens formadas é sempre 2.

b) — *P* não está situado na bissetriz (fig. 5)

Desde que o objecto *P* saia da bissetriz já as imagens de  $P_1$  e de  $P_2$ , que os espelhos virtuais,  $E'_1$  e  $E'_2$ , dariam, deixam de ser coincidentes respectivamente com  $P_2$  e  $P_1$ . Formar-se-ão assim novas imagens  $P_3$  (de  $P_1$ ) e  $P_4$  (de  $P_2$ ) que, aliás, não podem ser observadas simultaneamente. Se *P* ficar à esquerda da bissetriz (fig. 5) poderá ver-se a imagem  $P_4$  de  $P_2$ ; se ficasse à direita, poder-se-ia ver a imagem  $P_3$  de  $P_1$ .

Conforme a posição do observador o número de imagens observadas poderá ser 1 ( $P_1$ ), com o observador entre  $E_1$  e *A*

(pois *OA* é o prolongamento de  $OP_2$ ); 2 ( $P_1$  e  $P_2$ ) entre *A* e *B*; e 3 ( $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_4$ ) entre *B* e  $E_2$ .

9. Em resumo: quando o valor do ângulo dos espelhos é de  $120^\circ$  podem observar-se 1, 2 ou 3 imagens de um objecto colocado entre eles. Em particular, se o objecto estiver colocado na bissetriz dos espelhos ver-se-ão sempre 2 imagens (fig. 4), qualquer que seja a posição do observador. Esta particularidade corresponde ao resultado obtido quando se emprega a fórmula do § 1.

10. Continuando a diminuir o valor do ângulo  $\alpha$  dos espelhos (fig. 6) sucederá que os espelhos virtuais  $E'_1$  e  $E'_2$  (que eram coincidentes nos  $120^\circ$ , figs. 4 e 5) deixam de coincidir afastando-se um do outro como se continuassem o movimento de rotação (em torno de *O*) que vinham sofrendo desde que o ângulo  $\alpha$  começou a diminuir a partir de  $180^\circ$ . Em virtude deste movimento os

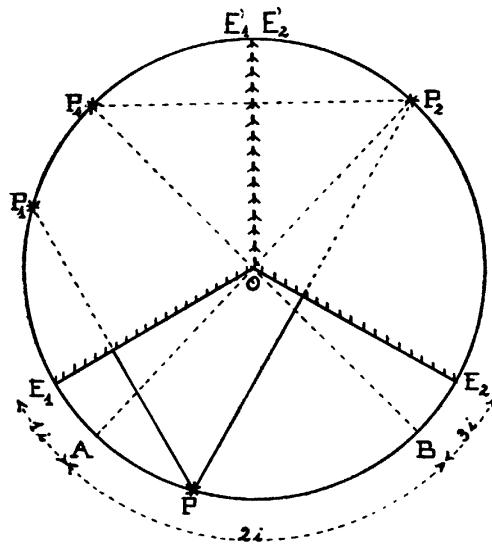


Fig. 5.

espelhos virtuais ficam agora «de costas» um para o outro (fig 6), enquanto no caso da figura 3 estavam «de frente» um para o outro. Daqui resulta que agora o observador pode ver *simultaneamente* os dois espelhos virtuais,  $E'_1$  e  $E'_2$ , enquanto anterior-

mente só podia ver ou um ou outro, consoante o lugar que ocupasse no seu campo de observação.

A fig. 6 exemplifica o que então se passa, recorrendo a um ângulo  $\alpha = 100^\circ$ . Como anteriormente consideraremos dois casos: o do objecto estar situado na bissectriz, e o de não estar.

a) — *P está situado na bissectriz (fig. 6).*

Como a figura mostra as imagens  $P_1$  e  $P_2$  podem ser vistas de qualquer ponto do campo de observação, o que já não sucede com  $P_3$  e  $P_4$ . A imagem  $P_3$  só se observa dentro do sector  $AOE_1$ , e  $P_4$  só se observa dentro do sector  $BOE_2$ . Neste caso, portanto, podem ver-se 2 ou 3 imagens, que

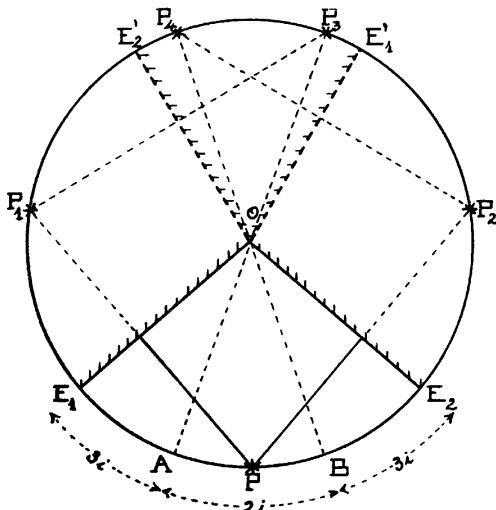


Fig. 6

são:  $P_1, P_2, P_3$ , entre  $E_1$  e A;  $P_1$  e  $P_2$ , entre A e B;  $P_1, P_2, P_4$ , entre B e  $E_2$ .

b) — *P está situada fora da bissectriz (fig. 7).*

Como se vê pela figura 7 tudo se passa como anteriormente apenas com a diferença de que os sectores  $E_1A, AB$  e  $BE_2$  ocupam superfícies diferentes. Acrescentaremos aqui somente um pormenor. O sector  $E_1OA$ , dentro do qual se tem que olhar para poder ver a imagem  $P_3$  (e então vêem-se

$P_1, P_2, P_3$ ) é tanto mais estreito quanto mais o objecto  $P$  estiver afastado da bissectriz do ângulo  $\alpha$  dos espelhos. Sendo assim, se aproximarmos  $P$  de  $E_1$  haverá um momen-

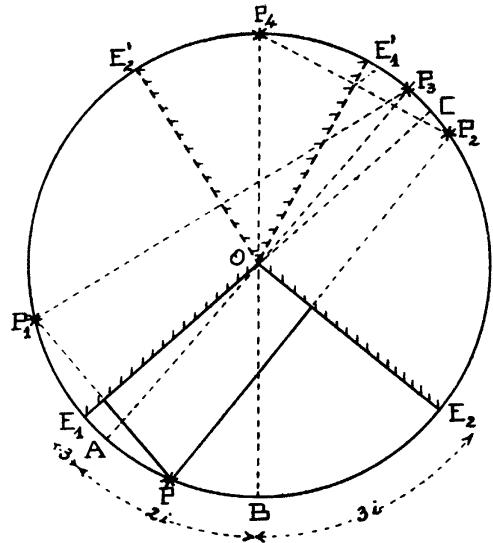


Fig. 7

to em que A coincide com  $E_1$  (estará então a imagem  $P_3$  em C, sendo OC prolongamento de  $OE_1$ , e esse será o limite da observação de  $P_3$ . Portanto, para as posições de  $P$  perto de  $E_1$  ver-se-ão apenas 2 imagens ( $P_1$  e  $P_2$ ) entre  $E_1$  e o ponto que então corresponde a B, e ver-se-ão 3 imagens ( $P_1, P_2, P_4$ ) nas restantes posições, de B a  $E_2$ .

**11.** Continuando a diminuir o ângulo  $\alpha$  dos espelhos as imagens  $E_1$  e  $E_2$  continuam a afastar-se uma da outra até ficarem normais entre si (fig. 8). Neste momento também os espelhos  $E_1$  e  $E_2$  estarão normais entre si, e as imagens virtuais dos espelhos ficarão no prolongamento dos próprios espelhos. Será  $\alpha = 90^\circ$ . Nestas condições as imagens  $P_3$  e  $P_4$  coincidem e o observador vê 3 imagens ( $P_1, P_2$  e  $P_3P_4$ ) quer o objecto esteja na bissectriz quer não esteja, e qualquer que seja o lugar em que o observador se coloque para ver as imagens. Estas ficarão situadas nos vértices de um quadrado (se  $P$  estiver na bissectriz,

fig. 8) ou no de um rectângulo (se  $P$  estiver fora da bissectriz, fig. 9).

Este caso é, portanto, um dos que correspondem ao possível emprego da fórmula indicada no § 1, pois  $90$  é divisor de  $360$ .

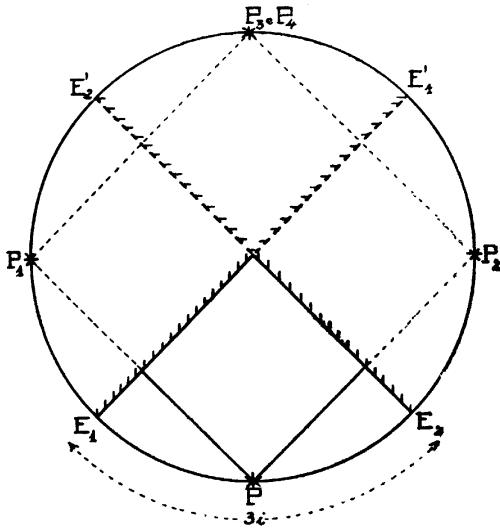


Fig. 8

12. Resumindo: quando o valor do ângulo dos espelhos está compreendido entre  $120^\circ$  (exclusive) e  $90^\circ$  (exclusive) podem observar-se

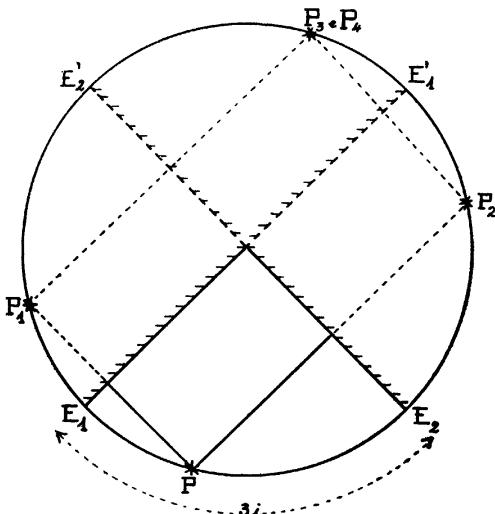


Fig. 9

2 ou 3 imagens de um objecto colocado entre eles. Quando o valor do ângulo é de  $90^\circ$  observam-se sempre 3 imagens quaisquer que sejam

as posições do objecto e do observador, caso este que corresponde ao da fórmula do § 1.

13. Apareceram-nos já dois casos em que o ângulo  $\alpha$  é divisor de  $360$  (caso dos  $120^\circ$  e dos  $90^\circ$ ) correspondentes a possíveis aplicações da fórmula do § 1. Há, entretanto, uma diferença que distingue esses dois casos. Quando o ângulo é de  $120^\circ$  é possível observarem-se 1, 2 ou 3 imagens (§§ 8 e 9) conforme as posições do objecto e do observador; quando o ângulo é de  $90^\circ$  vêem-se sempre 3 imagens, quaisquer que sejam as posições do objecto e do observador.

14. Continuemos a diminuir o ângulo dos espelhos, considerando, por exemplo,  $\alpha = 80^\circ$  (fig. 10).

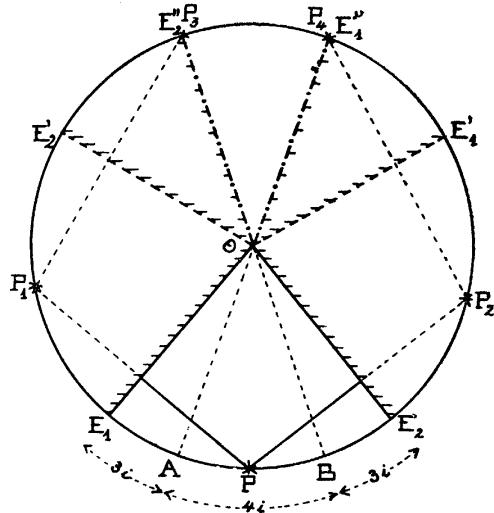


Fig. 10

Vão agora começar a repetir-se situações idênticas às que estudámos anteriormente. Para  $\alpha = 90^\circ$  os espelhos virtuais,  $E_1'$  e  $E_2'$ , ficavam, como vimos, nos prolongamentos dos respectivos espelhos reais,  $E_1$  e  $E_2$ ; mas assim que  $\alpha$  começa a diminuir, logo aquelas imagens virtuais saem dos prolongamentos em que estavam e começam a produzir novas imagens virtuais nos espelhos reais  $E_1$  e  $E_2$ . Repare-se na fig. 10 em que  $\alpha = 80^\circ$ . O espelho virtual  $E_2'$  dá, em  $E_2$ ,

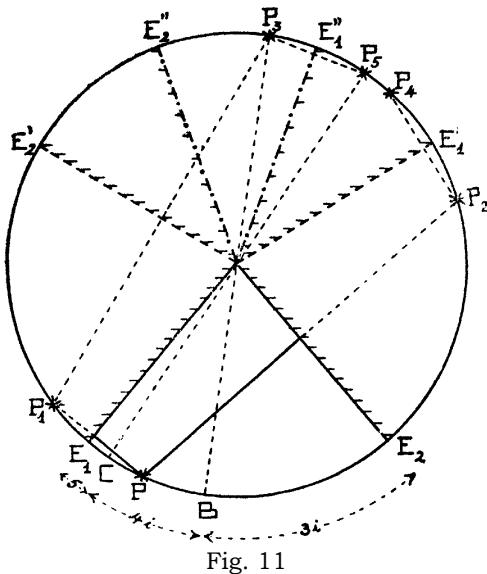
uma nova imagem virtual  $E''_2$ , assim como  $E'_1$  dá, em  $E_1$ , uma nova imagem virtual  $E''_1$ .

Temos agora, portanto, dois espelhos reais ( $E_1, E_2$ ) e quatro espelhos virtuais ( $E'_1, E'_2, E''_1, E''_2$ ). Os espelhos virtuais  $E'_1$  e  $E'_2$ , que estão «de frente» para o observador, são vistos sempre de qualquer lugar do campo, mas os novos espelhos virtuais,  $E''_1$  e  $E''_2$ , que estão «de costas» para o observador, só são vistos de certos lugares.  $E''_1$  só é visto do sector  $E_1OA$ ;  $E''_2$  só é visto do sector  $E_2OB$ .

Dito isto, vejamos qual o número de imagens que podem ser observadas, seguindo a mesma ordenação dos casos anteriores.

a)  $P$  está situado na bissetriz (fig. 10).

Como  $OA$  é o prolongamento de  $OP_4$  a imagem  $P_4$  deixa de se ver quando se olha



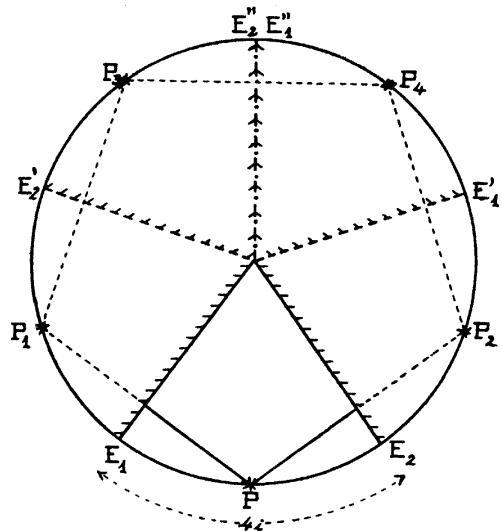
dentro do sector  $E_1OA$ , e análogamente para a imagem  $P_3$  relativamente ao sector  $E_2OB$ . Portanto, como a figura mostra, vêem-se 3 imagens ( $P_1, P_2, P_3$ ) olhando entre  $E_1$  e  $A$ ; 4 imagens ( $P_1, P_2, P_3, P_4$ ) olhando entre  $A$  e  $B$ ; e 3 imagens ( $P_1, P_2, P_4$ ) olhando entre  $B$  e  $E_2$ . Repare-se em que a imagem  $P_3$  (ou  $P_4$ ) pode vir a dar uma nova imagem,  $P_5$  (ou  $P_6$ ) no espelho virtual  $E''_1$  (ou  $E''_2$ ) que está de frente para

ela. No caso da figura 10 isto não pode verificar-se porque qualquer dessas possíveis imagens,  $P_5$  ou  $P_6$ , ficaria fora do campo de observação. Se, porém, o objecto estiver fora da bissetriz, próximo de qualquer dos espelhos reais ( $E_1$  ou  $E_2$ ) já isto poderá acontecer. É o caso que se segue.

b)  $P$  está situado fora da bissetriz

A figura 11 apresenta este caso em que é possível a observação de cinco imagens. Entre  $E_1$  e  $C$  vêem-se 5 imagens ( $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ ); entre  $C$  e  $B$ , vêem-se 4 imagens ( $P_1, P_2, P_3, P_4$ ); entre  $B$  e  $E_2$ , vêem-se 3 imagens ( $P_1, P_2, P_4$ ).

15. Se continuarmos agora, a diminuir o valor do ângulo  $\alpha$  dos espelhos (íamos em a  $80^\circ$ ), irá diminuindo também o ângulo que fazem entre si os dois novos espelhos virtuais,  $E''_1$  e  $E''_2$ . Quando o ângulo  $\alpha$  atingir  $72^\circ$  haverá coincidência destes dois espelhos (fig. 12). O objecto  $P$ , colocado



na bissetriz dos espelhos  $E_1$  e  $E_2$ , formará então 4 imagens ( $P_1, P_2, P_3, P_4$ ) situadas nos vértices de um pentágono regular, e ver-se-ão sempre as quatro imagens qualquer que seja a posição que o observador ocupe. Estamos assim novamente num caso

relativo à formula do § 1, pois 72 é divisor de 360.

Se, porém, o objecto  $P$  estiver colocado fora da bissectriz dos espelhos (fig. 13) po-

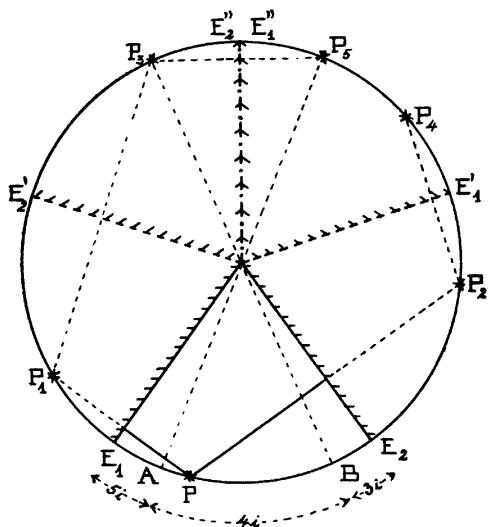


Fig.13

derá suceder que se veja mais uma imagem, a qual será a imagem  $P_5$  de  $P_3$  dada por  $E''_1$ , ou então a imagem  $P_6$  de  $P_4$  dada por  $E''_2$ , conforme o objecto  $P$  estiver para a esquerda ou para a direita da bissectriz considerada. Neste caso, como a figura mostra, ver-se-ão 5 imagens ( $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ ), olhando entre  $E_1$  e  $A$ ; 4 imagens ( $P_1, P_2, P_3, P_4$ ) olhando entre  $A$  e  $B$ ; e 3 imagens ( $P_1, P_2, P_4$ ), olhando entre  $B$  e  $E_2$ .

**16. Resumindo:** quando o valor do ângulo dos espelhos está compreendido entre  $90^\circ$  (exclusive) e  $72^\circ$  (exclusive) podem observar-se 3, 4 ou 5 imagens conforme as posições do objecto e do observador. Quando o valor do ângulo é de  $72^\circ$  podem igualmente observar-se 3, 4 ou 5 imagens. Como caso particular observar-se-ão apenas 4 imagens (para  $\alpha = 72^\circ$ ) qualquer que seja a posição do observador, quando objecto estiver colocado na bissectriz dos espelhos.

**17.** Continuando a diminuir o valor de  $\alpha$ , a partir dos  $72^\circ$ , (fig 14), os espelhos virtuais,  $E''_1$  e  $E''_2$ , começam a afastar-se entre si, «de costas» um para o outro.

Tomemos, para exemplo, o ângulo de  $66^\circ$ . Como a fig. 14 mostra, quando o objecto  $P$  está situado na bissectriz do ângulo dos espelhos reais, podem observar-se 4 ou 5 imagens, Vêem-se 5 imagens ( $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ ) quando se olha entre  $E_1$  e  $A$ ; 4

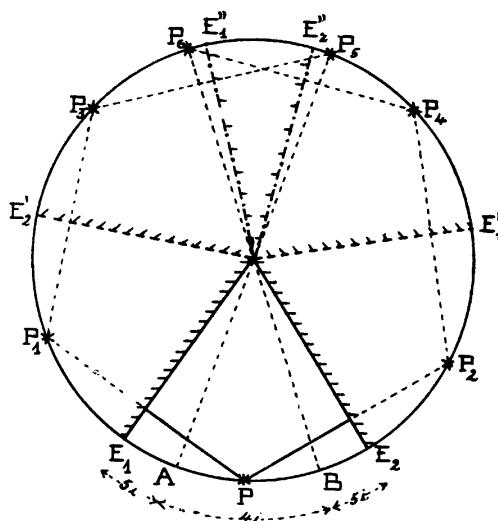


Fig. 14

imagens ( $P_1, P_2, P_3, P_4$ ), entre  $A$  e  $B$ ; e 5 imagens ( $P_1, P_2, P_3, P_4, P_6$ ), quando se olha entre  $B$  e  $E_2$ .

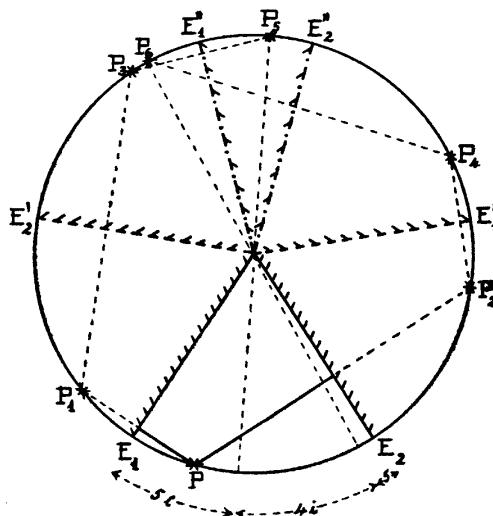


Fig. 15

Se  $P$  estiver situado fora da bissectriz (fig. 15) poderão observar-se, análogamente, 4 ou 5 imagens, conforme a figura mostra.

**18** — Continuando ainda a diminuir o valor do ângulo  $\alpha$  (fig. 16), continuarão a afastar-se os espelhos virtuais,  $E''_1$  e  $E''_2$ , até que, para  $\alpha$  igual a  $60^\circ$ , se colocam no prolongamento dos espelhos reais,  $E_1$  e  $E_2$ . Nestas condições, o objecto  $P$  colocado na bissetriz, do ângulo dos espelhos dá 5 imagens ( $P_1, P_2, P_5, P_4, P_{5,6}$ ) situadas nos vértices de um hexágono regular. Estas cinco imagens são sempre visíveis, qualquer que seja o lugar em que o observador se coloque.

Se  $P$  estiver fora da bissetriz, as cinco imagens ficam nos vértices de um hexágono

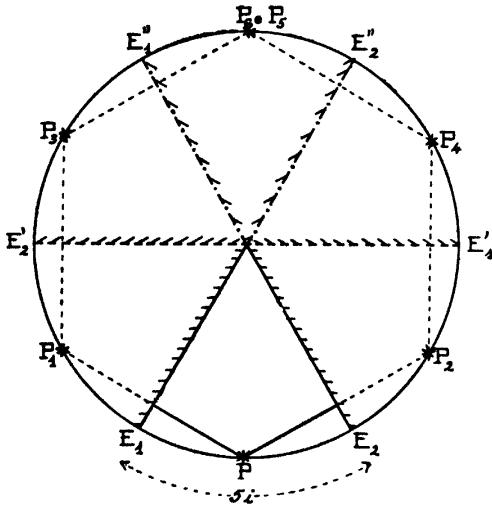


Fig.16

irregular, e são todas sempre observáveis qualquer que seja a posição do observador.

**19.** Resumindo: quando o valor do ângulo dos espelhos está compreendido entre  $72^\circ$  (exclusive) e  $60^\circ$  (exclusive) podem observar-se 4 ou 5 imagens conforme as posições do objecto e do observador. Quando o valor do ângulo é de  $60^\circ$  observam-se sempre 5 imagens, independentemente das posições do objecto e do observador.

**20.** Façamos um resumo geral dos resultados observados.

Ângulo dos espelhos ( $\alpha$ )	Número de imagens ( $n$ )
$180^\circ$	1
$180^\circ > \alpha > 120^\circ$	1, 2, 3
$120^\circ$	1, 2, 3
$120^\circ > \alpha > 90^\circ$	2, 3
$90^\circ$	3
$90^\circ > \alpha > 72^\circ$	3, 4, 5
$72^\circ$	3, 4, 5
$72^\circ > \alpha > 60^\circ$	4, 5
$60^\circ$	5

Por indução, poderíamos continuar este quadro do seguinte modo

Ângulo dos espelhos ( $\alpha$ )	Número de imagens ( $n$ )
$60^\circ > \alpha > \frac{360^\circ}{7}$	5, 6, 7
$\frac{360^\circ}{7}$	5, 6, 7
$\frac{360^\circ}{7} > \alpha > 45^\circ$	6, 7
$45^\circ$	7

o que se verificaria experimentalmente e geomêtricamente.

**Conclusões**

**21.** Da apreciação destes resultados concluímos que a fórmula matemática usada no ensino liceal (§1) para conhecer o número de imagens dadas pelos espelhos planos inclinados, qualquer que seja a posição do objecto e do observador, só é válida quando os espelhos fizerem entre si um ângulo cujo, valor seja  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$  de  $360^\circ$ , isto é, uma fracção  $\frac{360^\circ}{N}$  em que  $N$  é um número par (o que corresponde a  $180^\circ, 90^\circ,$

60°, 45°,...). Esse número de imagens corresponde ao número  $N - 1$ , e é sempre, portanto, um número ímpar.

Quando o valor do ângulo dos espelhos for  $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$  de  $360^\circ$  isto é uma fracção  $\frac{360^\circ}{N}$  em que  $N$  seja um número ímpar (o que corresponde a  $120^\circ, 72^\circ, \frac{360^\circ}{7}, \dots$ ), a fórmula matemática do § 1 servirá também para conhecer o número de imagens formadas *mas só no caso particular* de o objecto (pontual) estar situado na bissectriz do ângulo dos espelhos (§ § 9 e 16), sendo então esse número de imagens independente do lugar onde o observador estiver colocado.

Querendo generalizar diremos que o número de imagens formadas pode ser sempre dado pela fórmula do § 1, quando  $\alpha$  for

divisor de  $360^\circ$ , e o objecto (pontual) estiver situado na bissectriz do ângulo dos espelhos (para qualquer posição do observador).

22. Se o valor do ângulo dos espelhos não for divisor de  $360^\circ$ , as regras mais simples que conseguimos extrair do quadro anterior (§ 20) são as seguintes:

Dado o ângulo  $\alpha$  dos espelhos (em que  $\alpha$  não é divisor de  $360^\circ$ ) divide-se  $360^\circ$  por  $\alpha$  e consideramos apenas a parte inteira do cociente obtido, à qual chamaremos  $N$ . Se  $N$  for par, o número de imagens observáveis, poderá ser  $N - 1, N$ , ou  $N + 1$ , conforme as posições do objecto e do observador; se  $N$  for ímpar, o número de imagens observáveis poderá ser  $N - 1$  ou  $N$ .

RÓMULO DE CARVALHO

Professor metodólogo no Liceu Normal de Lisboa (Pedro Nunes)

## Algumas utilizações científicas dos satélites artificiais

Estamos a viver actualmente nos princípios da era dos satélites artificiais da Terra, e uma das questões que mais interessa considerar é a da avaliação dos benefícios que o lançamento de satélites artificiais, traz para o alargamento dos conhecimentos científicos.

Além das dificuldades de carácter técnico que têm de ser resolvidas para que o lançamento de um satélite seja coroado de êxito, ainda é necessário escolher cuidadosamente quais os problemas científicos a investigar, visto que as dimensões dos satélites são limitadas, de modo a instalar convenientemente os instrumentos utilizados nas referidas investigações.

Algumas das utilizações científicas dos satélites referem-se ao estudo das radiações de origem extra-terrestre que são absorvidas ou modificadas quando entram na atmosfera terrestre. Para termos uma ideia da importância destes estudos, consideremos

separadamente o caso das radiações luminosas e o caso das radiações corpusculares. No caso das radiações luminosas a fig. 1,

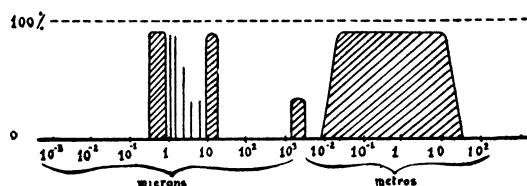


Fig. 1

em que se encontram marcados em abscissas os c. d. o. e em ordenadas a transparência da atmosfera, mostra-nos imediatamente quais são os c. d. o. que se podem observar à superfície da Terra. Verifica-se assim que só existem duas regiões que apresentam transparência apreciável a estas radiações e que estão situadas uma na região visível e infravermelha do espectro e a outra na região correspondente aos c. d. o. da T. S. F.