PORTUGALIAE PHYSICA
Vol. I — Fasc. 1 — 1943

# SUR UNE GÉNÉRALISATION DE L'OPÉRATEUR DE PROJECTION $\mathcal{E}(\mathrm{I})$

par Ruy Luís Gomes (à Porto)

(Septembre, 1942)

$\mathcal{E}(\lambda)$, résolution de l'identité, est un opérateur de projection avec les propriétés suivantes

$$\alpha)\quad \mathcal{E}(\lambda') \leq \mathcal{E}(\lambda''), \quad \lambda' \leq \lambda''$$

$$\beta)\quad \mathcal{E}(\lambda) = \mathcal{E}(\lambda + 0)$$

$$\gamma)\quad \lim_{\lambda=-\infty} \mathcal{E}(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda=-\infty} \mathcal{E}(\lambda) = 1 .$$

$\alpha$) nous permet d'associer à chaque intervalle fermé $\mathrm{I}[\lambda' \leq \lambda \leq \lambda'']$, de $\mathrm{R}_1$, une projection $\mathcal{E}(\mathrm{I}) = \mathcal{E}(\lambda'') - \mathcal{E}(\lambda')$ et, par conséquent, à chaque élément $\varphi$ de l'espace d'Hilbert, $\mathrm{H}$, une fonction additive et non-négative d'intervalle $\mathrm{U}_\varphi(\mathrm{I}) = \| \mathcal{E}(\mathrm{I}) \varphi \|^2$. $\mathrm{U}_\varphi(\mathrm{I})$, de son côté, peut être le point de départ pour une mesure extérieure $\mathrm{U}^*_\varphi(\mathrm{A})$, définie comme la limite inférieure de $\Sigma \mathrm{U}_\varphi(\mathrm{I}_n)$ sous la condition $\mathrm{A} \subset \Sigma \mathrm{I}^0_n$.

Or, dans ce travail, notre but principal est: 1) de démontrer l'existence d'un opérateur de projection — $\mathrm{E}(\mathrm{A})$ — tel que

$$\mathrm{U}^*_\varphi(\mathrm{A}) = \| \mathrm{E}(\mathrm{A}) \varphi \|^2 ,$$

pour chaque ensemble $\mathrm{A}$ de $\mathrm{R}_1$ et pour tous les éléments $\varphi$ de $\mathrm{H}$; 2) d'étudier leur principales propriètés; et 3) d'en faire une application à la Statistique Quantique.

**1. Définition et construction de l'opérateur $\mathrm{E}(\mathrm{A})$** [1]. Nous considérons successivement le cas d'un ensemble ouvert $\mathrm{G}$, d'un $\mathrm{G}_\delta$ et d'un ensemble quelconque $\mathrm{A}$.

[1] Ce fut Mousieur le Professeur Mira Fernandes qui m'a suggéré d'étudier le problème de l'existence d'un opérateur $\mathrm{E}(\mathrm{A})$; auparavant j'avais étudié seulement les autres propriétés de $\mathrm{U}^*_\varphi$. Après avoir écrit cette note j'ai trouvé dans «Japanese Journal of Mathematics» — Tokyo — Vol XV (1939) — pag 27 un travail de *Y. Mizoguti — Abelsche Gruppe und Funktionensystem* où ce même opérateur est l'objet d'une étude systématique; mais la méthode et le but de l'auteur sont différents de ceux que j'ai en vue.

*a)* Ensemble ouvert G.

Dans ce cas, on peut écrire $G = \sum_n I_n$, $\{I_n\}$ étant une famille dénombrable d'intervalles fermés qui n'empiètent pas les uns sur les autres. Et $\mathcal{E}(\lambda)$, n'ayant qu'un nombre fini ou infini dénombrable de points de discontinuité, il est permis de supposer que $U_\varphi$ est une fonction continue[1] dans les points extrêmes de tous les intervalles $I_n$.

Dans ces conditions, nous obtenons[2]

$$U^*_\varphi(I_n) = U_\varphi(I_n)$$

et, par conséquent,

$$U^*_\varphi(G) = \sum_n U_\varphi(I_n) = \sum_n \| \mathcal{E}(I_n)\varphi \|^2$$

ou encore

$$U^*_\varphi(G) = \| \{ \sum_n \mathcal{E}(I_n) \} \varphi \|^2 ,$$

vu que $\mathcal{E}(I_n)$, $n = 1, 2, \cdots$ sont des projections orthogonales.

La projection demandée — $E(G)$ — est donc la somme $\sum_n \mathcal{E}(I_n)$.

*b)* Ensemble $G_\delta$.

En considérant $G_\delta$ comme la limite d'une succession monotone décroissante d'ensembles ouverts — $G_\delta = \prod_n G_n$, $G_n \subset G_{n-1}$ — nous obtenons

$$U^*_\varphi(G_\delta) = \lim_n U^*_\varphi(G_n) = \lim_n \| E(G_n)\varphi \|^2$$

d'où

$$U^*_\varphi(G_\delta) = \| E(G_\delta)\varphi \|^2 , \quad E(G_\delta) = \lim_n E(G_n) ,$$

car $\{E(G_n)\}$ est une succession monotone décroissante de projections.

*c)* Ensemble quelconque A.

$U^*_\varphi(A)$ étant une mesure extérieure de A, il est possible de déterminer un ensemble $G^{(\varphi)}_\delta$ tel que

$$G^{(\varphi)}_\delta \supset A , \quad U^*_\varphi(A) = U^*_\varphi(G^{(\varphi)}_\delta) .$$

Mais, si on assujettit $\varphi$ à parcourir une famille dénombrable $\{\varphi_n\}$, on peut construire un ensemble $G_\delta$ tel que

$$G_\delta \supset A , \quad U^*_{\varphi_n}(A) = U^*_{\varphi_n}(G_\delta) ,$$

pour tous les éléments de $\{\varphi_n\}$.

[1] S. Saks — *Theory of the Integral* — Cap. III — (2.2) Theorem.
[2] S. Saks — *Theory of the Integral* — Cap. III — (6.2) Theorem.

Il suffit de déterminer des ensembles $G_\delta^{(n)}$ tels que

$$G_\delta^{(n)} \supset A\,, \quad U^*_{\varphi_n}(A) = U^*_{\varphi_n}(G_\delta^{(n)})$$

et d'en prendre le produit $G_\delta = \prod_n G_\delta^{(n)}$.

Supposons maintenant que $\{\varphi_n\}$ soit une famille dense dans tout l'espace H. Nous aurons

$$U^*_\varphi(A) = U^*_\varphi(G_\delta) = \| E(G_\delta)\,\varphi \|^2$$

pour tous les éléments $\varphi$ de H.

En effet, si on détermine un nouvel ensemble $G_{\delta;\varphi}$ tel, que

$$G_{\delta;\varphi} \supset A \quad \text{et} \quad U^*_\varphi(A) = U^*_\varphi(G_{\delta;\varphi}), \quad U^*_{\varphi_n}(A) = U^*_{\varphi n}(G_{\delta;\varphi}),$$

on aura

$$U^*_\varphi(A) = \| E(G_\delta)\,\varphi \|^2,$$

vu que $E(G_\delta)$ et $E(G_{\delta;\varphi})$ coincident en $\{\varphi_n\}$, donc, dans tout l'espace et, en particulier, pour l'élément $\varphi$ qui figure comme argument de $G_{\delta;\varphi}$.

Nous pouvons, donc, énoncer le résultat fondamental de ce travail: *à chaque ensemble* A *de* $R_1$ *correspond un opérateur de projection bien déterminé* — $E(A)$ — *tel que* $U^*_\varphi(A) = \| E(A)\,\varphi \|^2$, *pour tous l'espace d'Hilbert*; *et la construction de* $E(A) = E(G_\delta)$ *se fait à partir d'une succession quelconque* — $\{\varphi_n\}$ — *dense en* H, *par le procédé antérieurement développé.*

## 2. Propriétés principales.

(2.1) $$A \subset B \rightarrow E(A) \leq E(B),$$

A et B étant des ensemble de $R_1$.

En effet, nous avons $U^*_\varphi(A) \leq U^*_\varphi(B)$, c'est à dire, $\| E(A)\,\varphi \|^2 \leq$ $\leq \| E(B)\,\varphi \|^2$, d'où $E(A) \leq E(B)$, vu que $\varphi$ est un élément arbitraire de H.

(2.2) $$E(A) \cdot E(B) = E(B) \,.\, E(A).$$

Il suffit de rappeler la définition de E et le fait que $\mathcal{E}(I') \cdot \mathcal{E}(I'') =$ $= \mathcal{E}(I'') \cdot \mathcal{E}(I')$, $I'$ et $I''$ étant deux intervalles fermés quelconques de $R_1$.

(2.3) $$E(A) \cdot E(B) = E(B) \cdot E(A) = E(AB),$$

A et B étant deux ensembles mesurables $U^*_\varphi$ pour tous les $\varphi$ de H.

En effet, l'hypotèse sur A et B nous permet d'écrire

$$U_\varphi^*(A)+U_\varphi^*(B)=U_\varphi^*(A+B)+U_\varphi^*(AB)$$

pour tous les éléments $\varphi$ de H ; donc

$$E(A)+E(B)=E(A+B)+E(AB).$$

Et si on fait la multiplication des deux membres de cette identité par $E(A)$, on obtient

$$E(A)\cdot E(B)=E(AB).$$

En particulier, si les opérateurs $E(A)$ et $E(B)$ sont orthogonaux, l'opérateur $E(AB)$, associé au produit des deux ensembles A et B, est identiquement nul.

THÉORÈME. *Soit* J *l'intervalle mi-ouvert* $(\lambda'<\lambda\leq\lambda'')$; *la mesure extérieure* $U_\varphi^*$ *de* J *coïncide avec* $U_\varphi(\bar{J})$, *c'est à dire*, $U_\varphi^*(J)=U_\varphi(\bar{J})$.

En effet, si on écrit

$$(\lambda'+\varepsilon\leq\lambda\leq\lambda'')\subset(\lambda'<\lambda\leq\lambda'')\subset(\lambda'<\lambda''+\varepsilon)$$

et si on fait intervennir des propriétés bien connues[1] de la fonction $U_\varphi(I)$, considérée en rapport avec la mesure extérieure correspondante $U_\varphi^*$ on obtient

$$\|\{\mathcal{E}(\lambda'')-\mathcal{E}(\lambda')\}\varphi\|^2\leq U_\varphi^*(J)\leq\|\{\mathcal{E}(\lambda''+\varepsilon)-\mathcal{E}(\lambda')\}\varphi\|^2,$$

d'où, à la limite pour $\varepsilon=0$;

$$U_\varphi^*(J)=\|\{\mathcal{E}(\lambda'')-\mathcal{E}(\lambda')\}\varphi\|^2=U_\varphi(\bar{J}),$$

vu que $\mathcal{E}(\lambda)$ est une fonction continue de $\lambda$ à droite de tous les points de $R_1$.

COROLLAIRE. *La mesure* $U_\varphi^*$ *de l'espace* $R_1$ *coïncide avec* $\|\varphi\|^2$; *l'ensemble vide a une mesure nulle pour tous les* $\varphi$.

Pour ce qui se rapporte à $R_1$, il suffit d'écrire

$$U_\varphi^*(J)=\|\{\mathcal{E}(\lambda'')-\mathcal{E}(\lambda')\}\varphi\|^2\leq U_\varphi^*(R_1)\leq\|\varphi\|^2$$

et d'en prendre la limite pour $\lambda'=-\infty$, $\lambda''=+\infty$, vu que

$$\lim\mathcal{E}(\lambda)=\begin{cases}1 \text{ pour } \lambda=+\infty\\ 0 \text{ pour } \lambda=-\infty\end{cases} \text{ (propriété } \gamma).$$

[1] S. Saks. loc. cit. (6.2) Theorem.

Et si on prend pour $\lambda'$ un point de continuité de $\mathcal{E}(\lambda)$ et si on écrit

$$\mathrm{U}_\varphi^*(\mathrm{J}_n) = \| \{ \mathcal{E}(\lambda_n) - \mathcal{E}(\lambda') \} \varphi \|^2, \quad \mathrm{J}_n \equiv (\lambda' < \lambda \leq \lambda_n), \quad \lambda_n > \lambda',$$

on obtient, à la limite $\lambda_n \to \lambda'$,

$$\mathrm{U}_\varphi^*(0) \leq \lim_n \mathrm{U}_\varphi^*(\mathrm{J}_n) = 0, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{U}_\varphi^*(0) = 0.$$

Ces deux résultats expriment encore que : $\mathrm{E}(0) = 0$, $\mathrm{E}(\mathrm{R}_1) = 1$.

L'opérateur E jouit donc d'un ensemble de propriétés

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \to \mathrm{E}(\mathrm{A}) \leq \mathrm{E}(\mathrm{B})$$
$$\mathrm{E}(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{E}(\mathrm{B}) = \mathrm{E}(\mathrm{B}) \cdot \mathrm{E}(\mathrm{A})$$
$$\mathrm{E}(0) = 0, \quad \mathrm{E}(\mathrm{R}_1) = 1$$

qui correspondent à $\alpha$), $\beta$) et $\gamma$) — opérateur $\mathcal{E}(\mathrm{I})$.

THÉORÈME. *La mesure extérieure* $\mathrm{U}_\varphi^*$ *d'un point* $\lambda$ *de* $\mathrm{R}_1$ *est égale à*

$$\| \{ \mathcal{E}(\lambda - 0) \} \varphi \|^2.$$

En effet, si on prend pour J l'intervalle mi-ouvert $(\lambda_n, \lambda)$, avec $\lambda_{n-1} < \lambda_n < \lambda$, on obtient, à la limite $\lambda_n \to \lambda$,

$$\mathrm{U}_\varphi^*(\lambda) = \lim_n \mathrm{U}_\varphi^*(\mathrm{J}_n) = \| \{ \mathcal{E}(\lambda) - \mathcal{E}(\lambda - 0) \} \varphi \|^2.$$

Il s'en suit, en particulier, que les points de continuité de $\mathcal{E}(\lambda)$ sont les seuls points de $\mathrm{R}_1$ qui ont une mesure $\mathrm{U}_\varphi^*$, nulle pour tous les $\varphi$ de H.

**3. Application à la Statistique Quantique.** Soit un élément de norme unitaire et représentons par $\mathfrak{a}$ la grandeur physique qui admet $\mathcal{E}(\lambda)$ comme résolution de l'identité.

J. von Neumann, dans son livre *Mathematische Grundlagen der Quanten-Mechanik,* p. 104, prend $\mathrm{U}(\mathrm{J}) = \| \{ \mathcal{E}(\lambda'') - \mathcal{E}(\lambda') \} \varphi \|^2$ comme probabilité de la valeur $\lambda$ de $\mathfrak{a}$, $\lambda$ étant un point quelconque de l'intervalle mi-ouvert $(\lambda' < \lambda \leq \lambda'')$, et l'état physique de $\mathfrak{a}$ coïncidant avec $\varphi$.

Or, en égard aux propriétés de $\mathrm{U}_\varphi^*$, on peut généraliser cette définition, qui se rapporte à des ensembles d'un type très particulier, les intervalles J, et arriver ainsi à donner une signification precise à la probabilité d'obtenir comme valeur de $\mathfrak{a}$ un point d'un ensemble A, assujetti à la seule condition d'être mesurable $\mathrm{U}_\varphi^*$ pour tous les $\varphi$ de H.

Il suffit de prendre pour valeur de cette probabilité la mesure extérieure de l'ensemble A, c'est à dire, $U^*_\varphi(A)$.

En effet, les propriétés caractéristiques d'une notion de probabilité sont satisfaites; et on vérifie immédiatement la coïncidence des deux définitions lorsque l'ensemble A se réduit à un intervalle mi-ouvert J.

Note. L'introduction de l'opérateur E(A) avec toutes ces propriétés — celles que nous avons énoncé ici et d'autres encore (en rapport étroit avec les conditions sous lesquelles un ensemble A est mesurable $U^*_\varphi$) nous permet de refaire l'étude des intégrales du type

$$\int_{R_1} F(\lambda)\, dU^*_\varphi, \quad \int_{R_1} F(\lambda)\, dV^*_{\varphi,\psi}$$

$V_{\varphi,\psi}(I)$ étant la fonction de variation limitée $(\mathcal{E}(I)\varphi, \psi)$. Il suffit d'y appliquer la théorie générale des intégrales de Radon-Stieltjes, sous la forme adoptée par S. Saks dans l'ouvrage déjà cité.

## BIBLIOGRAPHIE

S. Saks — *Theory of the Integral* — New-York — 1937 (pour ce qui se rapporte aux propriétés générales d'une mesure extérieure et, en particulier, d'une mesure $U^*$).

J. von Neumann — *Mathematische Grundlagen der Quanten Mechanik* — Berlin — 1932 pour ce qui se rapporte aux propriétés de l'opérateur $\mathcal{E}$ et aux principales notions de la Mécanique Quantique).

H. Stone — *Linear Transformations in Hilbert Space* — New-York — 1932 Cap. VI pour ce qui se rapporte aux intégrales Radon-Stieltjes, pourtant selon une forme très différente).

Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto