

O *Astroblaster* é um brinquedo constituído por três bolas colocadas num eixo, no qual pode deslizar uma quarta bola. Deixando o conjunto cair para o chão, a quarta bola é projectada a uma velocidade incrível. Neste artigo discutimos a física deste brinquedo e mostramos como ela nos leva desde as contas elementares até às fronteiras da investigação.

P. PATRÍCIO e J. P. SILVA
Instituto Superior de Engenharia de Lisboa,
R. Conselheiro Emídio Navarro, 1
1949-014 Lisboa

patricio@cii.fc.ul.pt
jpsilva@deea.isel.ipl.pt

BRINCANDO O ASTROBLAS

Há alguns meses um dos autores (JPS) comprou o brinquedo *Astroblaster* [1] ilustrado na Fig. 1. A bola maior está rigidamente ligada a um eixo. As duas bolas seguintes podem deslocar-se ao longo desse eixo, mas apenas até uma determinada altura, não podendo sair do eixo. Por último, a bola vermelha, mais pequena, desloca-se ao longo do eixo, podendo sair deste facilmente.



Fig. 1 - O *Astroblaster*

Se se largar o conjunto com as três bolas maiores, verifica-se que ele não volta à altura inicial depois de bater no solo. Se se largar apenas a esfera vermelha, acontece o mesmo. No entanto, se se introduzir a esfera vermelha no eixo (ver fig. 1), largando o conjunto, a bola vermelha é projectada para cima a uma velocidade incrível, atingindo mais de dez vezes a altura inicial.

Neste artigo discutimos os princípios físicos subjacentes a este brinquedo. Começamos por estudar a colisão de duas partículas que se movimentam ao longo de uma linha. Este problema obedece a duas leis de conservação: da energia e do momento linear. Dadas as velocidades iniciais e as massas das partículas podemos, assim, determinar as duas velocidades finais. Pelo contrário, quando temos mais do que duas partículas a movimentar-se numa linha, o número de equações mantém-se, o número de incógnitas aumenta e o problema é indeterminado. Para prosseguir necessitamos de mais alguma informação sobre o mecanismo do choque. Neste artigo consideramos duas possibilidades. Na primeira situação supomos que o choque global é composto por uma sucessão de choques entre duas partículas que ocorrem independentemente e sequencialmente e que as colisões são elásticas. Na segunda situação apresentada continuamos a admitir que as colisões são independentes e sequenciais, mas consideramos colisões inelásticas. A discussão destas questões é acessível a alunos do ensino secundário. Pensamos mesmo que este brinquedo e a sua discussão poderão ser interessantes e cativantes a este nível de ensino. Consideramos ainda o choque entre três partículas, supondo que este envolve simultaneamente as três partículas, com interações que obedecem ao modelo de Hertz. Isto é, utilizamos o modelo de Hertz para estudar o que acontece quando as co-

lões não são independentes e sequenciais, admitindo ainda que são elásticas. Discutimos de forma breve o efeito da gravidade e da visco-elasticidade sobre o modelo de Hertz. No final expomos algumas conclusões.

CHOQUE DE DUAS PARTÍCULAS

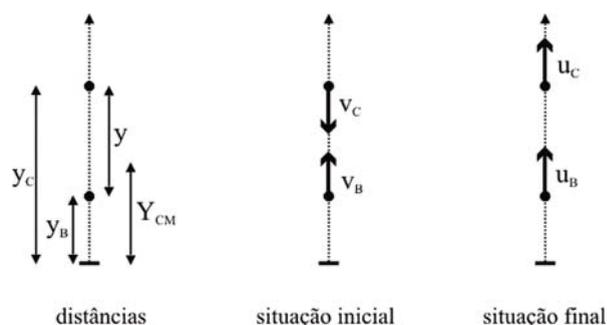


Fig. 2 - Colisão de duas partículas de massas m_B e m_C que se movimentam ao longo do eixo yy . Estão representadas ainda as coordenadas Y_{CM} (do centro de massa) e y (relativa).

Consideremos duas partículas de massas m_B e m_C que se deslocam ao longo do eixo yy , como mostra a Fig. 2. Os índices B e C referem-se à partícula que está em baixo e em cima, respectivamente.

As velocidades iniciais das partículas são v_B (para cima) e v_C (para baixo), respectivamente. Queremos saber quais as suas velocidades finais, u_B e u_C (ambas consideradas positivas para cima). Supondo que o choque é elástico, a conservação da energia e do momento linear obrigam a que

$$\frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} m_C v_C^2 = \frac{1}{2} m_B u_B^2 + \frac{1}{2} m_C u_C^2 \quad (1)$$

$$m_B v_B - m_C v_C = m_B u_B + m_C u_C \quad (2)$$

Resolver estas equações leva algum tempo mas é tecnicamente simples. A solução é:

$$u_B = \frac{(m_B - m_C) v_B - 2 m_C v_C}{m_B + m_C} \quad (3)$$

$$u_C = \frac{2 m_B v_B + (m_B - m_C) v_C}{m_B + m_C} \quad (4)$$

Existe uma forma alternativa de encontrar estas soluções, a partir das coordenadas do centro de massa Y_{CM} e relativa y , acessível a alunos do ensino secundário que já saibam trabalhar com derivadas. Utilizando estas coordenadas pode demonstrar-se que a velocidade relativa antes do choque é simétrica da velocidade relativa depois do choque [2].

Se o choque não for elástico, a Eq. (1), que descreve a conservação da energia, deixa de ser válida. Neste caso podemos introduzir uma grandeza fenomenológica, denominada coeficiente de restituição,

$$e = \frac{u_C - u_B}{v_B + v_C}, \quad (5)$$

que relaciona a velocidade relativa antes do choque e a velocidade relativa depois do choque. Combinando a Eq. (5) com a Eq. (2) que descreve a conservação do momento linear obtemos

$$u_B = \frac{m_B - e m_C}{m_B + m_C} v_B - \frac{m_C(1+e)}{m_B + m_C} v_C \quad (6)$$

$$u_C = \frac{m_B(1+e)}{m_B + m_C} v_B - \frac{m_C - e m_B}{m_B + m_C} v_C \quad (7)$$

As soluções (6) e (7) reduzem-se às soluções (3) e (4) quando $e=1$, isto é, quando há conservação da energia no choque.

COLISÕES INDEPENDENTES, SEQUENCIAIS E ELÁSTICAS

Vamos imaginar que largamos uma pilha de bolas, estando a bola de baixo a uma altura h_0 acima do solo. Esta pilha atingirá o solo com uma velocidade $v = \sqrt{2g h_0}$. Vamos estudar as colisões desta pilha de bolas que atinge o chão com velocidade inicial v , admitindo que cada colisão se dá instantaneamente e independentemente das restantes. Admitimos ainda que as colisões são sequenciais. Assim, começamos por considerar a colisão com o solo da esfera que está mais abaixo, deduzindo a sua velocidade final. Depois consideramos a colisão desta esfera com aquela que lhe está imediatamente acima. E assim sucessivamente...

COLISÃO COM O SOLO

A situação em que a primeira esfera, de massa m_1 , atinge o solo com velocidade $v_1=v$ pode ser obtida das Eqs. (3) e (4) tomando $v_C=v_1=v$, $v_B=0$, $m_B \rightarrow \infty$. Obtemos $u_B=0$

(isto é, o chão não se move) e $u_C=u_1=v$ (isto é, a partícula 1 volta para cima com a mesma velocidade v).

COLISÃO ENTRE A PARTÍCULA 1 E A PARTÍCULA 2

Supomos que só depois da colisão da primeira partícula com o solo se dá a colisão entre a primeira e a segunda partícula. Esta situação é novamente descrita pelas Eqs. (3) e (4), mas agora com $v_C=v$, $v_B=v$ e sub-índices $B=1$, $C=2$. Obtemos

$$u_1 = \frac{m_1 - 3 m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{1 - 3 m}{1 + m} v \quad (8)$$

$$u_2 = \frac{3 m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{3 - m}{1 + m} v, \quad (9)$$

onde introduzimos a grandeza adimensional

$$m = m_{21} = \frac{m_2}{m_1}, \quad (10)$$

que nos dá a massa da partícula que está por cima em unidades da massa da partícula que está por baixo. Aqui surge a primeira conclusão interessante: a partícula que está por cima não fica com uma velocidade final v , mas, pelo contrário, com velocidade final dada pela Eq. (9). Em particular, se a sua massa for muito menor do que a massa da partícula que está por baixo ($m \rightarrow 0$), então a sua velocidade final será $u_2=3v$, isto é, o triplo da velocidade inicial, atingindo assim a altura máxima (desprezando os diâmetros das esferas)

$$h_2 = \frac{u_2^2}{2g} = 9 \frac{v^2}{2g} = 9 h_0. \quad (11)$$

Concluimos que a partícula 2 subirá até atingir nove vezes a altura de onde foi largada inicialmente. Um ganho brutal! Em geral, o ganho em velocidade para esta segunda partícula é dado por

$$a = a_{21} = \frac{u_2}{v} = \frac{3 - m}{1 + m}, \quad (12)$$

cujo valor máximo ($a=3$) é atingido para $m=0$.

Embora a velocidade da segunda partícula depois da colisão possa ser superior, lembramos que a energia total das duas partículas se mantém constante. Isto acontece

devido a uma correspondente redução da energia cinética da primeira partícula.

COLISÃO ENTRE A PARTÍCULA 2 E A PARTÍCULA 3

Se tivermos mais partículas, basta repetir o procedimento. A partícula 3 tem velocidade v para baixo, a partícula 2 tem velocidade av para cima e, tomando $B=2$, $C=3$ nas Eqs. (3) e (4), obtemos

$$u_2 = \frac{a - (a+2)m}{1+m} v = \frac{a_{21} - (a_{21} + 2)m_{32}}{1+m_{32}} v \quad (13)$$

$$u_3 = \frac{1+2a-m}{1+m} v = \frac{1+2a_{21}-m_{32}}{1+m_{32}} v, \quad (14)$$

onde, agora, $m=m_{32}=m_3/m_2$. O ganho em velocidade para a terceira partícula é dado por

$$a = a_{32} = \frac{u_3}{v} = \frac{1+2a_{21}-m_{32}}{1+m_{32}} \quad (15)$$

amplificando o ganho a_{21} já obtido na colisão anterior. No caso em que a razão das massas entre as diferentes partículas é fixa, $m_{32}=m_{21}=m$, obtemos

$$a = a_{32} = \frac{7-2m-m^2}{(1+m)^2}, \quad (16)$$

cujo valor máximo ($a=7$) é atingido para $m=0$.

UMA LIÇÃO IMPORTANTE: A ESFERA DO MEIO É CRUCIAL

Imaginemos que temos duas esferas com massas 90 g e 10 g. Aplicando a Eq. (12) a este caso, obtemos um ganho em velocidade, $a_{21}=2,6$, a que corresponde um ganho em altura de 6,8.

Será que podemos melhorar este ganho introduzindo uma bola entre as duas? A resposta é afirmativa. Para ver isto, consideremos agora o caso $m_1=90$ g, $m_2=30$ g e $m_3=10$ g. Neste caso, $a_{21}=2$ e $a_{23}=3,5$, pelo que a bola mais leve subirá até 12,3 vezes a altura de onde foi largada inicialmente. Parece que podemos concluir que ter

uma bola pelo meio tem efectivamente o efeito de amplificar o ganho.

Mas, poderíamos estar preocupados com o facto de esse ganho poder resultar apenas de termos uma massa de 30 g + 90 g = 120 g em baixo e não de um ganho devido ao choque adicional obtido introduzindo mais uma esfera. Repetindo o exercício apenas com duas esferas de massas 120 g e 10 g obtemos $a_{21}=2,7$, pelo que o ganho em altura é de 7,3.

Assim, o efeito obtido no segundo exemplo não é dominado pelo acréscimo da massa (a_{21} passa apenas de 2,6 a 2,7 quando aumentamos a massa m_2 de 90 g para 120 g). A grande amplificação obtida no segundo exemplo é de facto dominada pelo choque adicional devido à introdução de mais uma esfera.

COLISÕES SUBSEQUENTES

Se a pilha tiver mais bolas, basta repetir o procedimento. Para cada novo choque utilizamos o ganho, a , encontrado no choque anterior e a razão, m , das massas envolvidas no novo choque, sendo as velocidades finais dadas pelas primeiras expressões das Eqs. (13) e (14). Este procedimento é seguido iterativamente.

No caso particular em que as razões entre as massas das sucessivas bolas têm o mesmo valor comum m , podemos encontrar uma expressão geral para o ganho $a_{n+1, n}$ obtido ao fim do n -ésimo choque entre duas bolas:

$$a = a_{n+1, n} = \frac{2^{n+1}}{(1+m)^n} - 1 \quad (17)$$

O valor máximo deste ganho é atingido quando $m=0$ (isto é, quando cada bola é muitíssimo mais leve do que a bola que está imediatamente por baixo dela), sendo dado por

$$a^{\max} = 2^{n+1} - 1 \quad (18)$$

O CASO DO ASTROBLASTER

O *Astroblaster* da Fig. 1 tem quatro bolas. Se a razão entre as massas das sucessivas bolas fosse muito pequena, obteríamos o ganho máximo (15 vezes) para a velocidade da bola mais pequena. Nesse caso, a bola mais leve atingiria 225 vezes a altura inicial!

As massas reais das esferas do *Astroblaster* foram medidas com precisão de 0,1g e constam da tabela 1.

Esfera a contar de baixo	Massa (g)
4ª	4,1
3ª	9,5
2ª	28,6
1ª	64,9

Tabela 1 - Massas das esferas do *Astroblaster* da Fig. 1.

Aplicando os passos discutidos anteriormente obtemos, sucessivamente, $m_{21}=0,44$, $a_{21}=1,78$, $m_{32}=0,33$, $a_{32}=3,17$, $m_{43}=0,43$ e $a_{43}=4,82$. Assim, a bola mais pequena deveria saltar até cerca de 23 vezes a altura inicial.

Na verdade, os choques não são elásticos nem instantâneos. São estas questões que passaremos agora a analisar.

COLISÕES INDEPENDENTES, SEQUENCIAIS E INELÁSTICAS

Para tratar este caso, seguimos o procedimento anteriormente descrito, utilizando agora as Eqs. (6) e (7). Na colisão da primeira partícula com o solo obtemos $u_1=e_1v$. Da colisão entre as partículas 1 e 2 resulta

$$u_1 = \frac{e_1 - (e_{21} e_1 + e_{21} + 1) m_{21}}{1 + m_{21}} v \quad (19)$$

$$u_2 = \frac{e_{21} + (e_{21} + 1) e_1 - m_{21}}{1 + m_{21}} v \quad (20)$$

Após a colisão entre as partículas 2 e 3 obtemos

$$u_2 = \frac{a_{21} - (e_{32} a_{21} + e_{32} + 1) m_{32}}{1 + m_{32}} v \quad (21)$$

$$u_3 = \frac{e_{32} + (e_{32} + 1) a_{21} - m_{32}}{1 + m_{32}} v \quad (22)$$

As Eqs. (19), (20), (21) e (22) generalizam as Eqs. (8), (9), (13) e (14), respectivamente. Para obter a velocidade u_{n+1} , resultante do choque entre as partículas $n+1$ e n , basta usar a Eq. (22), substituindo e_{32} por $e_{n+1,n}$, a_{21} por $a_{n,n-1}$ e m_{32} por $m_{n+1,n}$.

Se os sucessivos coeficientes de restituição forem todos iguais a um valor comum e e se as razões entre as massas das sucessivas bolas tiverem o mesmo valor comum (m) o ganho $a_{n+1,n}$ obtido ao fim do n -ésimo choque será dado por

$$a = a_{n+1,n} = \frac{(e+1)^{n+1}}{(1+m)^n} - 1 \quad (23)$$

cujo máximo, obtido para $m=0$, é

$$a^{\max} = (e+1)^{n+1} - 1 \quad (24)$$

As Eqs. (23) e (24) atingem os seus valores máximos quando o choque é elástico ($e=1$), caso em que se reduzem às Eqs. (17) e (18).

A tabela 2 inclui a comparação entre os ganhos em velocidade obtidos com um pequeno número de bolas, para vários valores de e .

Nº de bolas ($n+1$)	$e = 0,7$	$e = 0,8$	$e = 0,9$	$e = 1$
2	1,89	2,24	2,61	3
3	3,91	4,83	5,86	7
4	7,35	9,50	12,03	15

Tabela 2 - Ganhos em velocidade obtidos para diversos valores de e e vários números de bolas, tomando $m = 0$. Os valores foram aproximados à segunda casa decimal.

Mesmo para o menor coeficiente de restituição (que, se aplicado à queda de uma esfera isolada, corresponderia a que esta, depois de ressaltar no solo, voltasse apenas a $e^2=(0,7)^2 \approx 0,5$ vezes a altura inicial) a bola mais leve de uma pilha de 4 bolas atingirá 54 vezes a altura inicial. Suponhamos agora que as esferas do *Astroblaster* têm um valor comum para e , e usemos as massas da tabela 1. Aplicando iterativamente as Eqs. (20) e (22) obtemos para a quarta bola os ganhos em velocidade (e altura) constantes da tabela 3.

$e = 0,7$	$e = 0,8$	$e = 0,9$	$e = 1$
2,04 (4,16)	2,82 (7,96)	3,74 (14,01)	4,82 (23,27)

Tabela 3 - Ganhos em velocidade (altura) obtidos para o *Astroblaster* da tabela 1, para diversos valores de e . Os valores foram aproximados à segunda casa decimal.

Obviamente, quanto maiores forem os coeficientes de restituição dos diferentes choques, maiores serão os ganhos em velocidade e em altura.

Finalmente gostaríamos de salientar que o aumento da energia cinética da quarta bola se dá à custa da diminuição da energia cinética das restantes bolas.

Depois de realizarmos esta "brincadeira" procurámos na literatura resultados semelhantes. Encontrámos uma série de artigos que, embora em contextos e com profundidades diferentes, contêm alguns resultados parcelares referentes a cadeias de colisões e cuja consulta recomendamos [3-6].

COLISÕES NÃO INDEPENDENTES MAS ELÁSTICAS

Até agora admitimos que as colisões são independentes, sequenciais e instantâneas. Isto é, admitimos que a bola que está mais abaixo começa por chocar com o solo; que só depois se dá o choque entre essa bola e a seguinte; que só depois se dá o choque com a terceira; etc... E admitimos que todos estes choques são instantâneos. No entanto, é claro que isto não se passa assim: nem os choques são instantâneos, nem são sequenciais.

Com efeito, se uma esfera isolada atingir o solo, esta vai-se deformando até parar; e só depois irá recuperando a forma inicial até se separar novamente do solo. Este choque envolve um tempo de interacção que não é nulo. Admitindo que o choque é elástico, o processo pode ser descrito pelo chamado "contacto de Hertz" [7].

Consideremos o contacto elástico entre duas esferas homogéneas e isotópicas, de raios R_B e R_C , módulos de Young E_B e E_C e coeficientes de Poisson σ_B e σ_C , conforme ilustrado na Fig. 3. Os traços grossos representam os corpos elásticos deformados enquanto que os traços finos correspondem às posições virtuais das esferas, na ausência de contacto. A distância D entre os limites das esferas virtuais na direcção da colisão (ver Fig. 3) caracteriza a deformação das duas bolas.

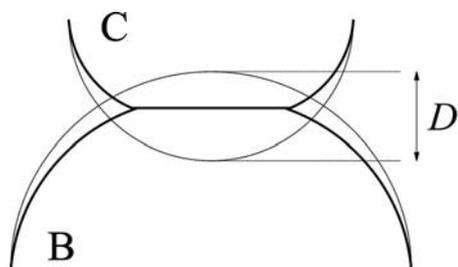


Fig. 3 - Colisão elástica entre duas esferas deformáveis.

O cálculo da energia elástica deste sistema é algo complicado, pois envolve conceitos de mecânica dos meios contínuos e uma análise geométrica do problema não trivial. No entanto, o resultado final é de uma aparente simplicidade: a energia potencial elástica da deformação é dada por [7]

$$E_P = \frac{2}{5} \eta r^{1/2} D^{5/2}, \quad (25)$$

onde

$$\eta = \frac{4}{3} \left(\frac{1 - \sigma_B^2}{E_B} + \frac{1 - \sigma_C^2}{E_C} \right)^{-1} \quad (26)$$

e

$$r = \frac{R_B R_C}{R_B + R_C} \quad (27)$$

é o raio reduzido. O expoente não usual na deformação (5/2) é devido à forma parabólica da esfera, junto à zona de contacto. A energia potencial (25) foi rigorosamente estabelecida para deformações quase-estáticas. No entanto, a sua utilização em problemas dinâmicos é justificável se as velocidades envolvidas no contacto forem muito inferiores à velocidade do som dos materiais utilizados para as bolas.

Feita a aproximação, designemos por v_i a velocidade relativa inicial das duas esferas e por

$$\mu = \frac{m_B m_C}{m_B + m_C} \quad (28)$$

a massa reduzida do sistema. O princípio da conservação da energia durante a colisão escreve-se³:

$$\frac{1}{2} \mu \left(\frac{dD}{dt} \right)^2 + \frac{2}{5} \eta r^{1/2} D^{5/2} = \frac{1}{2} \mu v_i^2 \quad (29)$$

A deformação máxima, D_{\max} , é atingida quando a velocidade relativa, dD/dt , é nula, sendo dada por

$$D_{\max} = \left(\frac{5 \mu}{4 \eta r^{1/2}} \right)^{2/5} v_i^{4/5} \quad (30)$$

O tempo de colisão corresponde ao tempo durante o qual a deformação vai de zero a D_{\max} e de volta a zero. Definindo $x = D/D_{\max}$, obtemos

$$\tau = 2 \left(\frac{25 \mu^2}{16 \eta^2 r v_i} \right)^{1/5} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{5/2}}} \approx 3,22 \left(\frac{\mu^2}{\eta^2 r v_i} \right)^{1/5} \quad (31)$$

As Eqs. (30) e (31) dão-nos as escalas de comprimento e de tempo relevantes para os problemas de colisão elástica⁴. Ao fim deste tempo τ , as esferas deixam de estar em contacto e o segundo termo do lado esquerdo da Eq. (29) anula-se. Assim, obtemos para as velocidades finais os mesmos resultados que obtivemos nas Eqs. (3) e (4), o que não poderia deixar de ocorrer, dado que continuamos a utilizar a conservação da energia envolvida apenas num choque.

Mas, o problema real não é caracterizado apenas pelo tempo finito das interações; também é caracterizado pelo facto de as colisões não serem sequenciais. Isto é, enquanto está a decorrer a colisão da primeira bola com o solo, está a decorrer a colisão entre a segunda bola e a primeira; e assim sucessivamente... Para simplificar o problema, consideremos apenas duas esferas a colidir com o solo, como ilustrado na Fig. 4.

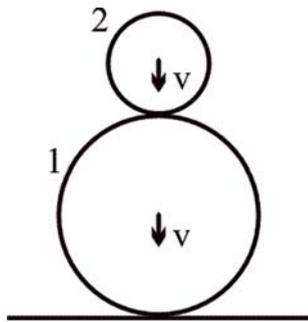


Fig. 4 - Colisão simultânea de uma esfera (1) com o solo e com outra esfera (2) que segue por cima dela com a mesma velocidade.

De acordo com a Eq. (25), a energia potencial elástica para o conjunto das duas colisões simultâneas é dada por

$$E_P = \frac{2}{5} \eta_{10} r_{10}^{1/2} D_{10}^{5/2} + \frac{2}{5} \eta_{21} r_{21}^{1/2} D_{21}^{5/2} \quad (32)$$

onde os sub-índices 10 e 21 se referem à colisão da bola que está por baixo com o solo e à colisão entre as duas bolas, respectivamente. Como a compressão não existe se os corpos não estiverem em contacto, devemos definir

$$D_{10} = H(R_1 - y_1) \quad (33)$$

$$D_{21} = H(R_1 + R_2 - (y_2 - y_1)) \quad (34)$$

em termos da função $H(x)$, que é dada por x para $x > 0$, anulando-se para $x \leq 0$. As variáveis y_1 e y_2 designam as alturas a que estão os centros das bolas inferior e superior (ver Fig. 2). As equações do movimento são:

$$m_1 \ddot{y}_1 = -\frac{\partial E_P}{\partial y_1} = \eta_{10} r_{10}^{1/2} D_{10}^{3/2} - \eta_{21} r_{21}^{1/2} D_{21}^{3/2} \quad (35)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = -\frac{\partial E_P}{\partial y_2} = \eta_{21} r_{21}^{1/2} D_{21}^{3/2} \quad (36)$$

No caso da colisão com o solo, admitindo que este é rígido, podemos substituir E_0 e R_0 por ∞ pelo que $3\eta_{10} = 4E_1/(1-\sigma_1^2)$ e $r_{10} = R_1$. Conclui-se que $\eta_{10} > \eta_{21}$ e $r_{10} > r_{21}$. Estas equações foram estabelecidas e estudadas pela primeira vez por um dos autores (PP) em [8].

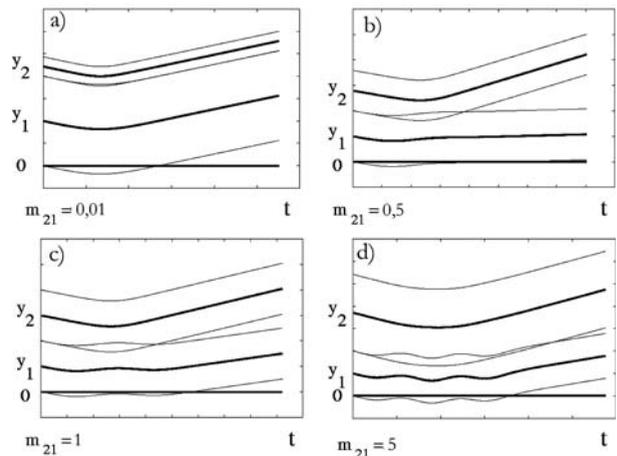


Fig. 5 - As linhas a negrito indicam as posições do CM das esferas em função do tempo (em unidades arbitrárias), bem como o solo. As linhas a traço fino indicam $y_1 \pm R_1$ e $y_2 \pm R_2$, para se visualizarem bem os tempos de interação.

Para simplificar, vamos supor que as duas esferas têm os mesmos coeficientes E e σ , bem como a mesma densidade. Nesse caso $R_2/R_1 = m_{21}^{1/3}$, $\eta_{21}/\eta_{10} = 1/2$ e $r_{21}/r_{10} = m_{21}^{1/3}/(1 + m_{21}^{1/3})$. A Fig. 5 mostra (a negrito) as posições dos centros das esferas em função do tempo, para diversos valores da razão m_{21} entre as massas, bem como a

linha horizontal definindo o solo. Nela estão também representadas (a traço mais fino) as linhas $\gamma_1 \pm R_1$ e $\gamma_2 \pm R_2$, o que permite visualizar facilmente os intervalos durante os quais se dão as interações.

A Fig. 6 mostra os resultados obtidos para as velocidades finais, em função da razão entre a massa da esfera que está por cima e a massa da esfera que está por baixo.

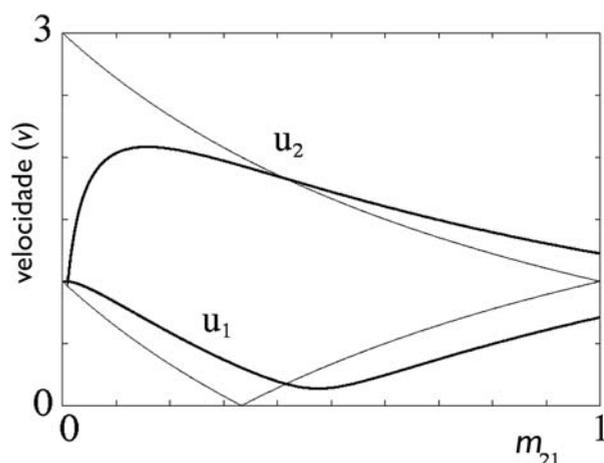


Fig. 6 - Representação das velocidades u_1 e u_2 (em unidades da velocidade comum com que as esferas atingem o solo) em função de $m=m_{21}$, a negrito. A traço fino indicamos os resultados obtidos admitindo que as colisões são independentes, (ver Eqs. (8) e (9)).

Estas figuras permitem-nos apreender várias características importantes:

1. Em certos intervalos de tempo as duas colisões têm lugar simultaneamente.
2. A bola inferior pode ser forçada pela bola superior a voltar para baixo, depois de já ter sido "empurrada" para cima pelo solo. Este efeito é particularmente claro na Fig. 5d onde se ilustra o caso em que a esfera superior é cinco vezes mais pesada do que a esfera inferior. Nesse caso, o CM da esfera inferior oscila entre o solo e a esfera superior várias vezes antes de finalmente se libertar do solo com velocidade u_1 .
3. Como se mostra na Fig. 6, as velocidades finais das duas bolas não coincidem exactamente com as obtidas quando assumimos que as colisões eram sequenciais - cujos valores foram deduzidos nas Eqs. (8) e (9). Isto não representa uma violação da lei de conservação da energia mas tão-só uma violação da hipótese de que os choques eram independentes e que seguiam a sequência adoptada. O que é preservado não é a energia de cada subsistema individualmente (solo - partícula 1 e partícula 1 - partícula 2) mas a energia do sistema total (solo - partícula 1 - partícula 2).

4. Em particular, quando $m_{21} \rightarrow 0$ a velocidade final da esfera de cima não é $3v$ mas apenas v .

5. Na situação que temos vindo a discutir a velocidade final da esfera de cima não é máxima para $m_{21}=0$, mas para um valor $m_{21}=m_M$ (ver abaixo).

6. Existe uma descontinuidade em u_1 , que reflecte o número de vezes que a partícula 1 colide com o solo. Da Eq. (8) podemos deduzir que a velocidade final da partícula 1 se anula para $m_{21}=1/3$. Se a razão das massas for inferior a este valor ($m_{21}<1/3$), a partícula 1 colide com o solo e em seguida com a partícula 2, continuando para cima depois do choque. Se, pelo contrário, $m_{21}>1/3$, a partícula 1 regressa uma segunda vez ao solo.

O ponto 4 é crucial e necessita de alguma explicação. A colisão de duas esferas com o solo (que pode, como já fizemos anteriormente, ser tratado como uma partícula de massa infinita) é uma colisão de três corpos. Assim, existem duas equações de conservação (do momento total e da energia total) e três incógnitas (as três velocidades finais). Ora, este sistema é indeterminado, admitindo uma infinidade de soluções que dependem dos detalhes exactos do choque entre os três corpos.

Ao considerarmos que as partículas caem juntas e que as interações são descritas pelo contacto de Hertz, os detalhes do choque ficam bem definidos, o que nos fornece a informação que falta para determinar todas as velocidades finais.

As Figs. 7 e 8 mostram dois possíveis detalhes do choque, para o caso em que a esfera de cima tem massa desprezável. Na Fig. 7 supomos que os choques são independentes sequenciais e elásticos.

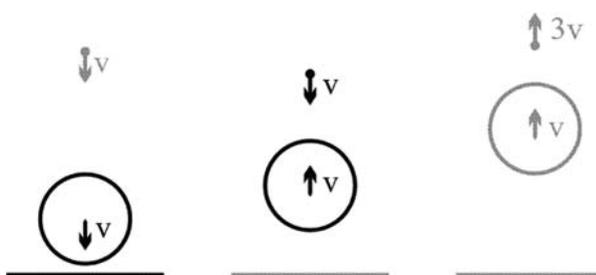


Fig. 7 - Hipótese utilizada inicialmente (colisões independentes sequenciais e elásticas) para a evolução do choque de duas esferas com o solo, assumindo $m_{21}=0$. A negro (cinzento) está a parte activa (passiva) do choque em cada passo. (A separação entre as esferas está exagerada para facilitar a visualização.)

Na Fig. 8 assumimos que as massas caem juntas e que, portanto, são "reflectidas" pelo solo em conjunto. É esta a previsão do modelo de Hertz anteriormente apresentado.

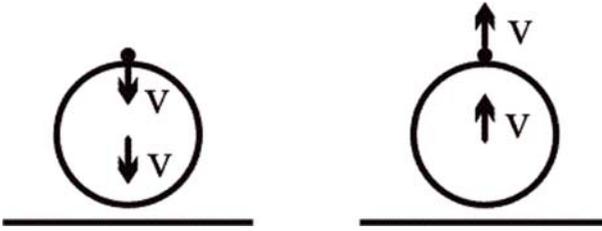


Fig. 8 - Resultado esquemático das previsões do choque de Hertz para a colisão de duas esferas com o solo, assumindo $m_{21}=0$.

Com efeito, se a massa de cima é desprezável ($m_2=0$), a Eq. (36) reduz-se a

$$0 = \eta_{21} r_{21}^{1/2} D_{21}^{3/2}, \quad (37)$$

onde $D_{21}=0$. Isto significa que a esfera de cima não vai exercer qualquer pressão na esfera de baixo quando esta é desacelerada pelo contacto com o solo. Nestas condições a Eq. (35) transforma-se em

$$m_1 \ddot{y}_1 = \eta_{10} r_{10}^{1/2} D_{10}^{3/2}. \quad (38)$$

Finalmente, dado que $D_{21}=0$ e $R_2=0$, concluímos que $R_1=y_2-y_1$, donde

$$\ddot{y}_2 = \ddot{y}_1 \quad (39)$$

e as bolas seguem "coladas" uma à outra. Uma situação muito próxima desta já é visível na Fig. 5 para $m_{21}=0,01$.

A situação da Fig. 8 já não é válida quando $m_2 \neq 0$ porque, nesse caso, a massa de cima exerce pressão sobre a massa de baixo quando do contacto com o solo, pelo que $D_{21} \neq 0$. É possível resolver as Eqs. (35) e (36) numericamente para encontrar o valor m_M da razão de massas m_{21} para o qual a velocidade final da partícula de cima é máxima: $u_2=u_{2M}$. Estes valores máximos dependem das propriedades das esferas através de⁵

$$k = \frac{\eta_{21} r_{21}^{1/2}}{\eta_{21} r_{10}^{1/2}} \quad (40)$$

O resultado deste estudo encontra-se na Fig. 9, que pode ser utilizada por qualquer pessoa interessada em construir um brinquedo semelhante ao da Fig. 1 por forma a conjugar as propriedades das esferas que produzam uma maior velocidade final para a esfera de cima.

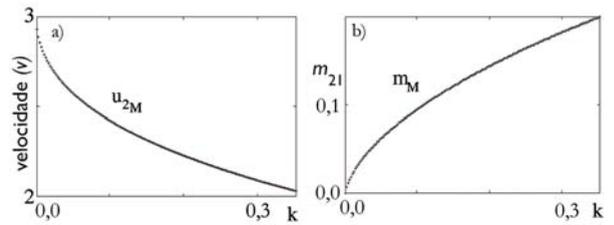


Fig. 9 - a) Valor máximo para a velocidade final da partícula de cima (em unidades da velocidade comum com que as esferas atingem o solo), em função de k . b) Valor da razão entre as duas massas para o qual a velocidade final da partícula de cima atinge o seu valor máximo, em função de k . Em geral, e ao contrário do que verificámos ao assumirmos colisões independentes e sequenciais, este máximo é atingido para $m_M \neq 0$.

SOBRE O EFEITO DA GRAVIDADE E DA VISCO-ELASTICIDADE

Na secção anterior ignorámos duas questões importantes: o facto de que a gravidade também actua durante o choque; e o facto de que existe dissipação da energia durante o choque. Estes factos foram estudados recentemente para o caso de uma esfera que colide com o solo [9]. Embora a discussão detalhada dessas questões esteja muito para além do âmbito deste artigo, gostaríamos de salientar alguns aspectos.

É fácil mostrar que, se todas as colisões com o solo fossem descritas por um coeficiente (e) constante, a esfera atingiria o repouso em tempo finito, mas apenas ao fim de um número infinito de colisões, o que não se observa. Utilizando os conceitos de mecânica dos meios contínuos para modelar a dissipação devida às propriedades visco-elásticas da esfera, pode-se demonstrar que à medida que a velocidade de impacto com o solo diminui, o coeficiente de restituição torna-se cada vez menor. Se a velocidade de impacto for muito pequena, o efeito da gravidade torna-se dominante, impedindo que a esfera perca o contacto com o solo. A partir deste instante, a esfera oscila sem sair do solo, e os efeitos de dissipação aumentam drasticamente.

CONCLUSÕES

Neste artigo discutimos os princípios físicos subjacentes ao funcionamento do *Astroblaster* (Fig. 1.) Supondo que as colisões são independentes, explicámos estes conceitos a um nível acessível aos alunos do ensino secundário. Acreditamos que será mais fácil motivar os alunos para o

estudo das colisões utilizando este brinquedo, do que "impor" as leis de conservação sem utilizar um exemplo adequado. Os resultados previstos e observados não poderiam ser mais surpreendentes: a bola que está mais acima sai disparada, na verdadeira acepção da palavra.

Estudámos em seguida o mecanismo de interacção, observando que as colisões se dão simultaneamente e que, portanto, o que interessa é a energia do sistema total. Como tal, descobrimos que as velocidades finais não são as previstas pelo modelo mais simples, podendo, nalguns casos, diferir consideravelmente das previsões anteriores.

Finalmente, referimos um artigo de investigação actual que aprofunda este estudo, incluindo os efeitos da gravidade e de dissipação que ocorrem durante uma colisão. Talvez esta seja a mensagem mais importante do nosso artigo. A física está à nossa volta e muitos fenómenos podem ser estudados com modelos crescentemente mais

detalhados e abrangentes. Neste processo, podemos pegar num brinquedo e ser levados rapidamente desde a física do secundário até à física mais avançada. Perguntar-nos-ão alguns alunos: então a Física afinal é uma brincadeira? Teremos que responder, talvez com algum embaraço, que sim!

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem aos colegas A.C. Barroso, A. Casaca, A. Nunes, A.J. Silvestre e J.M. Tavares a leitura atenta deste artigo bem como os seus comentários e sugestões sobre as questões aqui abordadas.

REFERÊNCIAS

- [1] Pode encontrar mais informação sobre o *Astroblaster* em www.fascinations.com.
- [2] Uma versão mais detalhada deste artigo pode ser encontrada em www.fisica.isel.ipl.pt/pedagogia/astroblaster.pdf, em cujo apêndice se refazem alguns cálculos, utilizando as coordenadas Y_{CM} e y .
- [3] W. R. Mellen, *Am. J. Phys.* **36**, 845 (1968).
- [4] W. G. Harter *et al.*, *Am. J. Phys.* **39**, 656 (1971).
- [5] J.D. Kerwin, *Am. J. Phys.* **40**, 1152 (1972).
- [6] J.S. Huebner e T. L. Smith, *Phys. Teach.* **30**, 46 (1992).
- [7] Ver, por exemplo, L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Theory of elasticity*, Pergamon, Oxford, 1986.
- [8] P. Patrício, *Am. J. Phys.* **72**, 1488 (2004).
- [9] E. Falcon, C. Laroche, S. Fauve e C. Coste, *Eur. Phys. J. B* **3**, 45 (1998).

NOTAS

¹ Como temos uma equação quadrática, existe outra solução: $u_B = v_B$; $u_C = -v_C$. No entanto, esta não tem significado físico pois nesse caso as partículas atravessariam mutuamente, mantendo as suas velocidades iniciais.

² Este caso não será trivialmente realizável pois e_1 refere-se ao primeiro choque com o solo, enquanto os restantes e_{ij} se referem a choques entre esferas.

³ Estamos aqui a usar a coordenada do CM e a coordenada reduzida. Nestas coordenadas a conservação do momento linear envolve apenas a coordenada do CM [2].

⁴ No caso do *Astroblaster*, $\mu \sim 10$ g, $r \sim 1$ cm, $h_0 \sim 1$ m. Se considerarmos $\eta \sim 10^9$ Pa, teremos $D_{\max} \sim 10^{-2n/5}$ m. Para os metais e materiais cerâmicos $n=11$, para os plásticos (polímeros) $n=9$, no entanto, para as borrachas o expoente pode facilmente atingir $n=6$. Neste caso D_{\max} é da ordem de vários milímetros.

⁵ Em geral, a análise das Eqs. (35) e (36) depende de dois parâmetros: $m_{21}=m$ e k . Nas Figs. 5 e 6 simplificámos o problema supondo que as duas esferas tinham E , σ

e densidade iguais; nessas condições $k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_{21}^{1/3}}{1+m_{21}^{1/3}}} < 1$

e a análise depende apenas de m_{21} . Agora discutiremos o caso geral.