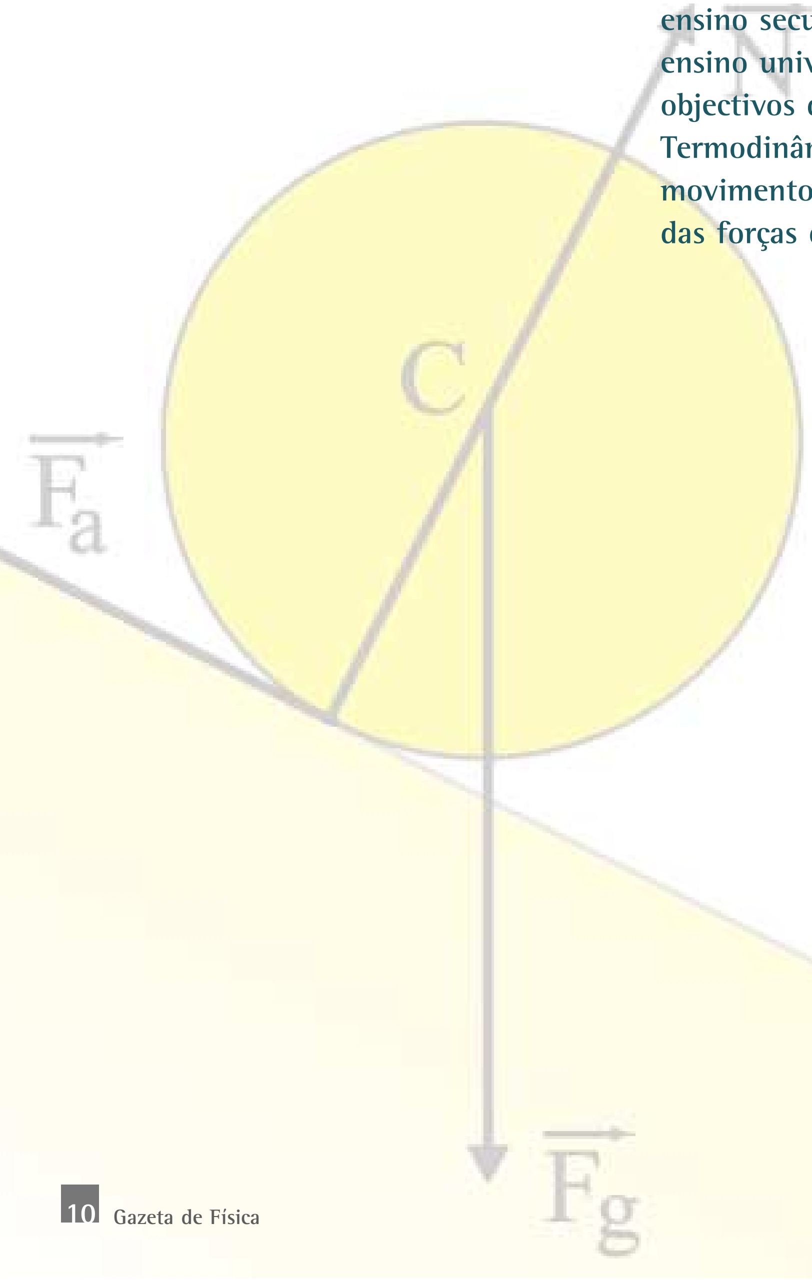
A lei de conservação da energia: aplicação ao rolamento com e sem deslizamento

Célia A. de Sousa *
Elisa P. Pina **

O estudo do movimento de sólidos de revolução incide, em geral, sobre corpos rígidos. As situações que envolvem efeitos dissipativos são quase sempre ignoradas, tanto no ensino secundário como em cursos introdutórios no ensino universitário. A inclusão destes efeitos é um dos objectivos deste trabalho. Conjugando a Mecânica com a Termodinâmica, obtém-se uma melhor compreensão do movimento daqueles sistemas. É discutido o papel decisivo das forças de atrito em corpos que rolam.



Introdução

O movimento de corpos que rolam constitui um dos temas mais interessantes em Física elementar. Este interesse resulta não só das aplicações práticas em variadíssimos instrumentos, mas também da necessidade de uma compreensão clara de conceitos importantes. Assim, este tipo de sistemas deve merecer especial atenção tanto no ensino secundário como em cursos universitários de ciências e engenharia. A experiência mostra que os alunos manifestam grandes dificuldades na apreciação desse tipo de movimentos. Os aspectos em que os alunos revelam maiores dificuldades são conhecidos e devem-se adoptar as metodologias mais adequadas em cada caso. Destacamos as dificuldades em relação à natureza das forças de atrito e ao seu papel no movimento de corpos que rolam. Verificámos que o facto de a maior parte dos manuais se limitar ao estudo do rolamento em planos inclinados contribui para as falsas concepções dos alunos. Sugerimos a discussão do movimento de corpos no plano horizontal, devido à sua importância didáctica neste contexto.

Os aspectos mecânicos e termodinâmicos do movimento de corpos que rolam, já explorados em [1], são aqui revisitados. Com esta abordagem, pretendemos também criticar a ênfase que é dada, nomeadamente no 12º ano, aos conteúdos de Mecânica, cujo aspecto fundamental é o da previsibilidade: dadas a posição e a velocidade inicial do corpo e conhecidas as forças que actuam sobre ele, pode inferir-se o seu movimento em qualquer instante. O método adoptado no presente trabalho, em que a Mecânica e a Termodinâmica são combinadas, pode ajudar os estudantes a atenuar a barreira entre estas duas áreas.

Por outro lado, num trabalho recente, Menigaux [2] concluiu que algumas das dificuldades na compreensão pelos estudantes dos movimentos em causa resultam de dois aspectos:

(i) eles têm dificuldade em entender que a translação e a rotação ocorrem simultaneamente;

(ii) e não compreendem que a translação de um corpo sólido não depende do ponto de aplicação das forças que actuam no corpo ou da ocorrência de rotação.

Comprovámos a existência destas mesmas dificuldades tanto em alunos do ensino secundário como universitários. Propomos aqui sugestões didácticas, tanto analíticas como gráficas, que podem ajudar os alunos nestas questões.

Assim, o principal objectivo deste artigo consiste em discutir o movimento de objectos sólidos de revolução (esferas ou cilindros) que rolam no plano horizontal e em planos inclinados, confrontando os resultados obtidos nas duas situações. Analisaremos aspectos de Mecânica e de Termodinâmica, salientando que os segundos são praticamente ignorados nos cursos introdutórios de Física.

Abordaremos os seguintes tópicos:

(i) condições para o corpo rolar com e sem deslizamento;

(ii) papel das forças de atrito em corpos que rolam;

(iii) escolha do sistema para aplicar a primeira lei da Termodinâmica;

(iv) importância dos aspectos termodinâmicos de modo a justificar as condições para o corpo rolar com e sem deslizamento.

Verificámos que estes tópicos são úteis para motivar a discussão entre os alunos, contribuindo para aprofundarem as leis de Newton e as leis da Termodinâmica.

Explanaremos, de seguida, as metodologias adoptadas, onde se incluem relações cinemáticas e as leis da Termodinâmica. Depois, aplicaremos o formalismo ao movimento de um corpo sólido de revolução no plano horizontal e no plano inclinado, analisando as condições em que pode ocorrer rolamento puro e rolamento com deslizamento. Finalmente, discutiremos os resultados.

Método geral

Uma vez que as sugestões aqui apresentadas se destinam a alunos do ensino secundário ou dos primeiros anos do ensino universitário, iremos usar o formalismo newtoniano.

1. Leis de Newton e relações adicionais

Os aspectos cinemáticos de um corpo sólido são, em geral, apresentados analiticamente a partir das leis de Newton, que podem ser escritas

$$\vec{F}_{ext}=m\,\vec{a}_{cm} \qquad (1)$$

$$\vec{M}=I\,\vec{\alpha} \qquad (2)$$

onde $\vec{F}ext$ é a resultante das forças que actuam no corpo de massa m, $\vec{a}_{cm}$ é a aceleração do centro de massa (CM), $\vec{M}$ é o momento resultante em relação ao CM, I é o momento de inércia em relação ao CM e $\vec{\alpha}$ é a aceleração angular.

As Eqs. (1) e (2) podem ser insuficientes para calcular as quantidades desconhecidas. É comum recorrer a duas relações adicionais: uma entre a velocidade (aceleração) linear e a velocidade (aceleração) angular e outra entre a força normal e a força de atrito. No entanto, é necessário saber em que condições essas relações se podem usar e qual é o seu significado.

Por exemplo, há que ter cuidado com as relações entre os módulos da normal, N, da força de atrito, F_a, e os coeficientes de atrito estático, μ_e, e de atrito dinâmico, μ_d.

No rolamento sem deslizamento (rolamento puro):

$$F_a<\mu_e N\,, \qquad (3)$$

e, no limite de deslizamento, i.e., quando o objecto está na iminência de rolar e deslizar simultaneamente:

$$F_a=\mu_e N\,. \qquad (4)$$

Nestes dois casos é válida a condição de **rolamento puro**, que se pode escrever

$$v=v_{cm}=r\omega\,, \qquad (5)$$

com $v=dx_{CM}/dt$ e $\omega=d\theta/dt$ as velocidades linear e angular do corpo respectivamente. Para clarificar a Eq. (5) é útil sugerir aos alunos que comparem o deslocamento linear do CM, Δx_{cm}, com o comprimento do arco $r\ \Delta\theta$ (sendo θ expresso em radianos). Num dado intervalo de tempo, o deslocamento do CM é igual ao comprimento do arco descrito por um ponto da periferia. Por outro lado, no rolamento com deslizamento,

$$F_a = \mu_d N \quad , \tag{6}$$

e a Eq. (5) deixa de se verificar.

2. Equações para a translação e rotação

Integrando as equações de Newton obtêm-se relações cinemáticas. A integração da Eq. (1) no espaço permite obter a variação da energia cinética de translação T_t

$$W_{cm} = \int \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{x}_{cm} = \Delta\left(\frac{1}{2} m v_{cm}^2\right) = \Delta T_t \tag{7}$$

onde o papel do CM deve ser realçado. Considera-se que as forças envolvidas nesta equação estão aplicadas no CM, pelo que as diferentes parcelas não representam necessariamente trabalho real. Por este motivo, alguns autores [3,4] designam a Eq. (7) por "equação do pseudo-trabalho" (a denominação "equação do CM" é, porém, a mais vulgar). Em muitas situações, há vantagens matemáticas em usar este tipo de equações cujo conteúdo e significado físico devem ser claramente explicados aos alunos.

Aplicações a este nível, tanto para o ponto material (para o qual é válido o teorema do trabalho-energia, $W = \Delta T$) como para objectos reais com movimento de translação, são compatíveis com o programa do 10º ano [5].

Podemos também integrar a Eq. (2) no ângulo θ, o que conduz a uma equação análoga à Eq. (7), mas agora para a rotação em relação ao CM:

$$\int M \, d\theta = \int I\alpha \, d\theta = \Delta\left(\frac{1}{2} I\omega^2\right) = \Delta T_r . \tag{8}$$

Esta equação, pouco usada, descreve a variação da energia cinética de rotação. Usámos $\alpha = d\omega / dt$..

Apesar de só darem informação sobre aspectos mecânicos do sistema, as Eqs. (7) e (8) são válidas quer se trate ou não de um corpo rígido. O conceito de corpo rígido, idealização conveniente em muitos problemas, tem de ser abandonado quando actuam certas forças. É o que acontece, nos exemplos aqui abordados, sempre que está presente uma força de atrito cinético. Neste contexto:

(i) quando não actuam forças dissipativas, as Eqs. (7) e (8) conduzem à conservação da **energia mecânica**;

(ii) quando actuam forças dissipativas, as equações referidas só dão informação cinemática, sendo úteis na explicitação de certos aspectos do problema.

No último caso, ocorrem variações de energia interna resultantes do movimento vibracional. De facto, a energia cinética vibracional só é nula se o corpo for rígido. Para contabilizar as variações de energia deve recorrer-se ao princípio de conservação da energia, que não resulta das leis dinâmicas do movimento como acontece com as equações descritas nesta secção.

3. Lei de conservação da energia

Sempre que ocorre deslizamento de um corpo sobre uma superfície surgem efeitos dissipativos que implicam a diminuição de energia mecânica do corpo. Esta diminuição da energia mecânica manifesta-se macroscopicamente no aumento da temperatura do corpo e da superfície sobre o qual ele desliza.

Recorremos à lei de conservação de energia para contabilizar todas as transformações de energia: a energia pode ser transformada de uma forma noutra, mas a energia total de um sistema isolado conserva-se. É fundamental definir o sistema ao qual vamos aplicar a lei de conservação de energia. Nos exemplos aqui abordados, o sistema é constituído pelo corpo, pela superfície de contacto e pela Terra. Para este sistema isolado,

$$\Delta E = \Delta T + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = 0, \quad , \tag{9}$$

onde ΔE é a variação de energia total do sistema (cinética + potencial + interna). De facto, neste sistema as forças de atrito são internas. Por isso, não temos que nos preocupar com o que se passa na interface entre o corpo e a superfície de contacto.

A lei de conservação de energia pode apresentar ainda um aspecto mais geral – primeira lei da Termodinâmica

$$\Delta E = \Delta T + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = Q + W, \quad , \tag{10}$$

onde W e Q representam as energias transferidas para o sistema sob a forma de trabalho e de calor. Para sistemas termodinâmicos em que $\Delta T = \Delta U = 0$, a Eq. (10) vem

$$\Delta E = \Delta E_{\text{int}} = Q + W. \tag{11}$$

Porém, consideraremos nula a energia transferida sob a forma de calor e de trabalho, pelo que utilizaremos a Eq. (9).

A energia interna, observável macroscopicamente através da temperatura, distribui-se entre as partículas do sistema de um modo imprevisível para um observador macroscópico.

Aplicações

Aplicaremos a metodologia anterior a corpos que rolam, começando por estudar o movimento de um corpo sólido de revolução homogéneo (uma esfera ou um cilindro) de massa m e raio r sobre um plano horizontal.

Analisaremos as condições de rolamento, com e sem deslizamento, e o papel das forças de atrito em cada caso.

De seguida, consideraremos a situação em que o objecto se move sobre um plano inclinado. Este último caso é quase sempre abordado numa situação em que o corpo rola sem deslizar. Em geral, é aplicado o princípio da conservação da energia mecânica e calcula-se o coeficiente de atrito estático mínimo entre o plano e o objecto para que este role sem deslizar. Vamos mostrar que a aplicação das equações do CM, (7) e (8), e da lei de conservação de energia (9) permite uma abordagem diferente, contemplando situações onde há efeitos dissipativos.

1. Movimento no plano horizontal

O corpo sólido é lançado inicialmente num ponto O no plano horizontal de tal modo que os valores iniciais das velocidades linear e angular são, respectivamente, $v_0 = V$ e $\omega_0 = 0$. É conhecido o coeficiente de atrito dinâmico entre o corpo e a superfície horizontal. Analisaremos as diferentes fases do movimento.
Tendo presentes as condições iniciais de v e ω, cujos sentidos positivos estão indicados na Fig. 1, o corpo vai rolar e deslizar simultaneamente durante a primeira fase do movimento.

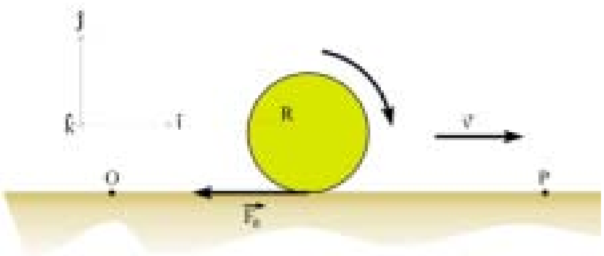


Fig. 1 Corpo sólido que rola e desliza num plano horizontal.

Verifica-se a lei clássica de atrito:

$$F_a = \mu_d N = \mu_d m\, g. \qquad (12)$$

A partir da equação do CM (7) obtemos

$$-F_a x_{cm} = \frac{1}{2} m\,(v^2 - V^2), \qquad (13)$$

em que o primeiro membro não representa trabalho real uma vez que se considera a força de atrito aplicada no CM. Dado que $x_{cm} = Vt - \frac{1}{2} a_{cm} t^2$, em que $a_{cm} = \mu_d g$ (a força de atrito é a resultante das forças exteriores), obtém-se, da Eq. (13), a lei para a velocidade do CM

$$v = V - \mu_d g\, t, \qquad (14)$$

resultado óbvio dado que a aceleração do CM é constante.

Fazendo um tratamento semelhante para a rotação em relação ao CM obtém-se, da Eq. (8),

$$F_a r \theta = \frac{1}{2} I \omega^2, \qquad (15)$$

em que θ é o ângulo correspondente ao total de voltas desde que o objecto começou a rolar (ponto O da Fig. 1).

Dado que $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$ sendo a aceleração angular α facilmente calculada a partir da lei de Newton para a rotação (Eq. (2)), obtém-se da Eq. (15)

$$r\omega = \frac{\mu_d g}{\lambda} t, \qquad (16)$$

em que λ resulta de se ter escrito o momento de inércia em relação ao eixo de revolução que passa no CM na forma $\lambda m r^2$ (λ = 1, 1/2, 2/5, para um aro cilíndrico fino, um cilindro sólido e uma esfera, respectivamente).

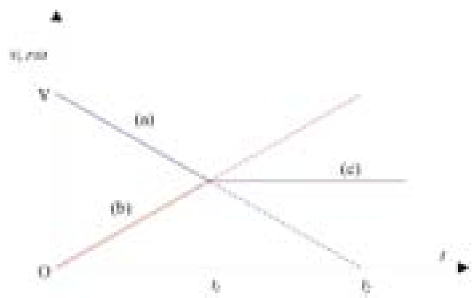


Fig. 2 Velocidade linear e angular em função de t. A curva (a) refere-se à translação, (b) à rotação e (c) à translação e rotação. Até ao instante t_1 o objecto rola e desliza simultaneamente $v > r\omega$. A partir desse instante, (c) o objecto rola sem deslizar.

A Fig. 2 mostra v e $r\omega$ em função do tempo. Nesta primeira fase do movimento, a velocidade linear decresce linearmente enquanto $r\omega$ cresce linearmente com t. De facto, nesta fase do movimento, $v > r\omega$, pelo que não se verifica a condição de rolamento puro (5). O objecto rola e desliza simultaneamente, o que permite aplicar a lei clássica de atrito. A força de atrito retarda a translação do CM, e o seu momento em relação ao CM faz aumentar a velocidade angular .
O instante t_1, em que se verifica $v = r\,\omega$ (ponto P), pode ser facilmente calculado usando as Eqs. (14) e (16).
Como complemento à análise do movimento, tanto até t_1 como depois, vamos considerar a primeira e a segunda leis da Termodinâmica.
Durante o intervalo de tempo $(0,t_1)$ o objecto rola e desliza simultaneamente, havendo processos dissipativos. De facto, existe movimento relativo entre o objecto e a superfície horizontal e a força de atrito opõe-se à velocidade relativa. A energia, que contribui para a subida da

temperatura das superfícies em contacto, pode ser calculada usando a primeira lei da Termodinâmica na forma da Eq. (9).

De facto, escolhendo o sistema “objecto + superfície horizontal + Terra” para calcular a energia total dissipada, obtemos, a partir das Eqs. (13), (15) e (9)

$$\Delta E_{\text{int}} = F_a (x_{cm} \text{-} r\theta). \qquad (17)$$

Esta equação mostra que, enquanto a força de atrito actuar no mesmo sentido $(F_a > 0)$, a condição $x_{cm} > r\theta$ permanece válida. Caso contrário, a variação da energia interna seria negativa, violando a segunda lei da Termodinâmica.

Passemos agora a analisar o movimento a partir do instante t_1. Alguns estudantes, confrontados com esta situação, sugerem que as Eqs. (14) e (16) são válidas mesmo para $t > t_1$, i.e., $v < r\,\omega\,(x_{cm} < r\theta)$, como indicam os prolongamentos (a tracejado) dos segmentos (a) e (b) da Fig. 2. Para clarificar este ponto basta mostrar, a partir da Eq. (17), que essa hipótese é incompatível com a segunda lei da Termodinâmica. A condição $x_{cm} > r\theta$ (rolamento puro) é assim a única possível, tendo-se $\Delta E_{int} = 0$.

Nesta fase do movimento não existem efeitos dissipativos. A **conservação da energia mecânica** leva a que a energia cinética total do corpo que rola seja constante, i. e., $v = r\,\omega$ = constante e, portanto, a força de atrito é nula. O comportamento correcto de v e $r\omega$ em função de t é representado pela linha a cheio (c) na Fig. 2.

2. Movimento no plano inclinado

O corpo sólido desce um plano inclinado partindo do repouso. Analisaremos as condições em que podem ocorrer variações da energia interna.

Vamos também neste caso aplicar a Eq. (7) para a translação do CM, a Eq. (8) para a rotação e, simultaneamente, as leis da Termodinâmica.

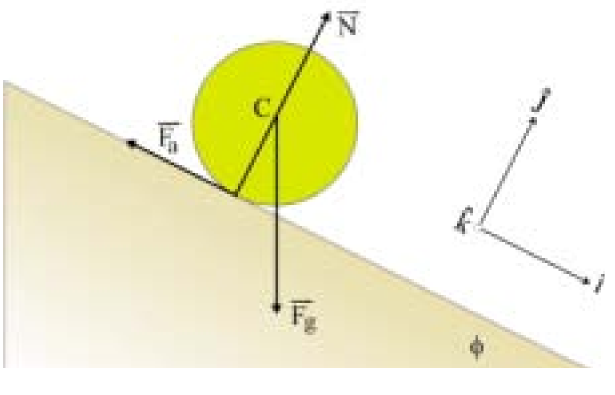


Fig. 3 Corpo sólido a descer um plano inclinado.

Usando as Eqs. (7) e (8) obtemos, como se pode ver da Fig. 3,

$$(m\,g\sin\varphi - F_a)x_{cm} = \frac{1}{2}mv^2. \qquad (18)$$

e

$$F_a r\theta = \frac{1}{2}I\omega^2, \qquad (19)$$

Uma vez que $W = Q = 0$, quando o sistema ao qual se aplica a primeira lei da Termodinâmica é constituído por objecto, plano inclinado e Terra, a lei de conservação da energia escreve-se

$$\Delta T_t + \Delta T_r + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = 0, \qquad (20)$$

Procedendo às substituições adequadas verifica-se que a energia interna também varia de acordo com a Eq. (17), que passamos a analisar admitindo diferentes tipos de rolamento:

(i) Se o **corpo rola sem deslizar** $(x_{cm} = r\theta)$, é nula a variação de energia interna (ver Eq. (17)). Não há efeitos dissipativos e o decréscimo da energia potencial do sistema reflecte-se inteiramente no aumento da energia cinética total do corpo que rola. De facto, adicionando membro a membro as Eqs. (18) e (19), que resultam das Eqs. (7) e (8), e, admitindo a condição de rolamento puro $(x_{cm} = r\theta)$, obtém-se

$$m\,g\sin\varphi\;x_{cm} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \qquad (21)$$

que traduz, como se esperava, o princípio da conservação da energia mecânica. A força de atrito é uma força de **atrito estático** que pode ser obtida facilmente, verificando-se que é dada por

$$\vec{F}_a = -\frac{2}{7}mg\sin\varphi\;\hat{\imath},$$

para o caso de se tratar de uma esfera. A desigualdade (3) permite então obter $\mu_e \geq \frac{2}{7}\tan\theta$, que indica o coeficiente de atrito mínimo para que a esfera role sem deslizar.

(ii) Se considerarmos $x_{cm} > r\theta$, conclui-se que $\Delta E_{int} > 0$, e parte do decréscimo na energia potencial é dissipado termicamente. De facto, neste caso, **o corpo rola e desliza** ao mesmo tempo, sendo o módulo da força de **atrito cinético** dado por

$$F_a = \mu_d m\,g\cos\varphi. \qquad (22)$$

Para o sistema em análise os casos tratados em (i) e (ii) são os únicos compatíveis com as leis da Termodinâmica. A condição $x_{cm} < r\theta$ só seria possível fornecendo trabalho ao sistema, situação que aqui não contemplamos.

Conclusões

O movimento do objecto sólido no plano horizontal consta de duas fases com aspectos físicos diferentes. Na primeira (OP), a força de atrito com a superfície horizontal retarda o movimento do CM e, simultaneamente, exerce um momento em relação ao CM que faz aumentar a velocidade angular. Discutimos os aspectos mecânicos e de conservação de energia nesta fase do movimento.

O objecto rola sem deslizar a partir do ponto em que se verifica a condição de rolamento puro $v = r\omega$. Como alguns estudantes estranham o movimento a partir de P, é interessante confrontar as ideias deles com as leis da Termodinâmica.

Por outro lado, nesta fase o movimento é uniforme e a força de atrito é nula. A nossa experiência mostra que devemos dedicar especial atenção a este aspecto. O confronto com o que se passa no plano inclinado representa um instrumento didáctico muito útil. Na verdade, apesar de a condição $v = r\omega$ se poder verificar nos dois exemplos estudados, o facto de a força de atrito ser nula no caso do plano horizontal e não ser nula no caso do plano inclinado constitui um foco de interesse. Os alunos, quando confrontados, com as duas fases do movimento no plano horizontal, costumam colocar duas questões:

(i) como é que a força de atrito desaparece?;

(ii) e assim sendo, o que provoca a rotação do corpo?

A primeira questão revela um conhecimento deficiente do conceito de força de atrito. A este propósito, devemos recordar que há uma força de atrito nas seguintes duas circunstâncias: quando existe uma força que solicita o movimento relativo entre o corpo e a superfície de contacto, embora sem o conseguir; e quando existe movimento relativo entre as duas superfícies.

Vejamos alguns exemplos:

(1) Na primeira fase do movimento no plano horizontal, existem as condições enunciadas em segundo lugar.

(2) O mesmo se passa no movimento no plano inclinado quando o corpo rola com deslizamento. Usa-se em ambos os casos a Eq. (6) envolvendo o coeficiente de atrito dinâmico. A força de atrito realiza trabalho e há dissipação de energia.

(3) Na segunda fase do movimento no plano horizontal, não ocorre nenhuma das condições necessárias para haver força de atrito, que é então nula.

(4) Na situação em que o corpo rola sem deslizar no plano inclinado, a componente do peso do corpo segundo a direcção do plano inclinado solicita o movimento relativo entre as superfícies de contacto sem o conseguir. Existe então uma força de atrito estático. Este facto tem duas implicações: por um lado, a força de atrito não pode ser calculada em função da normal ou do coeficiente de atrito $(F_a \leq \mu_e N)$ e, por outro, esta força de atrito não tem efeitos dissipativos.

Notar que, nas situações referidas em (3) e (4), o corpo rola sem deslizar. O ponto de contacto do corpo com a superfície está sempre instantaneamente em repouso em relação à superfície de contacto, situação que é compatível com a condição $v = r\omega$.

A questão (ii) resulta de uma falsa concepção dos alunos em relação à lei de Newton da rotação: pensam que é sempre necessário um momento para manter a rotação. Aqui devemos reforçar que o momento de uma força provoca uma mudança na velocidade angular do corpo, como indica a Eq. (2).

Na metodologia que adoptámos existe uma distinção clara entre equações puramente mecânicas que resultam das leis de Newton (equações do CM) e a primeira lei da Termodinâmica. As equações do CM permitem estabelecer relações entre grandezas dinâmicas de um sistema de partículas, podendo substituir com vantagem as equações cinemáticas, mas não permitem contabilizar variações de energia interna. Daí a necessidade de recorrer à primeira lei da Termodinâmica quando há efeitos dissipativos.

* Departamento de Física, Universidade de Coimbra, 3004-516 Coimbra.
celia@teor.fis.uc.pt
** Escola Secundária Infanta D. Maria, 3000 Coimbra.

Referências:

[1] C. A. Sousa e E. P. Pina, European Journal of Physics 18 (1997) 334-337.
[2] J. Menigaux, Physics Education 29 (1997) 242-246.
[3] C. M. Penchina, American Journal of Physics 4 (1978) 295-296.
[4] B. A. Sherwood, American Journal of Physics 51 (1983) 597-602; A. B. Arons, The Physics Teacher (1989) 506-517.
[5] A. Bello, E. Costa e H. Caldeira, Ritmos e Mudanças, Física 10º Ano, Porto Editora, Porto, 1997.