Uma normal muito anormal

*J. P. Silva **
*A. J. Silvestre ***

A linha da força de reacção normal a um plano tem sempre de passar pelo centro da massa do corpo? Neste artigo, os autores sustentam que não é forçoso que assim aconteça, e propõem um método de explicação que é simultaneamente pedagógico e divertido.

Introdução

O objectivo deste artigo é apresentar um método pedagógico e lúdico de explicar aos alunos que a linha de acção da força de reacção normal a um plano não tem forçosamente que passar pelo centro de massa (CM) do corpo. Esta questão põe-se, por exemplo, no caso de um objecto colocado sobre um plano inclinado e deve ser discutida após o estudo da dinâmica de rotação. Naturalmente, é sempre possível apresentar a solução correcta do problema *ab initio*. Contudo, verificámos que muitos alunos de mecânica do ensino superior (que, na maioria dos casos, já foram confrontados com a solução correcta do problema) continuam a desenhar a reacção normal do plano sobre o corpo no centro de massa do corpo. Surpreendentemente, uma grande percentagem destes alunos desenha correctamente a força de atrito paralela ao plano e na linha que separa o corpo do plano (ver Fig. 1).

Este facto levou-nos a ensaiar um jogo no qual o professor e os alunos vão obtendo sucessivas conclusões completamente absurdas que derivam do diagrama de corpo livre proposto pelos alunos para descrever o equilíbrio estático de um corpo sobre um plano inclinado com atrito (ver Fig. 1).

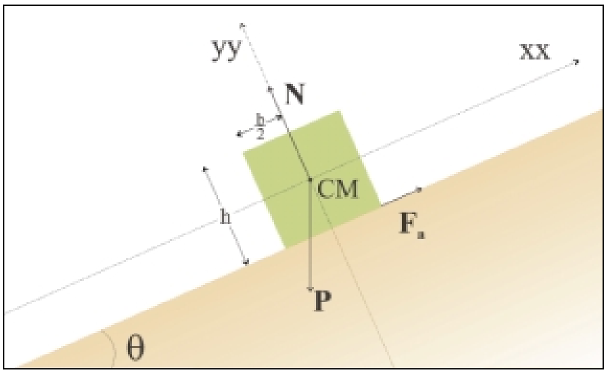

Figura 1 – Diagrama de corpo livre proposto frequentemente pelos alunos para o estudo do equilíbrio estático de um objecto sobre um plano inclinado. O que está mal?

Este método, que temos utilizado com algum sucesso, tem três vantagens:
1. A actividade tem carácter “lúdico” e, por isso, será mais facilmente recordada.
2. Permite aos alunos perceberem imediatamente a razão pela qual o diagrama de corpo livre da Fig. 1 tem que estar errado.
3. Os alunos serão confrontados com a eficácia das demonstrações por redução ao absurdo.

O primeiro absurdo

Consideremos então um objecto (por exemplo, um móvel), homogéneo, de altura h e base b colocado sobre um plano com inclinação, que não desliza ao longo do plano devido ao atrito [1]. O nosso objectivo é levar os alunos a concluírem que o diagrama do corpo livre da Fig. 1 está errado. Supomos que os alunos já sabem:
a) Que uma força que actua num corpo rígido pode ser substituída por uma outra igual colocada num ponto ao longo da sua linha de acção. Ela tem que ser igual para provocar o mesmo efeito de translação e tem que estar na mesma linha de acção para provocar o mesmo efeito de rotação. Alguns livros referem-se a este facto dizendo que “uma força pode ser deslocada ao longo da sua linha de acção”. Em particular, a força de reacção normal da Fig. 1 poderia ter sido deslocada ao longo da sua linha de acção por forma a estar na linha de contacto entre o corpo e o plano.
b) O peso deve ser desenhado no CM. De facto, o efeito de todas as pequenas forças gravíticas verticais que actuam sobre cada uma das partículas constituintes do corpo rígido é uma força vertical colocada no CM.
c) A força de atrito deve ser desenhada num dos pontos de contacto e é paralela ao plano de contacto.
Do esquema representado na Fig. 1 podemos deduzir a seguinte equação da dinâmica de rotação:

$$F_a\, h/2 = I_{CM}\, \alpha \qquad (1)$$

onde F_a, I_{CM} e α são, respectivamente, a intensidade (o módulo) da força de atrito, o momento de inércia do corpo em relação ao CM e a aceleração angular. Da última equação deduzimos que

$$\alpha = \frac{F_a\, h}{2 I_{CM}} \neq 0 \qquad (2)$$

porque F_a e h são diferentes de zero. Concluímos assim que o corpo roda! Isto é,

Absurdo I: Todos os móveis caem!

Por exemplo, uma tábua de madeira com b = 100 m (comprimento) e apenas h =1 cm (altura) desceria o plano inclinado rodando.

Qual terá sido a origem do erro? Sabemos que a força de atrito e o peso estão bem. Também não parece faltar nenhuma força. Assim, teremos de concluir que o erro só pode ter resultado do facto de a linha de acção da reacção normal ter sido desenhada passando pelo CM do corpo.

O segundo absurdo

Em consequência do resultado anterior, propomos que se desloque (necessariamente para a esquerda) a linha de acção da reacção normal ao plano de uma distância x, por forma a que seja viável a hipótese de o corpo não rodar (ver Fig. 2).

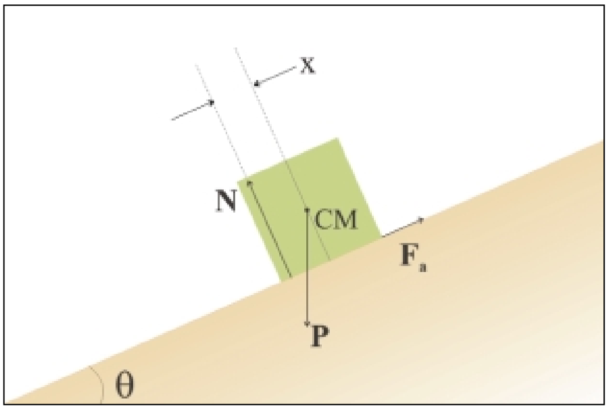

Figura 2 — Linha de acção da força de reacção normal deslocada para a esquerda de uma distância x em relação ao CM do corpo.

A nova equação da dinâmica de rotação é agora:

$$F_a\, h/2 - N\, x = I_{CM}\, \alpha \qquad (3)$$

Esta equação já admite $\alpha = 0$, desde que x satisfaça

$$x = x_0 = \frac{F_a\, h}{2\, N} = \frac{hP\sin\theta}{2P\cos\theta} = \frac{h}{2}\,\mathrm{tg}\theta \qquad (4)$$

Na terceira igualdade usámos o facto de que, no caso de o corpo estar em equilíbrio, as intensidades das forças de reacção normal e de atrito se relacionam com a intensidade do peso (P) através das expressões $N = P\cos\theta$ e $F_a = P\sin\theta$, respectivamente.
Ora, a Eq. *(4)* tem solução. De facto, dados h e θ podemos calcular o x_0 necessário para que o corpo esteja em equilíbrio estático. Mas agora temos um outro problema, pois esta equação tem **sempre** solução. Isto é, para quaisquer valores de h e θ, a Eq. *(4)* permite calcular sempre um valor de x_0. Como tal, parece que afinal:

Absurdo II: Nenhum móvel cai!

Por exemplo, podemos pegar na mesma tábua referida anteriormente, mas colocando-a agora de pé (h = 100 m, b = 1 cm) e concluir que não tombará, por muito inclinado que seja o plano! [2]

A solução de todos os problemas

A solução do Absurdo II é simples. Basta percebermos qual é o significado geométrico de x_o. Uma construção elementar mostra que x_o é a distância que vai da normal que passa pelo CM à normal que passa pelo ponto onde a linha de acção do peso corta a linha de contacto entre o corpo e a superfície do plano (ver Fig. 3). [3]

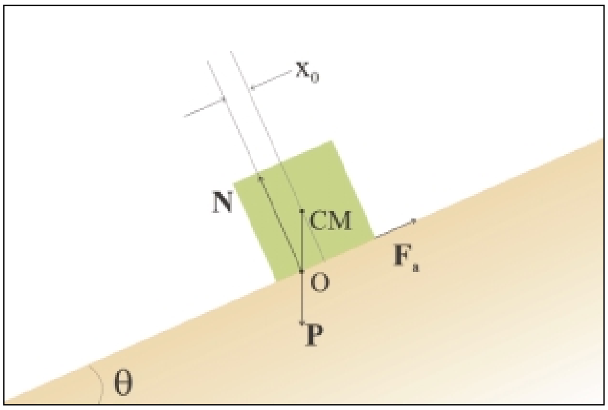

Figura 3 — Posicionamento correcto da força de reacção normal.

Ora, a reacção normal tem de actuar **no corpo**. Como tal, x_o não pode ser maior do que b/2; o caso limite ocorre para um valor crítico θ_C = arctg (b/h). Assim, o corpo não tomba quando $\theta < \theta_C$; tombando se $\theta > \theta_C$. Agora os alunos já podem relaxar. Conseguimos o óbvio: alguns móveis tombam, outros não. Para além disso, a Fig. 3 fornece-nos um método gráfico para determinar qual dos casos ocorrerá para um dado móvel (h e b) e uma dada inclinação (θ).

Esta discussão permite-nos entender também porque é que não se pode equilibrar uma esfera num plano inclinado, por muito pequeno que seja o valor de θ. De facto, uma esfera perfeita e um plano perfeito têm apenas um ponto de contacto. Como tal, não existe qualquer liberdade na escolha da linha de acção da reacção normal. Esta passa necessariamente pelo CM (numa situação em tudo análoga à da Fig. 1) e a esfera é forçada a rodar (ver Fig. 4).

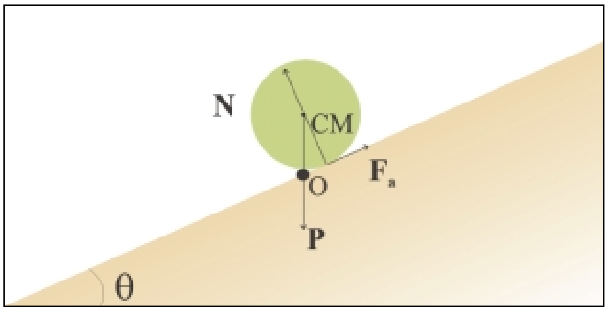

Figura 4 — Diagrama de corpo livre de uma esfera sobre um plano inclinado.

A importância do Princípio da Conservação da Energia

Para não perturbar o ritmo da aula, deixámos pendente uma questão relevante. Com efeito, demonstrámos até aqui que, quando $\theta < \theta_C$, é possível encontrar um valor de x ($x = x_o$) para o qual o corpo não cairá.

No entanto, não demonstrámos que a Natureza é obrigada a satisfazer este critério (embora o contrário implique as consequências absurdas já discutidas). Um método elegante de fazer esta demonstração baseia-se na aplicação do Princípio da Conservação da Energia [4].

Consideremos o esquema da Fig. 5 e suponhamos que $\theta < \theta_C$, mas que a Natureza escolhia $x < x_o$. Neste caso, o corpo rodaria em torno do ponto A. Todavia, como o corpo parte do repouso, a sua aceleração instantânea só tem componente tangencial. Deste modo, a energia cinética do corpo aumentaria porque este passa a ter movimento, mas também aumentaria a sua energia potencial gravítica porque a cota do CM aumentaria em consequência do movimento. Isto violaria claramente o Princípio de Conservação da Energia. Ainda mais dramática seria a situação em que $x > x_o$, de que resultaria uma rotação em torno do ponto B. Concluímos então que, para $\theta < \theta_C$, a colocação da reacção normal em $x = x_o$ não é opcional; é obrigatória. Finalmente, note-se que o movimento de rotação em torno do ponto A é perfeitamente consistente com o Princípio de Conservação da Energia no caso em que $\theta > \theta_C$, pois, neste caso, a aceleração do CM (tangencial, no instante em que se inicia a queda) já corresponde a um decréscimo na cota do CM. Deste modo, a energia cinética aumenta mas a energia potencial gravítica diminui, o que é consistente com o Princípio de Conservação da Energia.

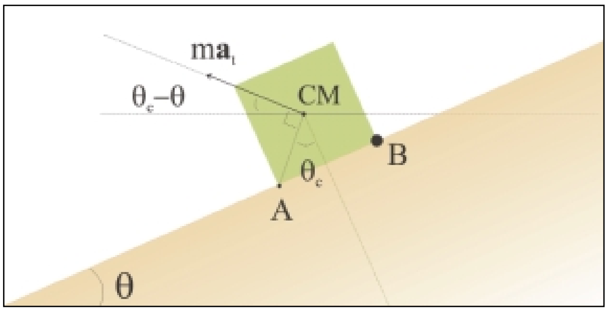

Figura 5 — Caso em que $\theta < \theta_C$. A aceleração tangencial resultante da rotação instantânea em torno do ponto A conduz a uma violação do Princípio da Conservação da Energia.

Conclusão

Durante este exercício supusemos que a força de atrito estático é suficientemente elevada para que o corpo nunca deslize ao longo do plano. A solução correcta deste problema para valores realistas dos coeficientes de atrito estático e cinético poderá ser feita numa aula posterior.

Queremos realçar ainda que este problema é abordado e resolvido de forma correcta em muitos livros de Mecânica e também nalguns manuais de Física do 12º ano.
No entanto, os alunos continuam a chegar aos primeiros (e, excepto em alguns casos, aos últimos) anos do ensino superior sem perceberem onde devem desenhar a força de reacção normal. Em nossa opinião, o diagrama de corpo livre deve ser sempre desenhado correctamente, pelo que propomos que este "jogo" seja apresentado logo no 12º ano.
Por outro lado, também é claro do que dissemos em "O primeiro absurdo", alínea a), que o estudo do movimento de translação não é afectado por este erro.
De facto, é o movimento de rotação que "sabe" as linhas de acção e, portanto, é o estudo do movimento de rotação que é afectado pelo erro da Fig. 1. É evidente que, quando se estuda exclusivamente a translação, como acontece nos 10º e 11º anos, se podem desenhar todas as forças (incluindo, portanto, a força de atrito) no CM do corpo. Contudo, no contexto do estudo do movimento dos corpos rígidos, o referido diagrama não é o diagrama do corpo livre correcto. O modelo que aproxima o corpo rígido por uma partícula material, colocada no CM, sujeita a todas as forças que actuam o corpo é suficiente para descrever a translação mas não permite obter qualquer informação sobre a rotação. É da confusão destes dois modelos (um no qual se aproxima o objecto por uma partícula material colocada no CM e outro no qual se aproxima o objecto por um corpo rígido) que surge o erro que aqui discutimos.
A nossa esperança é que este método por redução ao absurdo "choque" e divirta de tal modo os alunos que estes nunca mais se esqueçam dos procedimentos correctos no caso de corpos rígidos. Com os nossos tem resultado.

* Instituto Superior de Engenharia de Lisboa
R. Conselheiro Emídio Navarro
1900 Lisboa

** Instituto Superior de Transportes,
R. Castilho, nº 3
1250 Lisboa
asilver@istp.pt

AGRADECIMENTOS
Os autores agradecem reconhecidos aos colegas A. Barroso, E. F. Gonçalves, A. M. Nunes e M. T. Peña a leitura atenta bem como os comentários e sugestões que fizeram ao manuscrito que deu corpo a este artigo.

NOTAS

[1] Existem muitos problemas em que poderá surgir esta situação. Por exemplo, um no qual se peça o coeficiente de atrito mínimo necessário para que um móvel não resvale ao longo de um plano inclinado. Um outro problema semelhante consiste no cálculo da sobre-elevação de uma curva para que um carro animado de uma determinada velocidade a descreva sem escorregar nem capotar.

[2] Neste ponto devemos explicar aos alunos que apenas demonstrámos a existência de um valor de x (x_0) para o qual $\alpha = 0$. Só no fim demonstraremos que o Princípio da Conservação da Energia impõe à Natureza a escolha forçosa deste valor de x (ver ponto 5). Fazê-lo aqui destruiria o jogo.

[3] Esta era a solução óbvia do problema. Com efeito, com a normal colocada sobre esta linha de acção, as linhas de acção de todas as forças interceptam-se no ponto O. Assim, os momentos de F_a, P e N em relação ao ponto O são nulos (ver Fig. 3). Como tal, não há rotação.

[4] Existe um método mais simples de demonstrar a inevitabilidade da escolha $x = x_0$. Este método consiste em observar que, se o corpo rodar em torno do ponto A (B), este será o único ponto de contacto e, portanto, o ponto onde estará forçosamente aplicada a força de reacção normal (ver Fig. 5).
Consideremos então o esquema da Fig. 5 admitindo que $\theta < \theta_C$ e que a Natureza escolhia $x < x_0$. Neste caso, o corpo rodaria em torno do ponto A. Consequentemente, a reacção normal estaria aplicada no ponto A ($x = b/2$) violando a hipótese de $x < x_0$. Esta contradição só não existirá se $x_0 \geq b/2$ ($\theta \geq \theta_C$), caso em que o corpo rodará inevitavelmente. De forma idêntica se conclui que x não pode ser maior do que x_0.
Em resumo, a Natureza só tem de facto duas opções: $x = x_0$ (se $x_0 < b/2$) ou $x = b/2$ (se $x_0 \geq b/2$).