PORTUGALIAE PHYSICA
Vol. 1—Fasc. 2—1943

SUR UN NOUVEAU TYPE D'ÉLECTRON

par A. Proca

(Septembre, 1943)

1. Dès les débuts de la mécanique ondulatoire[1], on s'est préoccupé de généraliser les équations fondamentales de manière à leur permettre de satisfaire aux conditions d'invariance de la théorie de la relativité; cependant, pour des raisons dont le sens n'est apparu que beaucoup plus tard, cette généralisation n'a pas conduit aux résultats importants que l'on aurait pu escompter tout d'abord.

Dirac montra quelle était la manière correcte d'atteindre l'invariance relativiste dans le cas de l'électron; il découvrit ainsi le fait remarquable que cette invariance seule suffisait pour conférer à la particule une propriété nouvelle, déjà découverte expérimentalement, à savoir l'existence d'un spin de valeur 1/2. Ce n'était pas tout; l'électron ainsi défini jouissait de propriétés nouvelles qui se manifestaient mathématiquement par l'apparition d'un double signe de l'énergie. On sait comment l'interprétation de Dirac a dégagé le sens physique de cette nouvelle caractéristique et de quelle manière l'expérience a vérifié la théorie.

Ainsi donc, la seule hypothèse de l'invariance relativiste de l'équation fondamentale entraîne automatiquement l'existence de propriétés physiques nouvelles de l'électron théorique.

Dans ces conditions, on peut se demander si l'analyse rappelée plus haut rend compte de *toutes* les propriétés nouvelles introduites par la relativité.

Les considérations suivantes semblent indiquer que la réponse à cette question devrait être négative. En d'autres termes, il semble que la relativité suggère l'existence d'une particule nouvelle qui diffère de l'électron de Dirac, tout en ayant d'ailleurs même masse, même charge et en un certain sens même spin. Un quatrième élément, correspondant précisément à une nouvelle propriété, semble nécessaire pour définir complètement un électron relativiste.

[1] Cf. Schrödinger, Ann. der Physik, 81, 1926, p. 109, Par. 6.

2. En effet, considérons le Lagrangien ou, plus simplement, l'équation relativiste d'un électron en l'absence de champ

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{2\pi\, mc}{h} \psi = 0, \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{1}$$

Dans cette équation, Dirac fait opérer, sur la fonction d'onde ψ à quatre composantes, l'opérateur $\gamma^\mu \partial_\mu$; le symbolisme adopté écrit cet opérateur sous forme d'invariant et l'on sait que cela correspond bien à une invariance effective de l'équation. Les γ^μ sont des opérateurs représentables par des matrices à 4 lignes et 4 colonnes ; ils forment un système qui comprend outre l'unité 1, les γ^μ eux-mêmes et les produits

$$\gamma^\mu \gamma^\nu, \quad \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \quad \text{et} \quad \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 .$$

Or, il est évident que l'on obtiendra encore une équation *invariante*, et pour un ψ qui aura toujours 4 composantes, si l'on ajoute à l'opérateur du premier membre des termes de la forme

$$A_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu + B_{\lambda\mu\nu} \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu + C \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 .$$

Remarquons tout de suite que les termes qui font intervenir le pseudo-vecteur $\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu$ et le pseudo-scalaire $\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4$, ne sont pas *a priori* susceptibles de modifier profondément les caractéristiques de l'électron de Dirac. En effet, les grandeurs qui leur correspondent sont les duales de celles attachées au vecteur γ^μ et au scalaire 1, que l'équation de Dirac contient déjà. Par contre, l'adjonction d'un terme de la forme $A_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu$ *introduira des caractéristiques essentiellement nouvelles* et l'équation ainsi obtenue décrira une particule différente de l'électron ordinaire.

Précisons la forme de ce terme additif. $A_{\mu\nu}$ sera un tenseur antisymétrique formé avec les éléments géométriques et dynamiques qui définissent la particule. Or, avec ces éléments, donc avec les coordonnées x_μ et les $\partial_\nu = \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$, le plus simple tenseur de ce type qu'on puisse former est

$$x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu .$$

La forme la plus simple du terme additif $A_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu$ sera donc

$$a (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu),$$

a étant une constante. En posant

$$m^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$$

la forme finale de l'équation généralisant celle de Dirac sera donc

$$\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu}\psi + i\lambda x_{\sigma} m^{\sigma\mu}\,\partial_{\mu}\psi + \frac{2\pi mc}{h}\psi = 0\,,$$

λ étant une constante ayant comme dimensions l'inverse d'une longueur. L'équation adjoínte sera comme dans le cas de Dirac

$$\partial_{\mu}\psi^{+}\cdot\gamma_{\mu} + i\lambda x_{\sigma}\cdot\partial_{\mu}\psi^{+}\cdot m^{\mu\sigma} - \frac{2\pi mc}{h}\psi^{+} = 0$$

avec

$$\psi^{+} = i\psi^{*}\gamma^{4}\,.$$

L'équation tout à fait générale contiendra aussi les termes duals; nous la laisserons de côté pour le moment.

3. L'équation introduit non seulement les éléments ∂_{μ} d'une translation, mais aussi ceux $x_{\mu}\,\partial_{\nu} - x_{\nu}\,\partial_{\mu}$ d'une rotation infinitésimales.

Le nouvel électron sera caractérisé non seulement par sa masse m, mais aussi par une nouvelle constante fondamentale, attaché à la particule, à savoir la longueur λ. Celle-ci permet de séparer deux régions de l'espace, l'intérieur et l'extérieur d'une sphère rayon $1/\lambda$. Lorsque cetté sphère a un rayon infini ($\lambda = 0$) et seulement dans ce cas, la particule se confond avec l'électron de Dirac.

4. *La particule ainsi définie possède une charge constante.* En effet, on peut définir, comme dans le cas de Dirac, un courant d'Univers

$$j^{\mu} = e\psi^{+}\gamma^{\mu}\psi + ie\lambda\cdot x_{\sigma}\psi^{+} m^{\sigma\mu}\psi\,,$$

lequel est conservatif

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$$

en vertu des équations fondamentales.

5. On peut définir pour cette nouvelle particule *un tenseur d'énergie — quantité de mouvement* dont l'expression explicite est la suivante:

$$\begin{aligned}
-\frac{2\pi}{hc}\mathrm{T}^{ij} = {} & i(\partial^{i}\psi^{+}\cdot\gamma^{j}\cdot\psi - \psi^{+}\cdot\gamma^{j}\cdot\partial^{i}\psi) + \lambda x_{\sigma}(\psi^{+} m^{\sigma j}\cdot\partial^{i}\psi - \partial^{i}\psi^{+}\cdot m^{\sigma j}\cdot\psi) + \\
& + \lambda x^{i}(\psi^{+}\cdot m^{j\sigma}\cdot\partial_{\sigma}\psi - \partial_{\sigma}\psi^{+} m^{j\sigma}\psi) + \partial_{k}\left\{\frac{1}{4}\psi^{+}(m^{ik}\gamma^{j} + \gamma^{j} m^{ik})\psi + \right. \\
& \left. + \frac{i\lambda}{4}x_{\sigma}\cdot\psi^{+}(m^{\sigma i} m^{jk} + m^{jk} m^{\sigma i})\psi - \frac{3i\lambda}{2}(x^{j}\delta^{ik} - x^{k}\delta^{ij})\psi^{+}\psi\right\}\cdot
\end{aligned}$$

Ce tenseur est symétrique en i et j. Dautre part, comme le lagrangien correspondant, il renferme explicitement les coordonnées x_μ et en particulier le temps. Donc, le schéma hamiltonien qui s'en déduit *ne représente pas un système conservatif* et en effet la loi différentielle de conservation de l'énergie-quantité de mouvement n'est pas satisfaite, la divergence de T_{ij} n'est pas nulle. On a :

$$\partial_j T^{ij} = 2\lambda \cdot x^i (\partial_k \psi^+ m^{ik} \partial_j \psi)$$

soit en général

$$\partial_j T^{ij} = x^i \partial_j \left(\frac{\partial L}{\partial x^j}\right)_e \tag{2}$$

où $\left(\frac{\partial L}{\partial x^j}\right)_e$ est la dérivée du lagrangien par rapport aux coordonnées x_j qui y apparaissent explicitement.

Pour $\lambda = 0$, ce tenseur se réduit à celui de l'électron de Dirac.

6. *Le moment cinétique total de la nouvelle particule est une constante.* En effet, formons la densité de ce moment cinétique à la façon habituelle

$$m^{ijk} = x^i T^{jk} - x^j T^{ik}.$$

Or, cette expression vérifie une loi de conservation malgré que le système ne soit pas conservatif quant à l'énergie ; on a :

$$\partial_k m^{ijk} = (T^{ji} - T^{ij}) + x^i \partial_k T^{jk} - x^j \partial_k T^{ik} = 0$$

en vertu de la symétrie de T^{ij} et de la relation (2).

Le moment angulaire total

$$\int m^{ij4}\, dV = \int (x^i T^{j4} - x^j T^{i4})\, dV$$

peut être transformé et mis sous la forme d'une somme de deux termes comme dans le cas de l'équation de Dirac. Comme dans ce dernier cas d'ailleurs, cette séparation ne doit pas correspondre á une réalité physique directement observable.

Dans le cas de Dirac, les deux termes sont le «moment d'orbite», expression dépendant directement et explicitement des coordonnées, et un «spin» qui ne dépend que de la valeur du champ, c'est-à-dire du ψ au point considéré. Une pareille séparation peut être effectuée également pour la nouvelle particule. Comme la précédente, elle est arbitraire, mais *il est raisonnable de considérer la partie qui ne dépend pas explicitement des coordonnées comme un moment angulaire propre à la* *particule c'est-à-dire comme un spin.* Or, cette partie s'écrit, ainsi qu'on le voit immédiatement

$$\int \frac{ihc}{8\pi} \psi^{+} (\gamma^{4} \gamma^{i} \gamma^{j} - \gamma^{j} \gamma^{i} \gamma^{4}) \psi \, dV .$$

Elle a la même forme que celle qui apparaît dans le cas de l'électron de Dirac et correspond au spin de celui-ci. Le «moment d'orbite» dépend explicitement du «point sur l'orbite», c'est-à-dire des coordonnées et cela d'une manière qui diffère de celle de Dirac les x_μ ayant d'ailleurs des origines différentes. Cette différence assure la conservation du moment total malgré la non-conservation de l'énergie.

D'autres séparations en deux termes peuvent être faites, mais une analyse plus serrée est nécessaire pour définir le «spin» dans le cas de la particule actuelle.

7. En résumé, d'après la description précédente, le nouvel «électron» est une particule qui a droit à ce nom puisqu'il garde une charge électrique constante; il garde aussi un moment angulaire total constant et l'on peut raisonnablement lui attribuer un spin. Sa caractéristique la plus curieuse est le fait que, même libre, et malgré qu'il garde une charge électrique et un moment cinétique constants, son énergie varie; il en perd ou en gagne suivant le signe de λ.

Si l'on observe globalement des électrons libres identiques issus d'une même source mais qui en sortent à des époques différentes quelconques de leur vie, on constatera que leurs énergies forment un spectre continu; ce spectre devra même être limité du côté des grandes énergies par la valeur de l'énergie maxima que possède l'électron au moment de sa création.

Un mécanisme de ce genre peut donc être utilisé pour rendre compte de phénomenes qui ne semblent pas obéir au principe de la conservation de l'énergie, — comme par exemple le spectre continu des rayons β du radium E, pour lequel on a été obligé d'imaginer l'ypothèse, passablement artificielle, de l'existence d'un *neutrino*.

Tout cela est évident une fois admise la non conservation de l'énergie, et non seulement le nouvel électron mais aussi tout mécanisme satisfaisant à cette condition peut être utilisé pour expliquer le phénomène ci-dessus. L'intérêt de la solution qu'offre la nouvelle particule proposée tient cependant à deux raisons.

En premier lieu, elle montre de quelle façon simple on peut attaquer les problèmes des corpuscules non-conservatifs : il suffit d'utiliser des lagrangiens qui contiennent explicitement les coordonées de la manière indiquée. L'emploi de tels lagrangiens a été écarté d'emblée chaque fois qu'il a fallu définir une nouvelle particule. Si forte est la conviction qu'une particule constitue un système *fermé* et que par conséquent, elle doit avoir une énergie constante, que même devant le témoignage expérimental fourni par le spectre continu du Ra E, on a préféré introduire le neutrino plutôt que d'y renoncer. Il n'y a naturellement jusqu'à présent aucune raison d'admetre que ce spectre continu soit précisément une manifestation des propriétés décrites du nouvel électron. Néanmoins, celui-ci offre un exemple de corpuscule qui n'est pas un système fermé et dont *une partie* de l'énergie varie, sans que cela entraîne cependant une altération du caractère conservatif de la charge ou du spin. Remarquons toutefois que cette non-conservation apparaît ici dans les conditions particulières dans lesquelles l'équation a été écrite, c'est-à-dire en relativité restreinte. Elle n'exclut pas à priori une compensation, de nature gravitationnelle par exemple, qui apparaîtrait dès qu'on se placerait dans le cadre de la relativité générale où le principe de conservation de l'énergie devrait être satisfait.

En second lieu, l'intérêt de cette solution consiste dans le fait *qu'elle n'est pas une solution ad hoc,* mais qu'elle découle automatiquement de l'application de la relativité restreinte au choix de l'équation d'onde. En suivant la voie ouverte par Dirac, laquelle conduit à des résultats vérifiés par l'expérience, et en appliquant intégralement les procédés utilisés, c'est-à-dire en tenant compte également des termes en $\gamma^\mu \gamma^\nu$, on trouve que la solution la plus simple présente les caractères que nous avons décrits plus haut. Cette solution semble en quelque sorte imposée par la relativité. Pour cette raison il convient de l'analyser à fond, jusqu'à ses dernières conséquences, de façon à pouvoir nous rendre compte si, malgré son caractère inusité, elle n'est pas en mesure de nous conduire, même indirectement, à de nouveaux résultats expérimentaux.