

Num estudo histórico, analítico e computacional, apresentam-se vários tipos de dispositivos que rodam.

Natália Bebiano\*

João da Providência\*\*

João da Providência Jr.\*\*\*

José Carlos Teixeira\* e

Gonçalo Carvalho\*,<sup>a</sup>

\*Departamento de Matemática

Universidade de Coimbra

3001 - 454 Coimbra

\*\*Departamento de Física

Universidade de Coimbra

3004 - 516 Coimbra

providencia@teor.fis.uc.pt

\*\*\*Departamento de Física

Universidade da Beira Interior

6201 - 001 Covilhã

<sup>a</sup> Digital Design Studio - Glasgow School of Art

Bellahouston Park, 10 Dumbreck Road,

Glasgow G41 5BW, UK

# ROLANTES

## O DUPLO CONE

Nos Museus de Ciência do Século XVIII eram comuns diversos modelos mecânicos paradoxais, insuperáveis na capacidade de estimular o pensamento e animar a discussão. Um desses modelos bem conhecido é o duplo cone que sobe uma rampa aparentando desafiar a lei da gravidade. Este aparelho destinava-se ao estudo do equilíbrio dos graves que, como é sabido, ocorre quando o centro de gravidade ocupa a posição mais baixa possível. É um instrumento constituído por uma peça de madeira formada por dois cones circulares congruentes unidos pelas bases e por duas hastes de madeira unidas numa das extremidades de modo a formarem um V, e dispondo de parafusos reguladores da inclinação em cada uma das respectivas extremidades livres, como mostra a Fig. 1 extraída da obra J.T. Desaguilliers, *A Course of Experimental Philosophy*, Londres, 1734, p. 55, Pl.IV, Fig. 14. A estrutura de madeira pousa sobre uma mesa horizontal, com o vértice apoiado no tampo e as hastes definindo um plano inclinado. O cone é colocado simetricamente sobre as hastes, com o eixo dirigido horizontalmente. Quando o duplo cone rola sobre as hastes, o eixo descreve um plano com inclinação adequada.

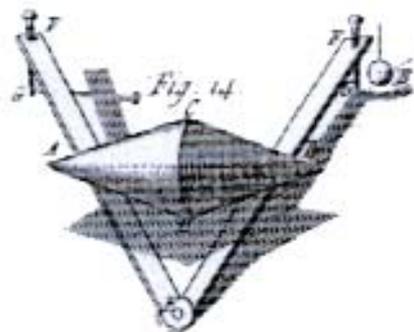


Figura 1

As experiências com este aparelho consistiam em colocar o duplo cone junto ao vértice da estrutura em V, abandonando-o de seguida. O duplo cone vai subindo pelas

hastes inclinadas até que duas pequenas barras situadas no prolongamento do eixo impedem a queda. Este resultado surpreendente parece violar a lei da gravidade. No entanto, o que na realidade acontece é que o eixo dos cones vai descendo o plano inclinado que descreve à medida que o duplo cone vai subindo ao longo das hastes de madeira. Seja  $\alpha$  o ângulo formado pelas geratrizes dos cones com os respectivos eixos e  $\beta$  o ângulo de qualquer das hastes com o plano horizontal. Seja  $\gamma$  metade do ângulo formado pelas hastes. A condição para que o aparelho funcione exprime-se pela desigualdade

$$\sin \gamma > \sin \beta \times \cot \alpha .$$

Ver a Fig. 2, onde, em perspectiva, o segmento  $BC$  representa o eixo do cone, o segmento  $AC$  representa a respectiva geratriz e o segmento  $EC$  representa o bordo da régua ao longo da qual o cone rola. Nesta figura, os ângulos  $\alpha, \beta, \gamma$  satisfazem a relação crítica  $\cot \alpha = \sin \gamma / \sin \beta$ . Consideremos o lugar geométrico dos pontos da superfície do duplo cone que em instantes sucessivos vão ficando em contacto com as hastes em  $V$  depois do duplo cone ter sido pousado junto ao vértice e abandonado. A curva que deste modo se obtém é uma dupla espiral tridimensional que se vai enrolando à volta do eixo do duplo cone. Num sistema de referência apropriado as suas equações paramétricas podem escrever-se

$$x = \cos \theta e^{-a\theta}, \quad y = \sin \theta e^{-a\theta}, \quad z = b(1 - e^{-a\theta}),$$

$$x = \cos \theta e^{-a\theta}, \quad y = \sin \theta e^{-a\theta}, \quad z = -b(1 - e^{-a\theta}), \quad \theta \geq 0.$$

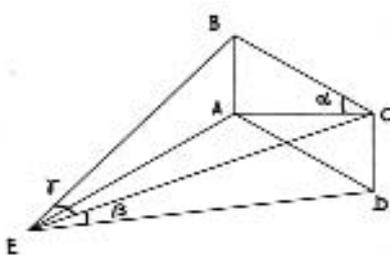


Figura 2

Se a dupla espiral rolar sobre os bordos da estrutura formada pelas hastes em  $V$ , em substituição do duplo cone, é óbvio que o eixo em torno do qual ela se encontra enrolada vai descrevendo um plano descendente. Esta curva está representada na Fig. 3.

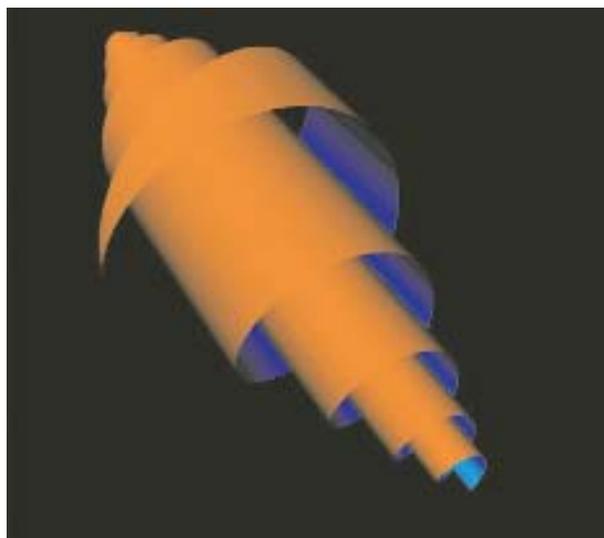


Figura 3

## ROLANTES

A invenção da roda foi marcante na história da Humanidade. Ocorreu no quarto milénio antes de Cristo e é contemporânea da descoberta da escrita e dos metais. Carros, aviões, roldanas, engrenagens várias são instrumentos usuais da nossa cultura e, como Martin Gardner reconhece, é difícil conceber uma civilização avançada sem a roda.

Segundo a tradição, a roda foi inventada na Mesopotâmia, dada a descoberta neste local de gravuras de engenhos com rodas datadas de 3 000 a.C. e vestígios arqueológicos de rodas maciças de 2 700 a.C. Em meados do século XX, arqueólogos russos encontraram no Cáucaso artefactos com rodas, sugerindo que a roda terá surgido na Rússia meridional anteriormente à Mesopotâmia. Inventada, independentemente, em vários locais geográficos ou num local certo a partir do qual se difundiu, é complicado fazer um juízo final nesta matéria.

Uma roda em movimento tem propriedades paradoxais. Os pontos próximos do topo têm velocidade superior à daqueles que estão junto do solo. Um ponto da roda atinge a velocidade máxima quando está precisamente no topo e a velocidade mínima (zero) quando toca o solo

(Ver, abaixo, “Teorema de Copérnico”). Nas rodas de comboio, cujos aros descem um pouco abaixo dos carris, há pontos que se movem para trás.

Os nossos carros têm rodas redondas e as estradas onde circulam são planas. No Exploratório de S. Francisco, na Califórnia, um carro de rodas quadradas desloca-se suavemente sobre uma sequência de arcos de catenária. Será possível conceber rodas de forma geométrica diferente da usual de forma a garantir movimento suave? Se o perfil da estrada não for rectilíneo mas, por exemplo, ondulado (sinusoidal), existirão rodas que permitam ao veículo mover-se sem solavancos?

Se observarmos com atenção o movimento de uma roda comum, concluímos que o seu centro descreve uma trajectória rectilínea. Será este o segredo do movimento sem solavancos?

Apresentaremos soluções adaptadas a diversos perfis dos pisos, recordando conceitos matemáticos e físicos no cerne da questão.

### CENTRO INSTANTÂNEO DE ROTAÇÃO

Usaremos o conceito de *centro instantâneo de rotação*. Se uma figura plana se desloca rodando em torno de um ponto fixo  $C$  chamado *centro de rotação*, qualquer ponto da figura em movimento descreve um arco de circunferência. Em cada instante, a velocidade  $v$  do ponto  $A$  é dirigida tangencialmente à circunferência descrita por  $A$ , isto é, é normal ao segmento  $CA$ , Fig. 4.

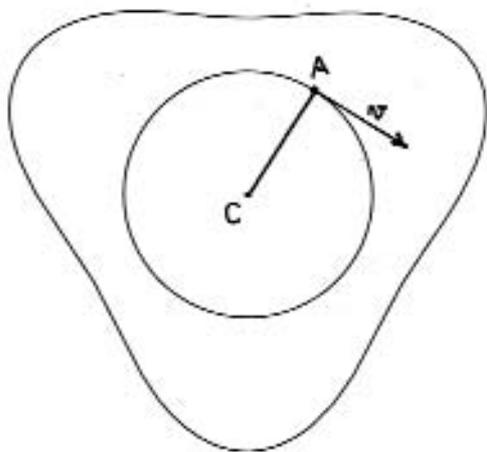


Figura 4

Podemos provar-se que uma figura rígida movendo-se sobre um plano está animada de um movimento que, instantaneamente, ou é de *translação* ou de *rotação* em torno de um ponto denominado centro instantâneo de rotação. O ponto  $C$ , sendo o centro instantâneo de rotação, permanece instantaneamente imóvel (centro instantâneo de repouso), a sua velocidade é nula, enquanto que a velocidade de qualquer outro ponto  $A$  é perpendicular ao segmento  $CA$ .

O conceito surge numa memória de Chasles de 1830 embora esta nomenclatura só tivesse surgido em obras posteriores do autor.

Dizemos que uma figura rígida  $F$  rola sobre uma curva  $L$  se, em cada instante, há um ponto de contacto de  $F$  com  $L$  e dizemos que rola sem deslizar se a velocidade do ponto de contacto é nula, isto é, se esse ponto é o centro instantâneo de rotação de  $F$ . Em conclusão, podemos afirmar que se uma figura  $F$  rola sem deslizar sobre uma curva imóvel  $L$ , o ponto de contacto é o centro instantâneo de rotação. Designando por  $C$  este ponto, o ponto arbitrário  $A$  de  $F$  está animado de velocidade instantânea perpendicular ao segmento  $CA$  (Fig. 5).

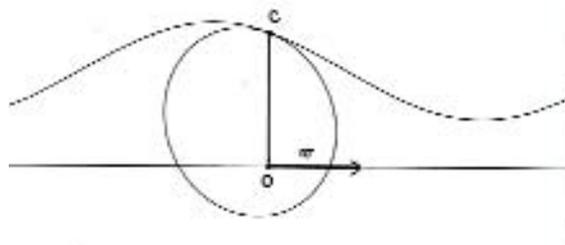


Figura 5

Consideremos rodas não circulares que rolam sem deslizar sobre pavimentos cujo perfil é não rectilíneo (Fig. 5). Na prática, pode não ser tecnicamente fácil garantir que não haja escorregamento da roda, mas não é impossível. Pretendemos que a trajectória do eixo da roda seja rectilínea, de modo a assegurar um deslocamento suave.

O ponto  $C$  de contacto da roda com o pavimento é o centro instantâneo de rotação da roda. Instantaneamente, a velocidade de qualquer ponto da roda é perpendicular ao segmento que o une a  $C$ . Por consequência, a velocidade de  $O$  é perpendicular a  $OC$ . Assim,  $OC$  é, em cada instante, perpendicular à trajectória de  $O$ .

Seja  $y = f(x)$  a equação cartesiana do perfil do pavimento. Se o movimento do veículo é suave, sem solavancos, então o movimento do ponto  $O$ , em torno do qual a

roda gira, em relação ao veículo, é rectilíneo. O eixo dos  $x$  coincide com a trajectória do ponto  $O$ , o eixo dos  $y$  é-lhe perpendicular, sendo a origem arbitrária.

Seja  $r = g(\theta)$  a equação da roda em coordenadas polares. O polo é o ponto  $O$ . Em cada instante, as duas curvas são tangentes no ponto de contacto. Prova-se que a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta}$$

encerra a chave do problema.

### TEOREMA DE COPÉRNICO

No interior de uma circunferência imóvel roda sem deslizar outra circunferência de raio duas vezes menor (Fig. 6). Que linha descreve, durante o movimento, o ponto arbitrário  $K$  da circunferência móvel?

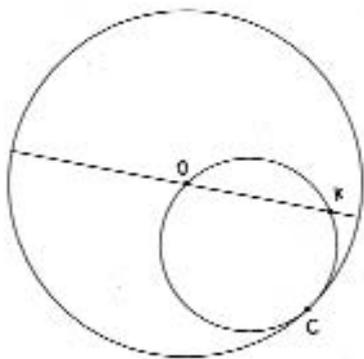


Figura 6

A resposta é surpreendentemente simples: o ponto  $K$  move-se em linha recta, mais precisamente, sobre um diâmetro da circunferência fixa. Este resultado é o *teorema de Copérnico*.

O conceito de centro instantâneo de rotação permite demonstrar facilmente este teorema. O ponto  $C$  de contacto das duas circunferências é o centro instantâneo de rotação. A velocidade do ponto  $K$  é perpendicular a  $CK$ , portanto, dirigida para  $O$ . A trajectória do ponto  $K$  é o diâmetro da circunferência fixa que contém  $K$ . Se a velocidade está dirigida para  $O$ , os vectores  $(v_x, v_y)$  e  $(x, y)$  das componentes cartesianas de  $v$  e de  $K$  são paralelos (eixos ortogonais com origem em  $O$ ). A condição de paralelismo exprime-se por

$$\frac{v_x}{x} = \frac{v_y}{y}$$

Daqui, obtém-se a equação diferencial

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},$$

cuja solução geral é a recta  $y = mx$ , ou seja,  $KO$ .

Na concepção de um rolante com rodas em forma de trevo de quatro folhas, constituídas pela união de quatro arcos de círculo de raio  $r$  cujos centros se situam nos vértices dum quadrado de lado  $\sqrt{2}r$  recorre-se ao Teorema de Copérnico. A pista correspondente é constituída pela união de arcos de círculo de raio  $2r$ .

A Fig. 7 ilustra o movimento da roda em forma de trevo sobre a pista que lhe corresponde.

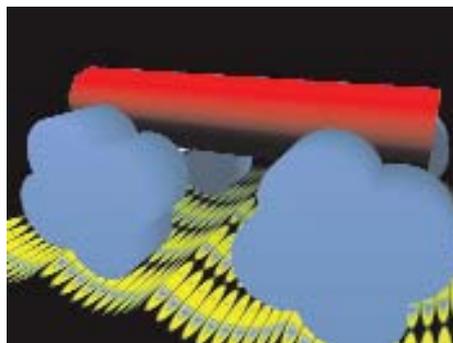


Figura 7

### RODAS RECTANGULARES E CATENÁRIAS

Analisemos o problema das rodas exóticas em algumas situações concretas. Generalizando ligeiramente a situação apresentada no Exploratório de S. Francisco, começaremos por rodas rectangulares rodando em torno do centro do rectângulo.

Para que o movimento do veículo não seja aos solavancos, não basta que o eixo da roda descreva uma trajectória rectilínea. É além disso necessário que a velocidade de translação do eixo seja uniforme. Esta condição exige que a velocidade instantânea de rotação da roda seja, em cada instante, inversamente proporcional à distância entre o eixo e o ponto de contacto deste com a pista.

Consideremos um carro de rodas rectangulares. A catenária surge na solução da equação diferencial que dá o perfil da pista (Apêndice 1). Neste caso, o perfil da pista é constituído por dois tipos de arcos de catenária que se sucedem alternadamente. O que são, afinal, as catenárias?

Nas estações de caminho de ferro encontra-se com frequência o aviso "Atenção às catenárias. Perigo de morte!" As catenárias são os fios suspensos que conduzem a corrente eléctrica assegurando o movimento das locomotivas. Qual a forma que uma corda inextensível e flexível assume quando suspensa de dois pontos fixos? Este problema, proposto por Jacques Bernoulli por volta de 1690 na *Acta Eruditorum*, p.219, foi solucionado pelo autor, por seu irmão Johann, por Huygens e Leibniz. A resposta é a *catenária*.

A catenária é a curva plana cuja equação cartesiana é

$$y = \frac{c}{2}(e^{x/c} + e^{-x/c}),$$

ou seja

$$y = c \cosh(x/c).$$

A série de arcos de catenária serve para carril de uma qualquer roda poligonal regular com mais de três lados. Se a roda for um polígono irregular convexo, o carril deverá ter arcos de catenária de formas diferentes, uma para cada lado da roda. A Fig. 8 ilustra o movimento da roda rectangular sobre a pista que lhe corresponde.

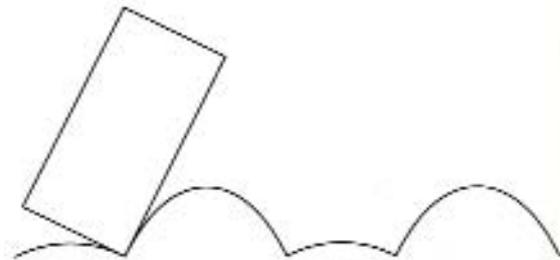


Figura 8

O carro que, no Exploratório de S. Francisco, na Califórnia, se desloca suavemente sobre uma sequência de arcos de catenária congruentes, tem rodas quadradas. Aqui, uma volta das rodas corresponde a quatro arcos de catenária. Pode perguntar-se: que formas deveriam ter as rodas para que uma volta das mesmas correspondesse, respectivamente, a um, a dois, ou a três arcos de catenária? A Fig. 9 sugere a resposta a esta questão.

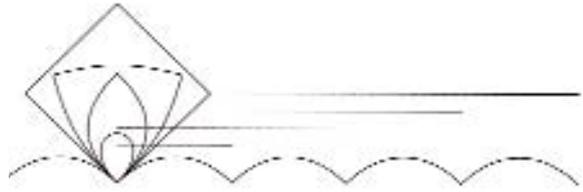


Figura 9

**RODAS EM ESPIRAL, PISTA EM DENTE DE SERRA.**

Consideremos uma pista tipo dente de serra, ou seja, rectilínea por segmentos.

Tomemos o segmento de recta cuja equação cartesiana é

$$y = x, a \leq x \leq b.$$

Então  $dy/dx = 1$ . A equação da roda adequada a esta pista é

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = 1.$$

Verifica-se que a solução geral desta equação é

$$r = C e^{\theta},$$

onde  $C$  é uma constante. A constante pode ser determinada, por exemplo, pelo valor de  $y$  quando  $x$  toma o valor  $a$ . Esta curva é uma das mais famosas em Matemática e tem o nome de *espiral logarítmica*. As primeiras referências a esta curva encontram-se em duas cartas de Descartes ao Padre Mersenne em 1638.

A *spira mirabilis*, nome por que também é conhecida, apresenta propriedades muito interessantes, expostas por J. Bernoulli em dois artigos de 1691 e 1692 nas *Acta Eruditorum* (Opera, t.I) p. 442 e p. 491. A espiral logarítmica despertou a curiosidade de muitos estudiosos, pela sua ocorrência frequente na Natureza (três exemplos: na concha do náutilo, na flor do girassol, nas galáxias espirais.)

A curva dá um número interminável de voltas em redor do pólo correspondendo aos valores positivos de  $\theta$  de 0 a  $\infty$ , desviando-se cada vez mais dele; correspondendo aos valores negativos, de 0 a  $-\infty$ , descreve um número infinito de voltas em redor do polo aproximando-se incessantemente dele mas sem jamais o alcançar.

Se substituirmos a recta  $y = x$  por  $y = m x$ , a equação da roda vem substituída por  $r = C e^{m\theta}$ , como facilmente se prova.

Considerando a pista constituída por segmentos perpendiculares de coeficientes angulares, respectivamente,  $m$  e  $-1/m$ , sucedendo-se alternada e periodicamente, concluímos que a roda tem a forma de caracol. A Fig. 10 ilustra o movimento da roda em forma de caracol sobre a respectiva pista.

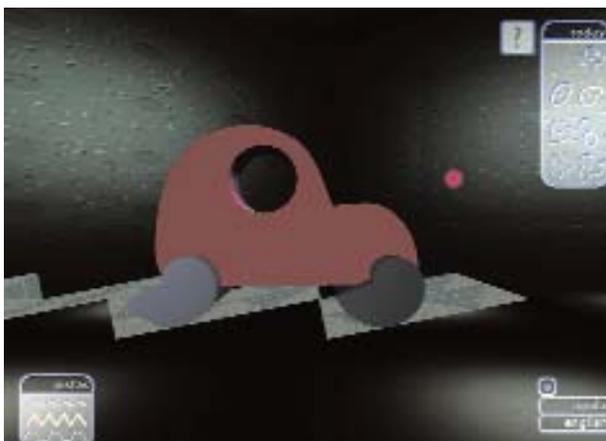


Figura 10

Considerando a pista constituída por segmentos de coeficientes angulares simétricos, respectivamente,  $m$  e  $-m$ , sucedendo-se alternada e periodicamente, a roda correspondente tem a forma de *coração*.

### RODAS ELIPSOIDAIS, PISTAS SINUSOIDAIS

Consideremos o caso de rodas elipsoidais, rodando em torno de um dos respectivos focos. A equação polar de uma elipse, referida ao foco, é da forma

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

onde  $p$  designa o parâmetro e  $0 < e < 1$  a excentricidade.

A resolução da equação diferencial que fornece o perfil da pista conduz-nos a uma função envolvendo o seno. Trata-se, assim, de uma pista sinusoidal cuja amplitude e período são determinados pela excentricidade e pelo parâmetro da elipse (Apêndice 2).

Porém, a pista sinusoidal não serve apenas para rodas elípticas. A Fig. 11 ilustra o movimento de rodas elípticas e a Fig. 12 representa diversas rodas adequadas à mesma pista.

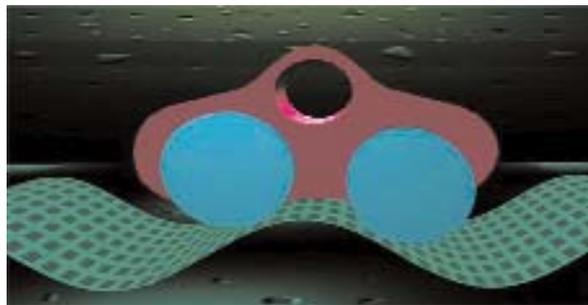


Figura 11

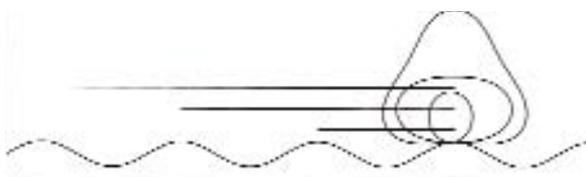


Figura 12

### EQUILIBRANTES

A cada um dos roletes que foram descritos está associado um equilibrante, ou seja, um objecto constituído por duas peças, uma das quais é susceptível de rolar sem deslizar sobre a outra, sendo, além disso, construído de tal modo que, quando a peça móvel rola a partir de uma posição de equilíbrio, são também de equilíbrio todas as posições pelas quais esta peça vai passando sucessivamente. Para que qualquer dos roletes previamente descrito seja também um equilibrante basta que o centro de gravidade da parte móvel esteja convenientemente localizada. Onde?

**BIBLIOGRAFIA**

- David Ballew, *The Wheel of Aristotle*, *The Mathematics Teacher*, vol.65, 1972, 507-509.
- M. Gardner, *Rodas, Vida e Outras Diversões Matemáticas*, Gradiva, Lisboa, 1992.
- G.B.Robison, *Rockers and Rollers*, *Mathematics Magazine*, Janeiro, 1960, 139-144.
- F.G. Teixeira, *Curvas Especiais Notables*, Madrid, Imprensa de la "Gaceta de Madrid", 1905.
- Stan Wagon, *Mathematica in Action*, W.H.Freeman and Company, New York, 1991.

**APÊNDICE**

1. A equação polar de um segmento de recta é da forma

$$r = \frac{C}{\cos \theta},$$

onde  $C$  é uma constante. Por comodidade, tomemos  $C = 1$ . Efectuando alguns cálculos simples, vem

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}} = \sqrt{r^2 - 1}.$$

Visto que nas condições do problema  $y = r$  (o eixo dos  $x$  é a trajectória do ponto  $O$  em torno do qual a roda roda e é também o pólo do sistema de coordenadas polares), a equação diferencial do perfil da pista é

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - 1}.$$

uma solução desta equação é  $y = \cosh x$  e a solução geral é  $y = \cosh(x - k)$ , onde  $k$  é uma constante arbitrária.

2. A equação polar de uma elipse, referida ao foco, tem a forma

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

onde  $p$  designa o parâmetro e  $0 < \theta < 1$  a excentricidade. Efectuando alguns cálculos simples, vem

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{pe \sin \theta}{r(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{e}{p\sqrt{1 - e^2}} \sqrt{p^2 - \frac{(1 - e^2)^2}{e^2} \left(r - \frac{p}{1 - e^2}\right)^2}$$

Visto que nas condições do problema  $y = r$ , a equação diferencial do perfil da pista é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e}{p\sqrt{1 - e^2}} \sqrt{p^2 - \frac{(1 - e^2)^2}{e^2} \left(y - \frac{p}{1 - e^2}\right)^2}.$$

Por meio da mudança de variáveis

$$\xi = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{p} x, \quad \eta = \frac{1 - e^2}{pe} \left(y - \frac{p}{1 - e^2}\right),$$

a equação anterior transforma-se em

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \sqrt{1 - \eta^2}.$$

Uma solução desta equação é  $h = \sin \xi$ , e a solução geral é

$$h = \sin(\xi - k),$$

onde  $k$  é uma constante arbitrária. A solução geral da equação inicial é, pois,

$$y = \frac{p}{1 - e^2} + \frac{p}{1 - e^2} \sin \left( \frac{\sqrt{1 - e^2}}{p} (x - x_0) \right)$$

onde  $x_0$  designa uma constante arbitrária.

Em conclusão, podemos afirmar que a uma roda elipsoidal rodando em torno de um dos focos corresponde uma pista sinusoidal, sendo a amplitude e o período da sinusoide determinados pela excentricidade e pelo parâmetro da elipse. Conclusão análoga vale para a curva

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(n\theta)},$$

onde  $n$  é inteiro.



Foto: César Páris

# COLÓQUIO: FÍSICA, CULTURA E DESENVOLVIMENTO

Coimbra, 15 de Novembro de 2003

Auditório da Reitoria da Universidade de Coimbra

Informações e inscrição | <http://nautilus.fis.uc.pt/cec/2003/spf/>

## Organização:

Sociedade Portuguesa de Física  
Av. Republica, 37, 4º  
1050 - 187 Lisboa

Departamento de Física  
Universidade de Coimbra  
3004 - 516 Coimbra

