Este é o trabalho do aluno que ganhou o Prémio Mário Silva de 2003 (2ª edição). Recorde-se que esse Prémio foi instituído pelo Público e pela Gradiva, contando com o apoio da Sociedade Portuguesa de Física e da BP.

CORDAS, CABOS OBJECTOS DEPE

Uma pequena viagem pelo movimentado mundo da estática

A ideia para este trabalho surgiu de um problema com que me vi confrontado há cerca de três anos, um "Desafio" da edição dominical do Público, que sempre fez as minhas delícias. Originalmente concebido como uma actividade lúdica de cariz matemático, revelou-se capaz de motivar um jovem a tentar descobrir algo mais sobre o modo como a Natureza opera. Decidi por esta razão tratar uma versão (não a original, porque lhe perdi o rasto) do desafio inicial:

Prendeu-se uma corda de 8 metros, pelas suas extremi-dades, ao topo de dois postes cuja altura é 5 metros. O ponto mais baixo da corda encontra-se a 1 metro do chão. A que distância se encontram os dois postes?

Segui a abordagem canónica para este tipo de problemas: fazer um desenho, carregá-lo de informação, e esperar pela inspiração... Apresento aquilo que poderia muito bem ter sido o meu primeiro rascunho.

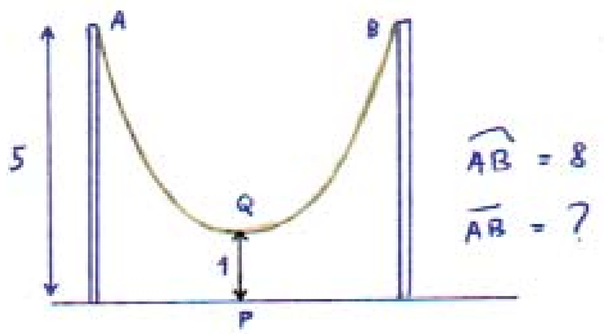

Figura 1

Diogo Oliveira e Silva
Rua Fernão Vaz Dourado, 84
4150 - 322 Porto

dos85@hotmail.com

S E OUTROS NDURADOS

Não foi preciso muito tempo para que me surgisse uma ideia: que tal um referencial cartesiano bem centrado naquele ponto P tão estratégico? Algumas contas com certeza me revelariam a equação da *parábola* que aproxima a forma do cabo, e, como eu só queria a distância de A a B... *Voilá*!

Escusado será dizer que uma tarde de animada reflexão se revelou... completamente infrutífera! Por mais voltas que desse ao papel e à imaginação, a corda, teimosa, simplesmente não se deixava render às amarras parabólicas que lhe queria impor.

Frustrado, nunca mais quis saber do problema... mas a verdade é que algo deve ter ficado teimosamente agarrado ao meu subconsciente! O resultado está à vista...

SOBRE CABOS E CAMPOS GRAVÍTICOS

Como aspirante que sou a cientista, achei por bem delimitar rigorosamente os meus objectivos: qual é o problema? Eis o que consta no topo da primeira página das minhas divagações:

Problema: *Que forma adquire uma corda sujeita a um campo gravítico uniforme, como na Terra, suspensa por dois postes da mesma altura? Qual é a expressão matemática correspondente?*

Assunto já eu tinha, motivação, mais que muita... Mãos ao trabalho!

As ferramentas que iria utilizar ao longo da minha jornada intelectual eram, suspeitava eu, o cálculo vectorial e diferencial, associados a situações de equilíbrio de forças. Ao longo da resolução apercebi-me, no entanto, da necessidade de recorrer a conceitos ligados ao cálculo integral, e que entretanto já abordei nas preciosas aulas de Análise Matemática da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Simplificações e casos ideais... Ora cá está uma óptima oportunidade para pôr em prática estes dois conceitos tão amigáveis para um físico.

Consideremos pois uma corda homogénea, de comprimento l e densidade uniforme, dependurada como mostra a figura 2. Procedamos à escolha de um referencial ortonormal com origem no ponto O, na vertical com o ponto mais baixo da corda, Q.

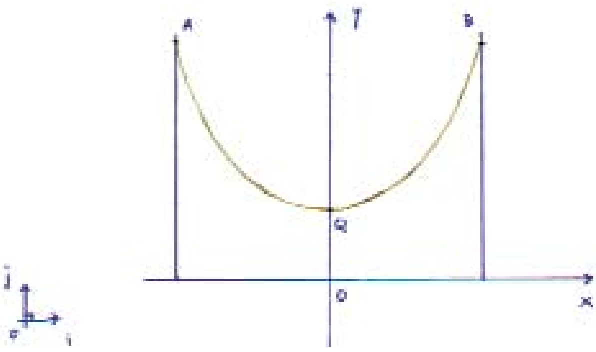

Figura 2

No caso ideal, em que consideramos desprezáveis acções como a do vento, a de possíveis reacções nos pontos A e B, e a de atritos diversos, que forças actuam num ponto genérico da corda, P?

Apesar da aparente simplicidade, esta questão foi das mais delicadas que abordei. Eis o caminho tomado até chegar a uma resposta que me parecesse convincente:

Considere-se, em primeiro lugar, uma corda presa a dois postes, mas bem esticada. Neste caso, o senso comum diz-nos que a corda fica sujeita, em cada um dos pontos A e B, à acção de uma força horizontal, $\boldsymbol{T}$. Além disso, podemos representar o peso $\boldsymbol{P}$ da corda aplicado no seu centro de massa - recordo que suposemos que a massa do cabo estava uniformemente distribuída. Para o caso presente, no entanto, o sistema em causa é simplificável a tal situação.

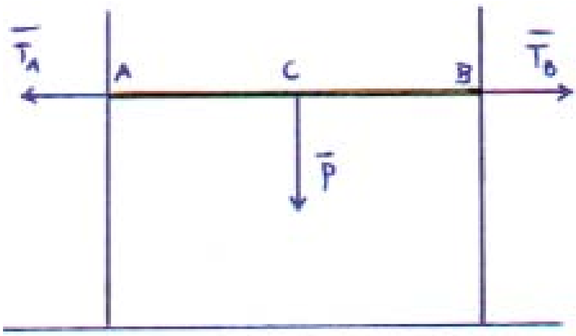

Figura 3

- Apliquemos agora ao sistema uma sobrecarga em C. O que se passa é algo de semelhante à figura 4.

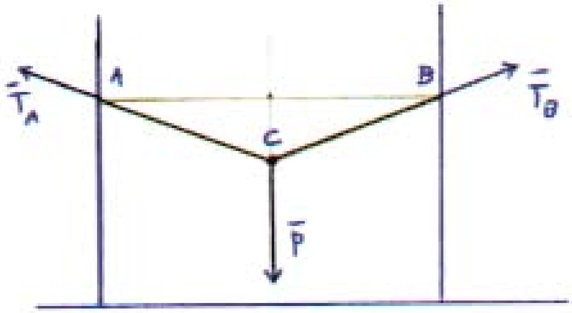

Figura 4

Nesta situação, o que acontece às tensões no fio em A e em B? Não nos vamos pronunciar quanto a aspectos quantitativos, pois não possuímos dados para tal. Podemos, isso sim, tentar perceber o que se passa quanto à linha de acção da força. E, neste caso, é quase imediato conjecturar que *T* passa a actuar, não segundo a horizontal, mas segundo a "continuação" da corda, como se vê na imagem. Podemos afirmar que *T* é tangencial à corda. À figura 5 podemos associar o caso em que dois corpos de igual massa são suspensos nos pontos C e D. Mais uma vez, o interesse do esquema centra-se na direcção a atribuir à força *T*.

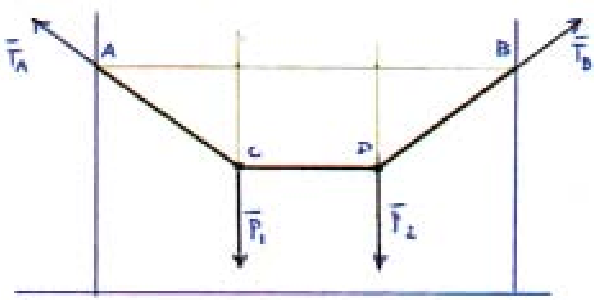

Figura 5

Foi pensando em situações como esta que cheguei à conclusão, à primeira vista não evidente, que deveria procurar estudar as forças que actuam, não num ponto genérico da corda, mas num *segmento de corda*. Vejamos porquê:

Vejamos a figura 6. O primeiro problema que naturalmente surge ao tentar estudar as forças aplicadas num ponto genérico da corda relaciona-se com o peso. De facto, para além das forças de ligação (tensões do fio) presentes em qualquer ponto do fio, não nos podemos esquecer que a força gravítica contribui para o sistema de forças responsável pelo equilíbrio do sistema. Mas que sentido se deve atribuir ao peso de um elemento pontual da corda? Foi principalmente por esta razão que decidi estudar o que se passa num segmento genérico da corda.

Considerem-se pois os pontos P e Q. P é o ponto mais baixo da corda, de coordenadas $(0, y_0)$. Em primeiro lugar, o arco PQ, de comprimento *l*, tem massa igual a ρSl, em que *S* é a área da secção recta (que supomos constante ao longo do fio). Podemos, por isso, representar o vector peso ***P*** aplicado ao centro de massa do segmento e dizer que a sua norma é ρSlg. Recuando às situações abordadas nas figuras 4 e 5, será que podemos dizer algo acerca das tensões em P e Q? Os dados previamente explanados fornecem fortes indícios acerca da direcção de tais forças. Que tal considerá-las tangentes à corda?

Encontramo-nos, pois, na seguinte situação:

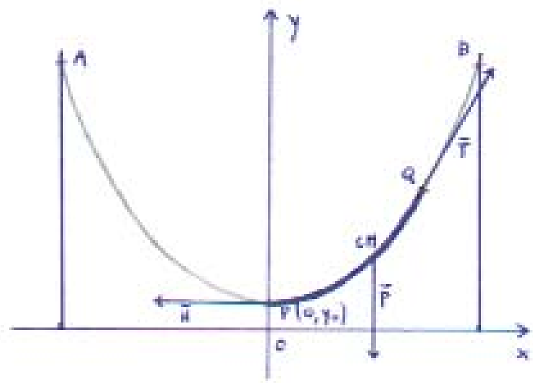

Figura 6

Todas estas considerações assentaram num pressuposto que ainda não foi explicitamente referido: *o sistema encontra-se em equilíbrio*. É pois imediato que o somatório vectorial das forças aplicadas ao sistema é nulo[1]. Assim, $\boldsymbol{H}+\boldsymbol{P}+\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0}$. Podemos ainda decompor as forças nas suas componentes segundo *x* e *y* (recorde-se que na figura 2 definimos um sistema de coordenadas cujos versores segundo *x* e *y* eram, respectivamente, ***i*** e ***j***):

$$H = -H \cdot i \wedge P = -\rho Sgl \cdot j \wedge T = T_x i + T_y j \qquad (1)$$

A condição de equilíbrio implica então que $(T_x - H)\,\boldsymbol{i} + (T_y - \rho Slg)\,\boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$, ou seja:

$$T_x = H \wedge T_y = \rho Sgl \qquad (2)$$

Com vista a manter a clareza do texto e a evitar qualquer desvio do intuito primordial que motivou todo este raciocínio, apresento de seguida apenas os passos fundamentais conducentes ao resultado final. Não quero deixar de referir que esta foi possivelmente a parte mais difícil de todo o trabalho que só tomou o presente aspecto após várias tentativas frustradas e leituras complementares.

Atente-se, em pormenor, no que se passa no ponto Q. Já nos pronunciámos quanto à direcção de T, que se afirmou ser tangente à corda nesse ponto. Qual é o nosso objectivo último? Determinar a expressão matemática para a forma da corda, algo do tipo $y=f(x)$. E o que nos dizem as com-ponentes segundo x e y de um vector tangente à curva num dado ponto? É prematuro afirmar que o nosso problema está resolvido, mas vejamos como a seguinte observação nos pode conduzir até muito perto da solução.

Em primeiro lugar, recordemos que a derivada de uma função num ponto é dada pelo declive da recta tangente à curva representativa da função nesse ponto. Consideremos o ponto Q, de abcissa xQ. Nesse caso:

$$\frac{dy}{dx}_{x=xQ} = \frac{T_y}{T_x} = \frac{\rho lSg}{H} \therefore \frac{dy}{dx}_{x=xQ} = \frac{\rho Sg}{H} \times l \qquad (3)$$

De facto, o quociente entre as componentes vertical e horizontal do vector T (no fundo, a variação das ordenadas a dividir pela variação das abcissas) não é mais do que o declive da recta que é a linha de acção do vector, e portanto da tangente à curva no ponto Q. A segunda igualdade justifica-se se atentarmos na Eq. (2).

Uma observação pertinente: O coeficiente $\rho Sg/H$ é característico para uma dada corda dependurada a uma determinada latitude. Fazendo $k = \rho Sg/H$, podemos dizer que a derivada pretendida é igual a kl.

Por outro lado, é bem conhecida do cálculo integral a seguinte expressão para o comprimento l de um arco de curva em coordenadas cartesianas[2] :

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad (4)$$

Combinando as Eqs. (3) e (4), o raciocínio feito até agora conduz-nos à seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad (5)$$

Para x=0, sabemos que $y=y_0$ e $dy/dx=0$.

Não possuindo as ferramentas necessárias para resolver esta equação pelo método geral, uma sugestão que encontrei num livro de Análise Matemática[3] revelou-se extremamente frutífera: vejamos a que nos conduz a substituição, formalmente válida, do tipo $u(x)=dy/dx$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \wedge u(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = k\sqrt{1+u^2} \qquad (6)$$

Esta última equação já admite uma abordagem mais acessível, que apresentamos de seguida:

$$\frac{du}{dx} = k\sqrt{1+u^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = kdx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \int kdx \qquad (7)$$

O segundo membro é fácil de calcular: é igual a $kx+C_1$. Para o desenvolvimento do primeiro membro, o hábito levou-me a tentar a substituição canónica da forma $u = \operatorname{tg} t$. Algumas contas indiciam que esta não é com certeza a abordagem mais eficaz e, apesar de suspeitar que eventualmente o resultado pretendido acabaria por emergir, resolvi seguir uma outra sugestão e recorrer às chamadas funções hiperbólicas. Recordando a igualdade[4] $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$, a substituição que à primeira vista se oferece é $u = \sinh t$:

$$u = \sinh(t) \Rightarrow \frac{du}{dt} = \cosh(t) \therefore \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du =$$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 t}}\cosh(t)dt = \int \frac{\cosh(t)}{\sqrt{\cosh^2(t)}}dt =$$
$$= \int dt = t + C_2 = \sinh^{-1}(u) + C_2 \qquad (8)$$

O "milagre" torna-se evidente quando substituímos esta última expressão na Eq. (7):

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du = \int k\,dx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sinh^{-1} u = kx + C_1 \Leftrightarrow u = \sinh(kx + C_1) \qquad (9)$$

Das condições iniciais (se $x=0$, $y=y_0$ e $dy/dx=0$), retira-se facilmente que $C_1=0$, pelo que $u(x)=\sinh(kx)$. Mas definimos inicialmente $u(x)=dy/dx$! Concluindo:

$$\frac{dy}{dx} = \sinh(kx) \Leftrightarrow y = f(x) = \frac{1}{k}\cosh(kx) + C \qquad (10)$$

Mais uma vez, $C=0$. Recordamos ainda que $k=\rho gS/H$. Parece que o objectivo inicial foi cumprido: partindo de considerações estáticas logicamente consistentes, chegámos a uma expressão para a curva descrita pelo nosso objecto dependurado. Esta curva tem o nome de *catenária*, e nas conclusões deste trabalho abordamos sucintamente a sua "evolução histórica". Veremos de seguida como reagem os nossos cabos quando sobre eles pesar algo mais que a "insustentável leveza do ser"...

QUANDO OS CABOS SUSTENTAM PONTES...

Já toda a primeira parte do trabalho estava pronto quando resolvi acrescentar-lhe uma curta abordagem a...pontes! Resolvi incluir esta secção por duas razões fundamentais: uma de ordem estética, outra um pouco mais pragmática.

As pontes encontram-se, sem dúvida, entre os grandes feitos da engenharia. A sua utilidade, desempenho e estética tornam-nas verdadeiras obras de arte e objectos da minha especial admiração. Por outro lado, e de um ponto de vista mais prático, numa ponte suspensa assistimos talvez a uma das mais engenhosas aplicações que os cabos têm no quotidiano. A sua durabilidade, leveza e flexibilidade tornam-nos ideais para estas situações. Achei por bem fugir a um excessivo formalismo matemático, dominante na primeira parte, com uma curta deambulação por este assunto tão fascinante.

Na Figura 7, apresento dois esquemas da vista frontal da *Golden Gate Bridge*, de São Francisco, Califórnia. Algo salta imediatamente à vista: atentando nos longos cabos de aço que lhe conferem o estatuto de ponte suspensa, mais uma vez nos encontramos no mundo dos objectos dependurados...

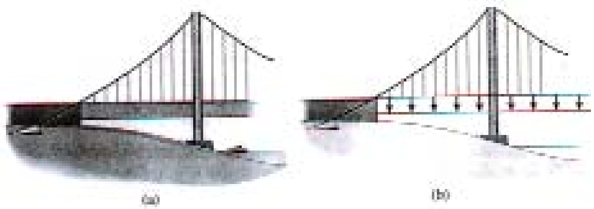

Figura 7

Novo problema: o que nos garante que a forma dos cabos que sustentam o tabuleiro horizontal pode, mais uma vez, ser aproximada por uma catenária? Surpreendentemente, nada!

O que é essencial ter em conta neste novo problema centra-se no facto de a massa do sistema *deixar de estar uniformemente distribuída ao longo do cabo*. É evidente que a massa do cabo de sustentação é muito inferior à massa do tabuleiro horizontal. Podemos, em primeira aproximação, considerá-la desprezável. Assim sendo, é lícito afirmar que a massa do sistema passa a estar uniformemente distribuída na direcção horizontal: caminhando x metros ao longo da ponte, não interessa entre que pontos, a massa dessa secção da ponte é a mesma.

Na secção anterior, comecei por fazer várias considerações sobre as forças actuantes e como assegurar o equilíbrio do sistema. Pois bem, por que não mantê-las válidas? Com um pequeno senão: o peso a considerar entre quaisquer dois pontos P e Q tem que passar a assumir um novo aspecto, nomeadamente $\boldsymbol{P} = -\rho Sgx\,\boldsymbol{j}$, onde x é naturalmente a projecção da distância entre P e Q no eixo das abcissas.

A Eq. (3) toma, neste caso, a seguinte forma:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=xQ} = \frac{\rho Sg}{H} \times x \qquad (11)$$

...o que nos poupa imenso trabalho! De facto, a solução está à vista. Integrando ambos os membros em ordem a x, obtemos a expressão pretendida:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\rho Sg}{H}x \Leftrightarrow y(x)=\frac{\rho Sg}{H}\int x dx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y(x)=\frac{\rho Sg}{2H}x^2+C \quad (12)$$

Fazendo $a=\rho Sg/2H$, facilmente se vê que a curva obtida é a tão desejada parábola, da forma $y(x)=ax^2+C$. Fiquei intrigado com o resultado. Consultando bibliografia que me foi aconselhada, encontrei a resposta parcial (que, acrescente-se, não me satisfez por completo) à justificação da parábola:

Considere-se um cabo sem qualquer sobrecarga adicional. Quanto mais esticado estiver o cabo (isto é, quanto maior for a intensidade das forças de tensão em A e B), mais a curva por ele descrita se aproxima de uma parábola. Assim, é natural que um cabo que tenha como "missão" suportar grandes cargas adicionais (o que se passa nas pontes) desempenhe melhor a sua tarefa se tiver uma forma parabólica, capaz de suportar sobretensões, não apenas nas suas extremidades, mas distribuídas ao longo do seu comprimento.

Para terminar esta secção, não quero deixar de referir que o comportamento que atribuí aos cabos que sustentam pontes se afasta com certeza do que na realidade se passa. A abordagem que fiz, necessariamente incompleta, não tomou em linha de conta aspectos como os atritos, a resposta à erosão, a correntes e a sismos, e muitos outros factores relacionados com a segurança. Qual a "adaptação" da forma dos cabos face a estes suplementos é uma questão que, apesar do interesse que me suscita, se revelou intratável no presente estádio do meu conhecimento.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Regressados que estamos da nossa breve viagem, não podemos deixar de salientar os pontos de maior relevo que foram focados: em primeiro lugar, uma demonstração elementar da forma adquirida por um cabo de massa uniformemente distribuída, quando sujeito exclusivamente à acção do seu peso – encontrámos neste estádio a curva denominada por catenária. Neste ponto, uma pequena curiosidade histórica: em resposta aos trabalhos prévios de Galileu, Huygens demonstrou em 1656 que a catenária é uma curva não algébrica. O cientista italiano, motivado pelo sucesso que foi a aplicabilidade de cónicas ao mundo natural, nomeadamente à forma da trajectória de um projéctil, por ele próprio deduzida, e de um planeta em rotação à volta do Sol, fruto dos trabalhos de Kepler, estava plenamente convencido que a forma da corda dependurada não era mais do que uma simples parábola...

Numa segunda fase do trabalho, dedicámo-nos a analisar o caso de cabos não isolados, mas antes integrados em estruturas mais complexas como é o caso de pontes. Parece que, em certas condições, a tão desejada forma parabólica pode mesmo vir ao de cima...

Por último, uma pequena nota quanto à solução do problema inicial, o enigmático "desafio" que aparentemente motivou toda esta "cavalgada": a resposta não é mais que um rotundo ZERO! De facto, nas condições do enunciado, para que o ponto P se encontre a 1 metro do solo, é necessário que os dois postes coincidam.

E eu que pensava que catenárias, segmentos de arco e funções exponenciais nada tinham a ver com cordas... verticais!

NOTAS

1 Refira-se que a condição de equilíbrio exige ainda que o somatório dos momentos das forças exteriores aplicadas seja nulo. Como não existem forças que isoladamente imprimam movimento de rotação ao sistema, esta observação não foi incluída no texto principal.

2 Cf., por exemplo, PISKOUNOV, *Cálculo Diferencial e Integral*, vol. I, Lopes da Silva Ed., Lisboa, p. 482.

3 WYLIE e BARRETT, *Advanced Engineering Mathematics*, McGraw-Hill, Nova Iorque, 1995.

4 Por definição, $\cosh x=(e^x+e^{-x})/2$ e $\sinh x=(e^x-e^{-x})/2$, pelo que a igualdade segue com um pouco de álgebra.

BIBLIOGRAFIA

- BEDFORD, Anthony e FOWLER, Wallace, *Statics - Engineering Mechanics,* Addison-Wesley, Austin, 1995

- BEER, Ferdinand e JOHNSTON, Russell, *Mecânica Vectorial para Engenheiros - Estática*, McGraw-Hill, 1995

- BOYER, Carl B., *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Nova Iorque, 1989

- DEUS, Jorge Dias de *et al.*, *Introdução à Física*, McGraw-Hill, Lisboa, 1992

- PISKOUNOV, N., *Cálculo Diferencial e Integral, vol. I,* Lopes da Silva Editora, Lisboa, 2000

- WYLIE, C. Ray, e BARRETT, Louis C., *Advanced Engineering Mathematics*, McGraw-Hill, Nova Iorque, 1995