

MÉCANIQUE ALÉATOIRE

par G. DEDEBANT et PH. WEHRLÉ (à Paris)

1^{ÈRE} PARTIE — LE CALCUL ALÉATOIRE

(Suite) (Reçu le 13 Mars 1945)

NOTE — Dans le volume 1 (1944) — Fasc. 3 — P. 95-150, de cette Revue, nous avons publié la première partie d'un mémoire sur la «Mécanique Aléatoire».

Avant de passer à la seconde partie, nous présentons ici :

- 1.^o) quelques errata, d'ailleurs de peu d'importance, relatifs au texte déjà paru et rectifiant des fautes typographiques.
- 2.^o) trois annexes contenant des développements mathématiques intéressants, mais que nous avons d'abord estimé pouvoir passer sous silence, dans un exposé condensé qui s'adressait surtout aux Physiciens.

ERRATA

(au texte du Vol. 1, fasc. 3, p. 95-150)

- Page 95, ligne 2: supprimer la (,) après «l'idée statistique».
- Page 95, ligne 4: après «W. Gibbs», remplacer (:) par (,).
- Page 97, ligne 18: après «Ne nous y trompons pas» remplacer (,) par (:).
- Page 98, ligne 14: au lieu de «aaleur» lire «valeur».
- Page 100, dernière ligne: au lieu de «suffisantep our» lire «suffisante pour».
- Page 102, ligne 13: au lieu de «molécules différents» lire «molécules différentes».
- Page 108, au bas de la page: remplacer partout $r(t+h, t+k)$ par $r(t+h, t+h+k)$.
- Page 111, ligne 3: au lieu de «orde» lire «ordre».
- Page 114, lignes 4 et 5: remplacer \dot{X}/t par \ddot{X}/t et X/t par \dot{X}/t .
- Page 116, ligne 24: au lieu de $S_n^2 \leq S_{n-1} S_{n-1}$ lire $S_n^2 \leq S_{n-1} S_{n+1}$.
- Page 117, ligne 10: au lieu de $r(h) = \sum_0^{\infty} a_n \cos n\omega$ lire $r(h) = \sum_0^{\infty} a_n \cos n\omega h$.

Page 117, ligne 20: placer une (,) après «le plus général».

Page 119, dernière ligne: au lieu de $\dot{U}_z \dot{U}^x$, lire $\dot{U}_z \dot{U}_x$.

Page 120, ligne 16: au lieu de «dérivés», lire «dérivées».

Page 136, dernière ligne: au lieu de $\frac{\omega^1 x^2 + u^2}{2}$, lire $\frac{\omega^2 x^2 + u^2}{2}$.

Page 137, ligne 18: au lieu de $\frac{\omega^2 x^2 + u^2}{2}$, lire $\frac{\omega^2 x^2 + u^2}{2}$.

Page 139, ligne 21: au lieu de $(\sin^2 \omega (t_2 - t_1))$, lire $\sin^2 \omega (t_2 - t_1)$.

Page 148, ligne 16: au lieu de «léatoire» lire «alcatoire».

ANNEXE I

Sur la condition de dérivabilité aléatoire

1. Une condition *nécessaire* de dérivabilité aléatoire est que — $r(t, h)$ étant le coefficient de corrélation entre deux valeurs X/t et $X/t+h$, de la fonction aléatoire X/t — le rapport

$$\frac{1-r(t, t+h)}{h^2}$$

tende vers une limite, lorsque $h \rightarrow 0$ (condition I). Cela entraîne que :

$$\frac{1-r(t, t+h)}{h^2} = \lambda + \varphi(h),$$

λ et $\varphi(h)$, dépendant de t , et $\varphi(h)$ s'annulant avec h .

La condition *nécessaire et suffisante* est qu'il existe un nombre aléatoire \dot{X} , tel que :

$$\overline{(U/h - \dot{X})^2}$$

tende vers zéro avec h , U/h désignant le rapport incrémentiel :

$$\frac{X/t+h - X/t}{h} \quad (\text{condition II})$$

Comme on ne connaît pas d'avance la dérivée, on doit utiliser un critère semblable à la règle de convergence mutuelle que *Cauchy* a employée pour décider de la convergence d'une suite, sans en connaître d'avance la limite. Ce critère est le suivant :

Il faut et il suffit que :

$$\overline{(U/h - U/k)^2}$$

tende vers zéro, lorsque h et k tendent vers zéro, *chacun pour leur compte*.

On peut toujours supposer $|k| \geq |h|$. Or :

$$\overline{(U/h - U/k)^2} = \overline{U^2/h} + \overline{U^2/k} - 2 \overline{U/h U/k}.$$

La condition cherchée se réduit donc à ce que :

$\overline{U/h U/k}$ tende vers $\overline{U^2/0} = S^2$, quand h et k tendent vers 0.

L'on a :

$$\overline{U/h U/k} = \frac{1}{hk} [S(t+h)S(t+k)r(t+h, t+k) - S(t)S(t+h)r(t, t+h) - S(t)S(t+k)r(t, t+k) + S^2(t)],$$

$S(t)$ désignant l'écart type de U à l'instant t .

Supposons $S(t+h)$ développable en série de Taylor jusqu'au second ordre.

On trouve, à des infiniment petits près, que la condition pour que X/t soit dérivable se réduit à :

$$\lim_{h \rightarrow 0} A = \frac{k}{h} [\varphi(k) - \varphi(k-h)] = 0$$

Cette condition n'est pas automatiquement réalisée, car si $\varphi(k)$ et $\varphi(k-h)$ tendent bien vers zéro, on ne peut rien dire du rapport $x = \frac{h}{k}$, sinon qu'il reste compris entre -1 et $+1$.

Notons tout de suite que la valeur $+1$ n'est prise par x que pour $h=k=0$ et $\lim \frac{h}{k} = 1$. En ce cas, la condition est toujours vérifiée.

Nous pourrions donc supposer dorénavant que x ne prend jamais la valeur $+1$.

2. Nous allons montrer que la condition suivante est *suffisante* pour conclure à la dérivabilité :

Théorème — Si la fonction $\varphi(h)$ est de la forme :

$$\varphi(h) = \frac{1}{h} \mu(h),$$

$\mu(h)$ étant telle que, pour $h=0$:

- a) elle soit continue et que $\mu(0)=0$;
- b) elle admette une dérivée première continue et que $\mu'(0)=0$; alors la fonction aléatoire X/t est dérivable.

On a en effet :

$$A = \frac{\mu(k) - x \mu(k) - \mu[k(1-x)]}{kx(1-x)}$$

et, en utilisant la formule des accroissements finis :

$$A = \frac{\mu' [k(1-\theta x)] - \mu'(\theta_1, k)}{1-x} \quad 0 < (\theta \text{ ou } \theta_1) < 1.$$

Quel que soit x — du moment que la valeur 1 peut toujours être écartée. — A tend vers zéro, quand $k \rightarrow 0$, en raison de la propriété de continuité prêtée à μ' .

Ainsi, le coefficient de corrélation suivant — à supposer qu'il satisfasse aux conditions de cohérence — :

$$\begin{cases} r(h) = 1 - \lambda h^2 - \lambda_1 |h|^{5/2} \sin \frac{1}{h}, & \text{pour } h \leq h_0 \\ r(h) = 0 & \text{pour } h > h_0 \end{cases}$$

est, malgré la bizarrerie de la fonction $\sin \frac{1}{h}$ (pour $h=0$), une fonction aléatoire dérivable.

Pour contre, si $\sin \frac{1}{h}$ est remplacé par $\sin \frac{1}{h^2}$, la fonction aléatoire n'est plus dérivable, car si la condition (I) est bien satisfaite, la condition (II) ne l'est pas.

ANNEXE II

Primitive et intégrale d'une fonction aléatoire

1. Soit U/t , une fonction aléatoire — que nous supposons *stationnaire* pour simplifier — non nécessairement dérivable, de valeur probable nulle, d'écart type S , de coefficient de corrélation :

$$r(t_2 - t_1) = r(h).$$

Nous la considérons comme *bien définie* par ces données et nous appelons *primitive* de U/t , toute fonction aléatoire X/t , qui admet U pour dérivée. Sera donc une primitive de U , toute fonction aléatoire X dont le moment rectangle vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \overline{X_1 X_2} = \overline{U_1 U_2}.$$

$\overline{U_1 U_2}$ étant une fonction de $h = t_2 - t_1$, une double intégration donne :

$$\overline{X_1 X_2} = -S^2 \int_0^h (h-s) r(s) ds + c_1(t_1) + c_2(t_2).$$

Mais, $\overline{X_1 X_2}$ étant symétrique en t_1, t_2 , les deux fonctions arbitraires c_1 et c_2 se réduisent en réalité à une seule c , dont il est facile d'ailleurs d'avoir la signification en faisant $t_1 = t_2$. On trouve :

$$2c(t) = \sigma^2(t)$$

$\sigma(t)$ désignant l'écart type de X .

Ainsi :

$$\overline{X_1 X_2} = \frac{1}{2} [\sigma^2(t_1) + \sigma^2(t_2)] - S^2 \int_0^h (h-s) r(s) ds.$$

2. La forme la plus générale du coefficient de corrélation d'une fonction aléatoire stationnaire est :

$$r(s) = 1 - \psi(s)$$

où $\psi(s)$ est une fonction paire, s'annulant pour $s=0$ (nous admettons implicitement qu'elle est telle que r satisfasse aux conditions de cohérence).

Mais, $\psi(s)$ ne saurait être aussi générale, car le fait que X est dérivable entraîne sur la forme de son moment rectangle, des restrictions qui ont leur répercussion sur $r(s)$, donc sur $\psi(s)$. Pour les déterminer, choisissons la primitive stationnaire ($\sigma = c^{1e}$), ce qui n'enlève rien d'essentiel au résultat. Le coefficient de corrélation de cette primitive stationnaire est :

$$R(h) = 1 - \frac{S^2}{2\sigma^2} h^2 + \frac{S^2}{2\sigma^2} \int_0^h (h-s) \psi(s) ds$$

$R(h)$ doit satisfaire à la condition que nous avons appelé (II) à l'Annexe précédente et que nous avons transformée par le critère de Cauchy. Cela donne :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{h} \left[\frac{1}{k^2} \int_0^k (k-s) \psi(s) ds - \frac{1}{(k-h)^2} \int_0^{k-h} (k-h-s) \psi(s) ds \right] = 0.$$

Posons $\frac{k}{h} = x$, elle devient :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k^2 x (1-x)^2} \left[(1-x)^2 \int_0^k (k-s) \psi(s) ds - \int_0^{k-kx} (k-kx-s) \psi(s) ds \right] = 0$$

pour k , tendant vers zéro, x restant compris entre -1 et $+1$, mais n'atteignant pas la valeur 1.

Transformant la seconde intégrale et effectuant des simplifications, on trouve :

$$\lim \frac{1}{(1-x)^2} \left[(x-2) \frac{1}{k^2} \int_0^k (k-s) \psi(s) ds - \frac{1}{k} \int_0^k \psi(s) ds + \frac{1}{k} \int_0^k \psi(sx) ds \right] = 0$$

et l'on se rend facilement compte que cela entraîne les deux conditions :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \int_0^k \psi(s) ds = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k^2} \int_0^k s \psi(s) ds = 0$$

La seconde, transformée par la formule de la moyenne, devient :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\theta}{k} \int_0^k \psi(s) ds = 0 \quad 0 < \theta < 1.$$

Elle est donc évidemment satisfaite si la première l'est et, transformant celle-ci par la formule des accroissements finis, on voit finalement que la condition *nécessaire et suffisante* est que $\psi(h)$ soit *continue pour* $h=0$.

On vérifie par ailleurs facilement qu'à cette condition, $R(h)$ satisfait bien au critérium de dérivabilité que nous avons énoncé dans l'Annexe (I).

La condition trouvée signifie que U est continue en moyenne quadratique.

3. Partons maintenant de l'intégrale indéfinie :

$$X/t = \int_a^t U/s ds$$

A , désignant une constante aléatoire, toutes les intégrales de U rentrent dans la forme :

$$X/t = \int_0^t U/s ds + A = Z + A,$$

Z désignant l'intégrale particulière :

$$Z/t = \int_0^t U/s ds$$

On en déduit :

$$\overline{X_1 X_2} = \overline{Z_1 Z_2} + \overline{AZ_1} + \overline{AZ_2} + \overline{A^2}.$$

On doit considérer $\overline{AZ_1} + \frac{A^2}{2}$, comme une fonction arbitraire de t , puisque la corrélation entre Z et la constante aléatoire A peut être choisie à notre gré.

On a donc :

$$\overline{X_1 X_2} = \overline{Z_1 Z_2} + c(t_1) + c(t_2)$$

En faisant $t_1 = t_2$, on trouve une interprétation de $c(t)$:

$$c(t) = \frac{\sigma^2 - \Sigma^2}{2}$$

σ , étant l'écart type de X , et Σ , celui de Z .

Donc :

$$\overline{X_1 X_2} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} + \overline{Z_1 Z_2} - \frac{\overline{Z_1^2} + \overline{Z_2^2}}{2} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} - \frac{(\overline{Z_2} - \overline{Z_1})^2}{2}$$

C'est bien la formule de tout à l'heure, car :

$$\overline{(\overline{Z_2} - \overline{Z_1})^2} = \overline{\left(\int_{t_1}^{t_2} Z/s ds \right)^2} = 2S^2 \int_0^h (h-s)r(s) ds$$

4. Cherchons la condition pour que U/t soit la dérivée de :

$$X/t = \int_a^t U/s ds$$

Nous avons vu au chapitre de l'intégration aléatoire qu'il était pour cela nécessaire et suffisant que l'intégrale certaine :

$$\frac{1}{h^2} \iint (\overline{U/\alpha} - \overline{U/t})(\overline{U/\beta} - \overline{U/t}) d\alpha d\beta$$

étendue à un carré de côté h , tende vers zéro avec h .

Nous servant de l'inégalité de Schwarz, nous avons alors montré que c'était bien le cas lorsque U était *continue* en moyenne quadratique. Cette condition suffisante n'apparaissait pas nécessaire. Cherchons à serrer le problème de plus près et pour cela, plaçons nous dans le cas stationnaire.

En posant :

$$r(s) = 1 - \psi(s),$$

la condition cherchée s'exprime ainsi :

$$\lim \frac{1}{h^2} \iint [\psi(\alpha) + \psi(\beta) - \psi(\beta - \alpha)] d\alpha d\beta = 0$$

et elle se réduit à la suivante :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \Phi(h) = \frac{1}{h^2} \int_0^h s \psi(s) ds = 0$$

La formule des accroissements finis, appliquée à la fonction $\Phi(h)$, nulle pour $h=0$ et qui admet la dérivée $h\psi(h)$, nécessairement finie, puisque $\psi(h) < 1$, permet de la remplacer par celle-ci :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \vartheta \Phi(\vartheta h) = 0,$$

ϑ étant un nombre dépendant de h , et compris entre 0 et 1 — *limites exclues* — Comme $\Phi(0)=0$, la condition signifie que Φ est continue pour $h=0$, donc aussi $r(h)$, donc que U est continue en moyenne quadratique.

Ces résultats sont entièrement d'accord avec les précédents. On peut donc énoncer le théorème suivant dont on remarquera l'analogie avec le théorème correspondant de l'Analyse certaine :

Théorème — L'intégrale aléatoire $\int_a^t U/s ds$ admet U/t pour dérivée en tous les points où U/t est continue en moyenne quadratique.

5. Les points de rigueur étant traités, on peut faire quelques réflexions intéressantes du point de vue physique. La primitive X , de U , définie par son moment rectangle, dépend donc d'une *fonction arbitraire*. On peut dire aussi, en langage de la Mécanique, qu'il y a une infinité de corpuscules *distincts* admettant la même vitesse. Cette indétermination est plus grande que celle de la Mécanique certaine, dans laquelle une vitesse définit un *seul* corpuscule, à un changement d'origine près. Il y a là un fait qui augmente beaucoup le pouvoir d'explication de la Mécanique aléatoire.

6. Prenons l'exemple de la fonction aléatoire U dont le moment rectangle est :

$$\overline{U_1 U_2} = S^2 \cos \omega(t_2 - t_1)$$

Ses primitives sont définies par le moment rectangle :

$$\overline{X_1 X_2} = \frac{\sigma^2(t_1) + \sigma^2(t_2)}{2} - \frac{S^2}{\omega^2} + \frac{S^2}{\omega^2} \cos \omega(t_2 - t_1)$$

Il en existe, en particulier, de *stationnaires* (lorsque σ est une constante) :

$$\overline{X_1 X_2} = \left(\sigma^2 - \frac{S^2}{\omega^2} \right) + \frac{S^2}{\omega^2} \cos \omega(t_2 - t_1)$$

Mais le problème de la recherche de la primitive est *bien plus restreint* quand on prête à U une forme analytique certaine, dépendant de constantes aléatoires. Nous avons dit, en son temps, qu'une telle représentation manquait de généralité; nous savons pourtant qu'on obtient un moment rectangle identique à celui que nous venons de choisir pour U , en prenant la fonction aléatoire :

$$V = A \omega \cos(\omega t - \Phi),$$

oscillateur à fréquence certaine (Φ est un nombre aléatoire, compris entre 0 et 2π , de probabilité uniforme et indépendant du nombre aléatoire A).

En intégrant directement l'expression analytique de V , on obtient :

$$Y = A \sin(\omega t - \Phi) + B,$$

B étant une constante aléatoire pouvant, a priori, être corrélée avec A et Φ .

Le moment rectangle de Y est :

$$\begin{aligned} \overline{Y_1 Y_2} = & \frac{\overline{A^2}}{2} \cos \omega(t_2 - t_1) + \overline{AB \cos \Phi} (\sin \omega t_1 + \sin \omega t_2) \\ & - \overline{AB \sin \Phi} (\cos \omega t_1 + \cos \omega t_2) + \overline{B^2} \end{aligned}$$

Il ne dépend plus que de *constantes arbitraires* ($\overline{AB \cos \Phi}$, $\overline{AB \sin \Phi}$, $\overline{B^2}$) et non d'une *fonction arbitraire*.

Par contre, la solution stationnaire redonne le même moment rectangle que tout à l'heure :

$$\overline{Y_1 Y_2} = \overline{X_1 X_2} = \frac{\overline{A^2}}{2} \cos \omega(t_2 - t_1) + \overline{B^2} = \left(\sigma^2 - \frac{S^2}{\omega^2} \right) + \frac{S^2}{\omega^2} \cos \omega(t_2 - t_1)$$

Il n'y a rien dans ces faits qui doive nous surprendre. L'intérêt du concept aléatoire est précisément d'étudier les propriétés communes à toute une classe de fonctions ayant sur des *épreuves individuelles* des

réalisations fort diverses. Mais, ce qu'il est important de retenir de la possibilité de représenter une fonction aléatoire stationnaire par un oscillateur, c'est que — tant qu'on demeure dans la stationnarité — cette représentation, quoique grossière et naïve, possède à peu près toutes les propriétés statistiques requises. Sans doute faut-il voir là la raison profonde pourquoi le schéma de *l'oscillateur* possède en Physique, malgré sa simplicité, un pouvoir d'explication si étendu. On pourrait en dire autant du *schéma des chocs moléculaires*.

7. Une des primitives de U est particulièrement remarquable : c'est l'intégrale

$$Y = \int_0^t U/s ds$$

dont l'écart type est Σ , tel que :

$$\Sigma^2(t) = Y^2 = 2S^2 \int_0^t (t-s)r(s) ds$$

Le moment rectangle de la primitive générale a donc pour expression :

$$\overline{X_1 X_2} = \frac{\sigma^2(t_1) + \sigma^2(t_2) - \Sigma^2(t_2 - t_1)}{2} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \Sigma^2}{2},$$

et son coefficient de corrélation est par suite :

$$R(t_1, t_2) = 1 - \frac{\Sigma^2(t_2 - t_1) - [\sigma(t_2) - \sigma(t_1)]^2}{2\sigma(t_1)\sigma(t_2)} = 1 - \frac{\Sigma^2 - (\sigma_2 - \sigma_1)^2}{2\sigma_1\sigma_2}$$

Rien n'oblige le R ainsi obtenu à être, a priori, « un r », c'est à dire à vérifier les conditions de cohérence. La fonction indéterminée $\sigma(t)$ ne peut donc être choisie arbitrairement. Ainsi, pour que R soit compris entre -1 et $+1$ (1^{ère} condition de cohérence), elle doit satisfaire à l'inégalité triangulaire :

$$|\sigma_2 - \sigma_1| \leq \Sigma \leq \sigma_1 + \sigma_2$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, cette condition redonne l'inégalité déjà connue entre la dérivée de l'écart type et l'écart type de la dérivée :

$$|\sigma'| \leq S$$

8. Cherchons si, parmi les primitives de U , il peut en exister de *stationnaires*. Il faut pour cela que l'écart type $\sigma(t)$ soit une constante. Le coefficient de corrélation se réduit alors à :

$$R = 1 - \frac{\Sigma^2}{2\sigma^2}$$

et il est bien effectivement une fonction de $(t_2 - t_1) = h$, seulement.

Mais cela ne suffit pas. Ici se présente une circonstance caractéristique du Calcul aléatoire : il faut encore que R satisfasse aux conditions de cohérence. La première de ces conditions ($|R| \leq 1$) exige que l'intégrale :

$$\Sigma^2 = 2S^2 \int_0^h (h-s)r(s) ds$$

reste bornée quel que soit h , et en particulier quand $h \rightarrow \infty$, sinon on ne pourrait choisir la constante arbitraire σ de manière que $\sigma \geq \frac{\Sigma}{2}$.

Cela entraîne des restrictions sur la forme de $r(s)$; autrement dit toute fonction aléatoire stationnaire intégrable n'admet pas nécessairement des intégrales stationnaires.

Ainsi, le coefficient de corrélation :

$$r(s) = e^{-s^2}$$

représente une fonction aléatoire qui n'admet aucune intégrale stationnaire. En effet, l'intégrale :

$$\int_0^h (h-s)e^{-s^2} ds$$

a pour expression asymptotique :

$$h \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds$$

et croît donc indéfiniment avec h .

La seconde condition de cohérence conduit à l'inégalité :

$$\frac{\Sigma^4(h)}{\sigma^2} \leq 4 \Sigma^2(h) - \Sigma^2(2h).$$

Elle crée sur Σ la condition suivante :

$$2 \Sigma(h) \geq \Sigma(2h)$$

La courbe $\Sigma(h)$ ne pourra franchir la droite de coefficient angulaire S , à laquelle elle est tangente à l'origine.

On doit prendre σ^2 plus grand que :

$$\frac{\Sigma^4(h)}{4 \Sigma^2(h) - \Sigma^2(2h)}$$

et cette borne est supérieure ou égale à celle, $\frac{\Sigma^2(h)}{4}$, imposée par la 1^{ère} condition de cohérence.

9. Les conditions de cohérence d'ordre supérieur donneraient sans doute des bornes encore plus strictes. Quoi qu'il en soit, si Σ est bornée *supérieurement* (ce qui ne veut pas dire nécessairement que Σ tende vers une limite quand $h \rightarrow \infty$), il existe une infinité d'intégrales stationnaires dont les écarts types σ sont bornés *inférieurement*. Il y en aura généralement une correspondant au minimum σ_0 des σ . Soit $\mathfrak{R}(h)$ son coefficient de corrélation.

Les coefficients de corrélation $R(h)$ des autres intégrales stationnaires s'expriment au moyen de $\mathfrak{R}(h)$ par la formule linéaire :

$$R(h) = \left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right) + \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \mathfrak{R}(h)$$

On déduit de là que :

$$R(h) \geq \mathfrak{R}(h)$$

Ainsi, toutes les courbes $R(h)$ se cantonnent dans la région du plan comprise entre la courbe $\mathfrak{R}(h)$ et la droite d'ordonnée $+1$.

De plus, il est facile de vérifier que, $\mathfrak{R}(h)$ satisfaisant aux conditions de cohérence, $R(h)$ y satisfait a fortiori. En effet, ces conditions expriment que la forme quadratique :

$$\Sigma \lambda_i^2 + 2 \Sigma \Sigma R_{ij} \lambda_i \lambda_j$$

est définie positive.

Or, elle s'écrit :

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} (\Sigma \lambda_i^2 + 2 \Sigma \Sigma \mathfrak{R}_{ij} \lambda_i \lambda_j) + \left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right) (\Sigma \lambda_i)^2,$$

expression qui est positive si le premier terme l'est (puisque $\sigma_0 \leq \sigma$).

10. $\Sigma(h)$ étant une fonction bornée pour toute valeur de h (même pour $h \rightarrow \infty$), la courbe $\Sigma(h)$ peut présenter l'une ou l'autre des deux allures suivantes :

- a) tendre vers une asymptote horizontale.
- b) être périodique ou presque périodique.

Dans le cas a), $R(h)$ tend aussi vers une asymptote horizontale, soit $R = \mu$. Considérons alors p instants; il leur correspond $\frac{p(p-1)}{2}$ coefficients de corrélation et l'on peut toujours s'arranger — quel que grand que soit p — pour que ceux-ci soient aussi voisins de μ qu'on le désire. Or, nous avons vu — à propos de l'Intégration aléatoire, 1^{ère} Partie, page 134 — que si un très grand nombre de variables aléa-

toires présentent deux à deux la même corrélation, celle-ci ne saurait être négative. Donc μ est nécessairement positif ou nul.

On peut donner davantage de précisions. La seconde condition de cohérence, lorsque deux sur trois des coefficients de corrélation sont égaux à μ , s'écrit :

$$R(h) \geq -1 + 2\mu^2$$

$R(h)$ est donc bornée inférieurement par une valeur supérieure à -1 . A mesure que μ croît, le champ de variation possible se restreint et si $\mu=1$, $R(h)$ ne peut plus prendre que la valeur 1 (et l'on est dans le cas d'une constante aléatoire).

Donnons un exemple. Soit :

$$r(h) = -(2h^2 - 1)e^{-h^2}$$

$-2(2h^2 - 1)$ étant le 2^{ème} polynôme d'Hermite — le coefficient de corrélation d'une fonction aléatoire U , d'écart type $S=1$. Une des primitives stationnaires \mathfrak{X} admet l'écart type $\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et le coefficient de corrélation :

$$\mathfrak{R}(h) = e^{-h^2},$$

qui satisfait bien aux conditions de cohérence.

Les autres primitives stationnaires ont pour coefficient de corrélation :

$$R(h) = \left(1 - \frac{1}{2\sigma^2}\right) + \frac{1}{2\sigma^2} e^{-h^2}.$$

Quand $h \rightarrow \infty$, $R(h) \rightarrow 1 - \frac{1}{2\sigma^2}$ et cette quantité doit être ≥ 0 , donc :

$$\sigma^2 \geq \frac{1}{2} = \sigma_0^2.$$

Ainsi, la primitive \mathfrak{X} est celle dont l'écart type est le plus petit possible. Tous les coefficients de corrélation sont au dessus de la courbe de Gauss (e^{-h^2}) et se rapprochent autant qu'on le désire — sans toutefois jamais l'atteindre — de la droite d'ordonnée $+1$.

Voyons maintenant le cas b).

Lorsque $\Sigma(h)$ est périodique, il atteint périodiquement la valeur zéro. Les $R(h)$ et $r(h)$ sont aussi périodiques et atteignent périodiquement la valeur $+1$. Parmi les $R(h)$, il y en a un qui prend périodiquement la valeur -1 : c'est lui qui correspond à la primitive d'écart type minima.

Les choses ne sont guère changées si $\Sigma(h)$ est presque périodique. La primitive d'écart type minima est celle dont le coefficient de corrélation, presque périodique, se rapproche presque périodiquement, autant qu'on le désire, de la valeur -1 .

Exemple simple :

Soit $r(h) = \cos \omega_0 h$, le coefficient de corrélation de la fonction aléatoire stationnaire U , d'écart type $S=1$.

Les coefficients de corrélation des primitives sont :

$$\bar{R}(h) = 1 - \frac{1}{\sigma^2 \omega_0^2} + \frac{1}{\sigma^2 \omega_0^2} \cos \omega_0 h$$

Celle d'écart type minimum correspond à $\left(\sigma_0^2 = \frac{1}{\omega_0^2}\right)$:

$$\mathfrak{R}(h) = \cos \omega_0 h,$$

qui atteint périodiquement la valeur -1 .

11. On peut étudier la question des primitives stationnaires en supposant (ce qui diminue un peu la généralité), que la fonction U possède un coefficient de corrélation de la forme de Khintchine :

$$r(h) = \int_0^{\infty} \cos \omega h d\mathcal{F}(\omega),$$

$\mathcal{F}(\omega)$ étant une fonction de répartition.

On sait qu'un coefficient de corrélation de cette forme satisfait ipso-facto aux conditions de cohérence.

Mais alors que dans le problème de la dérivation, la dérivée est toujours cohérente, dans celui de l'intégration, la primitive ne l'est pas nécessairement, car son coefficient de corrélation :

$$R(h) = 1 - \frac{S^2}{\sigma^2} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \omega h}{\omega^2} d\mathcal{F}(\omega)$$

ne se présente pas sous la forme de Khintchine.

Il y a pourtant un $R(h)$ qui est de cette forme ; c'est :

$$\mathfrak{R}(h) = \frac{S^2}{\sigma_0^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega h}{\omega^2} d\mathcal{F}(\omega) = \int_0^{\infty} \cos \omega h d\Phi(\omega)$$

pour lequel :

$$d\Phi(\omega) = \frac{S^2}{\sigma^2} \frac{d\mathcal{F}(\omega)}{\omega^2} \quad \text{et} \quad \sigma_0^2 = S^2 \left(\frac{1}{\omega^2} \right)$$

$\Re(h)$ existe si $\left(\frac{1}{\omega^2} \right)$ est fini, et satisfait dès lors automatiquement aux conditions de cohérence.

Il en est de même pour toutes les primitives d'écart type *supérieur* à σ_0 , mais il est possible qu'il existe des primitives cohérentes d'écart type *inférieur* à σ_0 .

Développons $R(h)$ en série :

$$R(h) = 1 - \frac{S^2}{\sigma^2} \frac{h^2}{2} + \frac{S^2}{\sigma^2} \frac{h^4}{\omega^2 4!} + \dots + (-1)^n \frac{S^2}{\sigma^2} \frac{h^{2n}}{\omega^{2n-2} (2n)!} + \dots$$

Cette série est convergente, car $R(h)$ est une fonction linéaire de $\Re(h)$ que l'on a supposé exister pour toute valeur de h .

$R(h)$ sera «un r », si les inégalités suivantes sont vérifiées (voir 1^{ère} Partie, § 13, pag. 116) :

$$\frac{S^4}{\sigma^4} \frac{1}{\omega^{2n^2}} \leq \left(\frac{S^2}{\sigma^2} \frac{1}{\omega^{2n-2}} \right) \left(\frac{S^2}{\sigma^2} \frac{1}{\omega^{2n+2}} \right).$$

Or, ces inégalités se ramènent à celles vérifiées par les moments de ω :

$$\frac{1}{\omega^{2n^2}} \leq \frac{1}{\omega^{2n-2}} \frac{1}{\omega^{2n+2}},$$

sauf la première ($n=1$) qui est :

$$\frac{S^4}{\sigma^4} \leq \frac{S^2}{\sigma^2} \frac{1}{\omega^2}$$

et donne :

$$\sigma^2 \geq \frac{S^2}{\omega^2}.$$

L'égalité ne saurait d'ailleurs être atteinte, en général, car cela implique que ω cesse d'être aléatoire et que, par conséquent :

$$r(h) = \cos \omega_0 h.$$

Comme tout à l'heure, on trouve donc que σ est borné inférieurement.

ANNEXE III

Fonctions aléatoires presque périodiques

Nous avons signalé dans la 1^{ère} Partie, au sujet des conditions de cohérence, une propriété remarquable du coefficient de corrélation d'une fonction aléatoire stationnaire :

«Si ce coefficient de corrélation atteint l'une ou l'autre des valeurs $+1$, -1 (pour $h \neq 0$), il est nécessairement une fonction périodique».

Son expression est alors donnée par la série de Fourier :

$$r(h) = \sum_0^{\infty} a_n \cos n\omega h$$

avec $\sum_0^{\infty} a_n = 1$.

Nous avons nommé les fonctions aléatoires correspondantes : *fonctions aléatoires périodiques*.

On peut, en s'aidant de la théorie des fonctions presque-périodiques, généraliser cette propriété de la manière suivante :

«Si, à tout nombre positif ε , aussi petit que l'on veut, on peut faire correspondre une longueur $l(\varepsilon) > 0$, telle que tout intervalle de longueur l contienne au moins un nombre τ pour lequel on ait :

$$\text{soit } r(\tau) < 1 - \varepsilon, \quad \text{soit } r(\tau) > -1 + \varepsilon,$$

le coefficient de corrélation est une fonction presque périodique dont la presque période est, soit τ , soit 2τ .

Ce théorème se démontre aisément ; en faisant $h = \tau$ dans la seconde condition de cohérence :

$$1 - r^2(h) - r^2(k) - r^2(h+k) + 2r(h)r(k)r(h+k) \geq 0,$$

on voit que,

$$\text{soit } [r(k+\tau) - r(k)]^2, \quad \text{soit } [r(k+\tau) + r(k)]^2$$

peuvent être rendus aussi petits qu'on le désire.

Les fonctions aléatoires correspondantes peuvent être appelées *fonctions aléatoires presque périodiques*.

Si l'on se reporte à la forme de Khintchine :

$$r(h) = \int_0^{\infty} \cos \omega h d\mathcal{F}(\omega),$$

on voit que les fonctions aléatoires stationnaires presque périodiques correspondent au cas où $\mathcal{F}(\omega)$ est une fonction discontinue en escalier, puisque le développement d'un « r » presque périodique est :

$$r(h) = \sum_0^{\infty} a_n \cos \lambda_n \omega h,$$

λ_n étant un nombre réel dépendant de l'indice entier n .

Si une fonction aléatoire stationnaire n'est ni périodique, ni presque-périodique, c'est que son spectre contient des bandes.

2^{ÈME} PARTIE — APPLICATIONS PHYSIQUES

VI — MÉCANIQUE DU CORPUSCULE ALÉATOIRE

1. Mécanique aléatoire et Mécanique classique. La Mécanique classique repose essentiellement sur le concept de *point matériel* ou *corpuscule*, qui est un corps doué d'une masse (que nous pouvons supposer égale à l'unité) concentrée en un *point géométrique*.

A ce corpuscule ponctuel, nous voulons pour fonder la Mécanique Aléatoire substituer le *corpuscule aléatoire*, dont voici la définition :

C'est l'ensemble de trois coordonnées X, Y, Z qui sont des *fonctions aléatoires* du temps, *dérivables* au moins *deux fois* en moyenne quadratique.

Il est évident que l'on peut fonder une «*Mécanique Statistique*» encore plus générale en rejetant cette hypothèse de dérivabilité, mais il est bon de ne généraliser que par étapes.

Le corpuscule aléatoire n'est plus un point matériel : il remplit l'espace avec une certaine densité de probabilité de présence.

De là vont résulter dès le début des divergences avec la Mécanique classique, que nous allons indiquer.

Une Mécanique est fondée sur un Principe de Variations ; la Mécanique aléatoire repose sur le principe que l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t_1} \overline{L(X, \dot{X}, t)} dt$$

est extrême, L étant la fonction de *Lagrange*.

Cela conduit, comme nous l'avons vu, aux équations de Lagrange aléatoires :

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right)' - \frac{\partial L}{\partial X} = 0$$

qui s'écrivent dans le cas le plus simple :

$$\ddot{X} = - \frac{\partial V}{\partial X}$$

$V(X)$, étant le potentiel de la force extérieure.

Le mécanicien qui se borne à l'étude du mouvement du point probable \bar{X} , tirera de cette équation l'équation moyenne suivante :

$$\ddot{\bar{X}} = - \frac{\partial V}{\partial X}$$

Plaçons nous maintenant au point de vue de la Mécanique certaine. Celle-ci ignore que le corpuscule est distribué dans l'espace et l'imagine concentré au point probable :

$$x_0 = \bar{X}$$

Elle fait dériver ses lois de l'extréma de l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t_1} L(x_0, x'_0, t) dt$$

et obtient, dans le cas simple où nous sommes placés :

$$x''_0 = \ddot{\bar{X}} = - \frac{\partial V}{\partial x_0}$$

Cela revient à dire qu'elle néglige la force :

$$F = - \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial X} - \frac{\partial V}{\partial x_0} \right)$$

qui est fonction de la *distribution en densité* du corpuscule aléatoire ; elle s'écrit en effet explicitement :

$$F = - \int \rho(x, t) \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x_0} \right) dx$$

Pour rendre cette expression encore plus significative, supposons que la composante purement aléatoire de X : $X' = X - \bar{X}$ soit faible devant \bar{X} , de manière qu'on puisse développer $V(X)$ en série de Taylor :

$$V(X) = V(x_0 + X') = V(x_0) + X' \frac{\partial V}{\partial x_0} + \frac{X'^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_0^2} + \dots$$

On obtient alors :

$$F = - \frac{\bar{X}^2}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial x_0^3}$$

Ainsi, la Mécanique certaine ignore-t-elle une force qui dépend de \bar{X}^2 , c'est à dire de la *diffusion* du corpuscule. Si, à un instant donné,

le corpuscule aléatoire se «ponctualise», il y a entre les deux mécaniques une coïncidence mais qui ne dure pas, car le corpuscule aléatoire *diffuse*. Ce n'est que dans le cas où V est une fonction du second degré au plus, de x (oscillateur aléatoire, corpuscule aléatoire libre) que la Mécanique certaine est valable pour l'étude du mouvement probable.

2. Fonctions de distribution relatives au corpuscule aléatoire. Nous allons définir les diverses fonctions de distribution qui servent à exprimer la corrélation entre la position $O(X, Y, Z)$, la vitesse $\omega(U=\dot{X}, V=\dot{Y}, W=\dot{Z})$, et l'accélération $j(A=\ddot{U}, B=\ddot{V}, C=\ddot{W})$ du corpuscule aléatoire.

Nous désignerons par :

$R_1(x, y, z, u, v, w, \alpha, \beta, \gamma; t)$ la fonction de distribution conjuguée de la position et de la vitesse,

$\rho(x, y, z; t)$, la fonction de distribution de la position.

Nous utiliserons aussi des *probabilités liées* et désignerons par :

$f(u, v, w; x, y, z, t)$ la fonction de distribution *liée* de la vitesse pour une position donnée,

$f_1(\alpha, \beta, \gamma; u, v, w, x, y, z, t)$ la fonction de distribution *liée* de l'accélération pour une position et une vitesse donnée.

Soit Ψ une fonction certaine de la position O , de la vitesse ω , de l'accélération j et du temps. Sa moyenne exprimée par l'intégrale :

$$\bar{\Psi}(t) = \int \Psi R_1 d\alpha d\omega dj$$

est une fonction du temps seulement.

Sa moyenne *doublement liée* pour une position et une vitesse données est :

$$\bar{\Psi}(O, \omega, t) = \frac{1}{R} \int \Psi R_1 dj = \int \Psi f_1 dj$$

C'est une fonction de x, y, z, u, v, w, t .

Si Ψ ne dépend pas de l'accélération, sa moyenne *liée* pour une position donnée est :

$$\bar{\Psi}(O, t) = \frac{1}{\rho} \int \Psi R d\omega = \int \Psi f d\omega$$

Si Ψ dépend de l'accélération, on définit encore sa moyenne *liée* pour une position donnée (abstraction faite de la vitesse), en formant

d'abord la moyenne *doublement liée* pour une position et une vitesse données :

$$\overline{\Psi}(0, \omega, t) = \frac{1}{R} \int \Psi R_1 dj$$

puis la moyenne de $\overline{\Psi}$ pour une position donnée :

$$\overline{\Psi}(0, t) = \frac{1}{\rho} \int \overline{\Psi} R d\omega = \frac{1}{\rho} \int \Psi R_1 d\omega dj.$$

3. Relations vérifiées par les fonctions de distribution. Ces relations forment deux groupes :

a) *Relations générales* exprimant les deux théorèmes fondamentaux du Calcul des Probabilités :

$$\left. \begin{array}{l} \int R_1 d\omega dj = 1 \\ \int R d\omega = 1 \\ \int \rho d\omega = 1 \\ R = \int R_1 dj \\ \rho = \int R d\omega = \int R_1 d\omega dj \end{array} \right\} \text{vérifiées quel que soit } t$$

$$\int f_1 dj = 1 \quad \text{quels que soient } x, y, z, u, v, w, t$$

$$\int f d\omega = 1 \quad \text{quels que soient } x, y, z, t$$

$$R_1 = R f_1, \quad R = \rho f.$$

b) *Relations particulières*, exprimant que la vitesse est la dérivée aléatoire de la position et l'accélération, la dérivée aléatoire de la vitesse.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \frac{\partial}{\partial x} (\rho \overline{U}) = 0 \quad \text{avec} \quad \overline{U} = \frac{1}{\rho} \int R u d\omega$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \sum u \frac{\partial R}{\partial x} + \sum \frac{\partial}{\partial u} (R \overline{A}) = 0 \quad \text{avec} \quad \overline{A} = \frac{1}{R} \int R_1 \alpha dj.$$

La signification mathématique de ces relations est — par exemple pour la dernière — que R est un multiplicateur du système différentiel :

$$dt = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \frac{du}{\overline{A}} = \frac{dv}{\overline{B}} = \frac{dw}{\overline{C}}.$$

4. L'équivalent hydrodynamique du corpuscule aléatoire. L'équation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{U}) = 0$$

est l'équation de continuité d'un fluide de densité ρ dont la vitesse, dans le système de variables d'Euler, serait \bar{U} , \bar{V} , \bar{W} . Nous allons montrer que l'on peut donner de ce fluide une définition complète, mécanique et thermodynamique.

Nous avons établi plus haut l'équation fondamentale de transfert :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{\Psi}) + \sum \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{\Psi} \bar{U}) = \rho \bar{\Psi}$$

Si Ψ est une fonction de x, y, z, u, v, w seulement, on a :

$$\bar{\Psi} = \overline{\left(U \frac{\partial \Psi}{\partial X} + \sum \bar{A} \frac{\partial \Psi}{\partial U} \right)} = \frac{d\bar{\Psi}}{dt}$$

Pour $\Psi=1$, l'équation de transfert nous donne l'équation de continuité.

Introduisons des variables purement aléatoires, c'est à dire dont les moyennes liées en un point sont nulles.

$$\begin{aligned} U' &= U - \bar{U} \\ \Psi' &= \Psi - \bar{\Psi} \end{aligned}$$

Une transformation de calcul simple permet d'écrire l'équation de transfert sous l'une ou l'autre des deux formes :

$$\frac{d\bar{\Psi}}{dt} + \frac{1}{\rho} \sum \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{\Psi}' \bar{U}') = \frac{d\bar{\Psi}}{dt}$$

$$\frac{d\bar{\Psi}'}{dt} = \frac{1}{\rho} \sum \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{\Psi}' \bar{U}')$$

$\frac{d\bar{\Psi}}{dt}$ est l'opérateur :

$$\frac{\partial}{\partial t} + \sum \bar{U} \frac{\partial}{\partial x}$$

Faisons $\Psi=U, V, W$; $\frac{d\bar{\Psi}}{dt}$ devient $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ et l'on obtient les équations du mouvement d'un *fluide turbulent* :

$$\frac{d\overline{U}}{dt} = \overline{A} - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho \overline{U'^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \overline{U' V'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \overline{U' W'}) \right]$$

et deux analogues.

Les quantités $-\rho \overline{U'^2} = N_1, \dots, -\rho \overline{V' W'} = T_1$ forment un tenseur symétrique (qui est, au facteur $-\rho$ près le *tenseur de corrélation* de la vitesse aléatoire du corpuscule en un point.

Ainsi, le corpuscule aléatoire est-il équivalent à un fluide dont nous venons d'écrire les équations (continuité, mouvement). Nous verrons dans un instant que l'on obtient aussi pour ce fluide une équation thermodynamique.

VII — THERMODYNAMIQUE DU CORPUSCULE ALÉATOIRE

5. L'équation thermodynamique du Corpuscule. Alors que le point matériel « certain » est uniquement doué de *propriétés mécaniques*, le corpuscule aléatoire s'enrichit, grâce à son énergie d'agitation (énergie interne) de *propriétés thermodynamiques* que nous allons examiner.

Rappelons d'abord les deux principes de la Thermodynamique classique :

Le premier Principe consiste, en quelque sorte, en la définition de la *quantité de chaleur* (Duhem).

Lorsque les agents extérieurs fournissent à un système thermodynamique un travail, l'équivalent de ce travail ne se retrouve pas tout entier dans l'augmentation de l'énergie interne du système. La différence est la *quantité de chaleur absorbée* par le système ($Q\delta$).

L'énergie d'un corpuscule aléatoire est :

$$\varepsilon = \int RE \, do \, d\omega,$$

l'énergie (aléatoire) d'un élément constituant étant supposée être une fonction des coordonnées et des vitesses.

Or l'on a :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \overline{E}}{\partial E} = \frac{d\overline{E}}{dt} + \int E \frac{d}{dt} (R \, do \, d\omega)$$

La quantité de chaleur dégagée est la différence :

$$Q\delta = \frac{d\overline{E}}{dt} - \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}.$$

Pour un corpuscule aléatoire, elle est nulle, en raison de la conservation de la probabilité :

$$\frac{d}{dt} (R d\omega) = 0,$$

ou encore, si l'on veut, en raison de la règle de dérivation sous le signe «trait», qui caractérise la dérivabilité aléatoire.

Le corpuscule aléatoire est donc nécessairement un système *thermiquement isolé* et à ce titre il semble ne fournir qu'une représentation assez particulière d'un système thermodynamique.

Mais ce manque de généralité disparaît si, au lieu de considérer le corpuscule dans son ensemble, on en extrait une partie (ou particule). Cette particule, du fait qu'elle est incluse dans un «champ» va posséder toutes les propriétés thermodynamiques requises.

Faisons, dans l'équation de transfert :

$$\Psi = E = \frac{1}{2} c^2$$

On obtient :

$$\frac{1}{\rho} \mathcal{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \rho \overline{U^2 C^2} \right) = \frac{d\overline{E}}{dt} - \frac{d\mathcal{O}\overline{E}}{dt}$$

Pour les moyennes liées en un point, il cesse d'y avoir commutativité entre les signes de dérivation et les signes de moyennes, de sorte qu'il existe cette fois une quantité de chaleur dont l'expression est le terme du 1er membre. Sa signification est d'ailleurs évidente, comme on le voit en intégrant ce terme pour un volume fini et en transformant l'intégrale de volume en l'intégrale de surface :

$$\int_{\Sigma} \left[\mathcal{S} \frac{1}{2} \rho \overline{U^2 C^2} \cos(n, x) \right] d\Sigma$$

La quantité de chaleur dégagée est donc le flux d'énergie d'agitation qui traverse la surface Σ entourant la particule fluide, de l'intérieur vers l'extérieur.

Le premier Principe se trouve ainsi établi comme une évidence, en appelant chaleur l'énergie d'agitation du corpuscule.

Le second Principe s'exprime par l'équation de Carnot-Clausius :

$$\partial S + \int \frac{Q^{\partial}}{k} = \mathcal{C}_{nc}$$

S est l'entropie du système, Q^{∂} la chaleur dégagée en un point où le

module d'énergie (température absolue) est k , \mathcal{T}_{nc} est la *transformation non compensée*.

Le second Principe consiste dans l'affirmation que \mathcal{T}_{nc} n'est jamais négatif.

Or, nous obtenons une équation analogue à celle de Carnot-Clausius en faisant, dans l'équation de transfert :

$$\Psi = -\log(\rho f_0)$$

f_0 , désignant la fonction de distribution de Maxwell :

$$(2\pi k)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{c'^2}{2k}}$$

c'est :

$$\frac{d_0 s}{dt} + \frac{1}{\rho} \sum \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \rho \frac{\overline{U' C'^2}}{k} = - \overline{\frac{d}{dt} \log(\rho f_0)}$$

où $s = -\overline{\log(\rho f_0)} = \log(k^{3/2} \rho^{-1}) + c'^2$ est l'entropie du fluide en un point, telle que la définit la thermodynamique.

Intégrons cette équation pour un volume O , limité par une surface Σ . Elle devient, en posant :

$$S = \int_0 \rho s \, do$$

(conformément à la conception thermodynamique, l'entropie d'une masse fluide est la somme des entropies de ses parties); et en transformant l'intégrale de volume en une intégrale de surface :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \int_{\Sigma} \frac{1}{k} \left[\sum \frac{1}{2} \rho \overline{U' C'^2} \cos(n, x) \right] d\sigma = - \int_{\Sigma} \rho \overline{\frac{d}{dt} \log(\rho f_0)} \, do.$$

Le crochet représente le flux d'énergie d'agitation vers l'extérieur (chaleur dégagée de la Thermodynamique), en un point où le module (température absolue de la Thermodynamique) a la valeur k .

Notre terme s'identifie donc au terme :

$$\int \frac{Q \delta}{k}$$

de la Thermodynamique : somme des «valeurs de transformation», autrement dit quotients des quantités de chaleur dégagée par leur température.

Notre terme du 2^o membre représente la *transformation non compensée*. Mais, en ce qui nous concerne, rien ne nous permet d'affirmer qu'elle est positive (ou nulle), comme le voudrait le second principe.

$-\overline{\frac{d}{dt} \log(\rho f_0)}$ s'écrit explicitement :

$$\frac{1}{k\rho} \left[n_1 \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \dots + T_1 \left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \right) + \dots \right] - \frac{1}{2k^2} \sum \overline{U' C'^2} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{k} \sum \overline{\Lambda' U'}$$

en posant :

$$n_1 = \rho (k - \overline{U'^2})$$

$$T_1 = \rho \overline{V' W'}$$

On reconnaît (au facteur $\frac{1}{k}$ près) dans le 1er terme, la *fonction dissipative mécanique* Φ_m de l'hydrodynamique des fluides visqueux, et dans le 2ème terme, la *fonction dissipative thermique* Φ_k de la théorie de la conductibilité.

On voit qu'un 3ème terme s'ajoute à ces fonctions dissipatives : il tient à la corrélation entre la vitesse et l'accélération du corpuscule. Nous verrons plus tard, avec précision, qu'il représente la variation de l'énergie d'agitation d'une particule, primitivement concentrée en un point, non pas quand on la suit dans le mouvement d'ensemble, mais quand on suit tous ses éléments dans leur diffusion. Donc, s'il n'y a pas une source d'énergie extérieure (comme du rayonnement par exemple), s'échangeant avec l'énergie d'agitation, le terme considéré est nul.

6. Variation de l'extension en phase. La variation de l'extension en phase, jouant un grand rôle dans toutes les questions de thermodynamique statistique, nous allons examiner comment elle se présente dans le schéma de la dérivabilité en moyenne quadratique.

La double dérivabilité des coordonnées du corpuscule aléatoire, entraîne la relation :

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \sum u \frac{\partial R}{\partial x} + \sum \frac{\partial}{\partial u} (R \overline{\Lambda}) = 0$$

qu'on peut écrire en abrégé :

$$\frac{d \log R}{dt} + \sum \frac{\partial \overline{\Lambda}}{\partial u} = 0$$

$\frac{d}{dt}$ étant l'opérateur qui suit dans son mouvement (vitesse u , accélération $\overline{\Lambda}$), une cellule ($do d\omega$) de l'espace généralisé des positions et des vitesses.

La dilatation cubique de cette cellule est :

$$\Delta = \frac{d}{dt} \log (do d\omega) = \int \frac{\partial \bar{A}}{\partial u}.$$

Notre équation aux dérivées partielles s'écrit donc :

$$\frac{d \log R}{dt} + \Delta = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt} (R do d\omega) = 0.$$

Elle exprime tout simplement la *conservation de la probabilité*. Lorsque l'extension en phase se conserve, elle se réduit à $\frac{dR}{dt} = 0$. En ce cas, la moyenne $\overline{\varphi(R)}$ d'une fonction quelconque de R est indépendante du temps, car :

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\varphi(R)} = \overline{\varphi'(R) \frac{dR}{dt}} = 0.$$

Ce fait est une conséquence directe de la dérivabilité aléatoire.

L'expression de la dilatation cubique d'une cellule :

$$\Delta = \int \frac{\partial \bar{A}}{\partial u}$$

montre -- bien que ce ne soit pas nécessaire -- que $\Delta = 0$ quand $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ ne dépendent pas de u, v, w .

Alors : $\overline{\dot{A}} = \overline{\dot{A}}$ et $\overline{\dot{A}U} = \overline{\dot{A}U} = \overline{\dot{A}} \overline{U}$ donc $\overline{\dot{A}'U'} = 0$: l'accélération et la vitesse ne sont pas corrélées. Remarquons qu'en ce cas, le 3^e terme de l'équation d'énergie est nul.

7. Probabilité de configuration. La fonction de distribution conjuguée de la position et de la vitesse

$$R(x, y, z, u, v, w; t)$$

est considérée, en théorie cinétique, comme la probabilité de présence du point représentatif d'un état du corpuscule dans l'espace généralisé à six dimensions : position — vitesse. Remarquons que ceci suppose implicitement que l'état du corpuscule est, à un instant donné, parfaitement représenté par les six variables aléatoires (X, Y, Z, U, V, W). Pour que cette conception soit valable, il faut donc nécessairement supposer que \ddot{X} est une fonction certaine de (X, Y, Z, U, V, W), ce qui est le cas d'une «Mécanique aléatoire de Lagrange» qui admet

que le corpuscule obéit à un Principe de Variation :

$$\delta \int \overline{L(X, \dot{X}, t)} dt = 0$$

Dans cette Mécanique aléatoire, qui n'est pas la plus générale, on a nécessairement :

$$\ddot{X} = A = \overline{A}$$

Il n'y a pas de diffusion dans l'espace des vitesses.

Le fait qu'il existe une certaine configuration du corpuscule aléatoire, définie par la fonction R , est susceptible d'une probabilité que nous appelons « probabilité de configuration ». Attribuant des probabilités a priori égales à des éléments égaux de l'extension en phase, un calcul de combinaisons classique donne, dans la statistique de Boltzmann, l'expression suivante pour le logarithme de la probabilité de configuration :

$$\mathcal{H} = - \int R \log R do d\omega$$

Or, dans la « Mécanique aléatoire de Lagrange », on trouve :

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} = - \overline{\frac{d}{dt} \log R} = \overline{\Delta}$$

Donc, lorsque l'extension en phase se conserve (Mécanique Hamiltonienne), \mathcal{H} ne peut varier.

Si l'on renonce à représenter l'état du corpuscule par six variables seulement et que l'on ajoute à sa définition des dérivées d'ordre supérieur, il est visible que l'on retombera toujours sur la même conclusion :

$$\delta \mathcal{H} = 0 \quad \text{si} \quad \Delta = 0$$

Ainsi, il est impossible pour un corpuscule aléatoire d'avoir un « théorème \mathcal{H} » ($\delta \mathcal{H} \geq 0$) ni même d'obtenir une variation de \mathcal{H} d'un signe quelconque. Ce n'est pas à dire cependant que le schéma du corpuscule aléatoire ne puisse fournir une interprétation de la Thermodynamique.

Nous allons maintenant approfondir la question de la probabilité d'une configuration et de ses rapports avec l'entropie.

8. Le théorème \mathcal{H} dans une Mécanique statistique générale. Débarassons-nous de toute hypothèse et posons que l'état d'un corpuscule « statistique » est défini par un certain nombre de variables aléatoires, que nous désignerons uniformément par X , sans préjuger qu'il puisse y avoir entre elles des relations de fonction à dérivée.

Nous appuyant seulement sur les deux théorèmes fondamentaux du Calcul des probabilités, nous allons chercher la variation de la grandeur :

$$\mathcal{H} = - \int R \log R dx$$

R , étant fonction de toutes les variables x , nécessaires pour définir l'état du gaz.

\mathcal{H} représentera, dans la statistique de Boltzmann le logarithme de la probabilité de configuration, si l'on admet l'égale probabilité a priori de tous les éléments de l'extension en phase. Il ne peut plus être question ici de justifier cette hypothèse par la conservation de l'extension en phase, car nous ne savons pas si les X sont dérivables.

Nous désignons par G_{12} la fonction de distribution conjuguée :

$$(x_1, x_2 ; t_1, t_2)$$

de deux positions successives dans l'extension en phase.

G_{21} sera l'une ou l'autre des fonctions :

$$(x_2, x_1 ; t_1, t_2) \quad \text{ou} \quad (x_1, x_2 ; t_2, t_1),$$

identiques en vertu de propriétés de symétrie de G . D'après le théorème des probabilités totales :

$$(x_1, t_1) = R_1(t_1) = \int G_{12} dx_2$$

(G_{12} doit être tel que le paramètre t_2 qu'il contient disparaisse dans l'intégration en même temps que x_2).

De même :

$$(x_1, t_2) = R_1(t_2) = \int G_{21} dx_2$$

d'où :

$$\vartheta [R_1(t_2)] = R_1(t_2) - R_1(t_1) = \int (G_{21} - G_{12}) dx_2.$$

Prêtant à R la propriété de *continuité* relativement à t et choisissant $(t_2 - t_1)$ petit, la variation de \mathcal{H} a pour partie principale :

$$\vartheta \mathcal{H} = - \int [\log R_1(t_1)] \vartheta [R_1(t_1)] dx_1$$

d'où :

$$\vartheta \mathcal{H} = - \int [\log R_1(t_1)] (G_{21} - G_{12}) dx_1 dx_2.$$

On peut en avoir une autre expression en permutant x_1 et x_2 :

$$\vartheta \mathcal{H} = - \int [\log R_2(t_1)] (G_{12} - G_{21}) dx_1 dx_2$$

d'où par addition, l'expression symétrique :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int [\log R_2(t_1) - \log R_1(t_1)] (G_{21} - G_{12}) dx_1 dx_2.$$

Enfin, appliquant le théorème des probabilités composées, on a :

$$\begin{aligned} G_{12} &= R_1(t_1) P_{12} \\ G_{21} &= R_2(t_1) P_{21} \end{aligned}$$

P_{12} et P_{21} sont les *probabilités de passage* dans l'intervalle de temps (t_1, t_2) respectivement de 1 en 2 et de 2 en 1.

Donc :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int (\log R_2 - \log R_1) (R_2 P_{21} - R_1 P_{12}) dx_1 dx_2.$$

Et c'est tout ce que l'application *correcte* des deux théorèmes fondamentaux du Calcul des Probabilités nous permet d'écrire. Il y a, certes, une variation possible de \mathcal{H} mais son *signe n'est pas déterminé*. Ce que nous pouvons dire de général, c'est que $\delta \mathcal{H}$ est positif lorsque l'on a simultanément :

$$R_2 > R_1 \quad \text{et} \quad G_{21} > G_{12}$$

c'est à dire lorsque le *fluide de probabilité s'écoule des régions de forte densité vers les régions de faible densité en phase*.

Le théorème \mathcal{H} ne saurait donc être une vérité statistique générale et s'il a pu être établi en Mécanique Statistique et en Mécanique quantique c'est que l'on a ajouté aux notions statistiques une hypothèse physique *qui leur est entièrement étrangère*. Ainsi la démonstration quantique admet un « principe de microréversibilité » — pas plus évident que le principe de Carnot lui-même — selon lequel :

$$P_{21} = P_{12},$$

d'où il suit que l'intégrale \mathcal{H} est à éléments positifs.

Nous ne pouvons ici développer ces considérations qui sortiraient du cadre de ce mémoire.

9. Comment concevoir une thermodynamique statistique générale. Le schéma du corpuscule deux fois dérivable en moyenne quadratique, bien qu'il ne permette pas sans autre hypothèse de conclure sur le signe de la transformation non compensée, renferme toutes les possibilités d'une représentation correcte des propriétés thermodynamiques

d'un système. Mais l'on a vu que les rapports entre la probabilité et l'entropie ne sont pas les mêmes que dans les conceptions classiques.

L'entropie n'est pas :

$$\mathcal{H} = - \int R \log R dx$$

mais :

$$S = - \int R_0 \log R_0 dx = - \int R \log R_0 dx$$

R_0 , étant la loi de Maxwell.

Les deux notions ne coïncident que pour un système dans l'état de Maxwell.

Renonçant à toute idée préconçue sur les rapports de l'entropie et de la probabilité, nous allons examiner maintenant comment on doit — sous la forme la plus générale — concevoir l'interprétation statistique de la Thermodynamique.

Il nous faut d'abord trouver l'interprétation du premier Principe, c'est-à-dire définir la *quantité de chaleur*.

L'énergie moyenne du corpuscule aléatoire est :

$$\varepsilon = \int RE dx$$

Sa variation $\delta\varepsilon$ qui est le travail fourni au corpuscule, se compose de deux termes :

a) $\overline{\mathcal{D}(E)} = \int R\mathcal{D}(E) dx$, qui est l'augmentation de l'énergie interne du corpuscule.

b) $\int E\mathcal{D}(R) dx = \int E\mathcal{D}(R) dx + \int RE \Delta dx$ (Δ étant la dilatation cubique) — et qui est par conséquent la *chaleur fournie* au corpuscule.

La quantité de chaleur dégagée est par suite :

$$Q\delta = - \int E[\mathcal{D}(R) + R\Delta] dx$$

Et si l'on admet la conservation de l'extension en phase ($\Delta=0$) :

$$Q\delta = - \int E\mathcal{D}(R) dx$$

10. Etat stationnaire et état de maximum de probabilité. Soit

$$\mathcal{H} = \int \varphi(R) dx$$

l'expression de la probabilité de la configuration représentée par la fonction de distribution R , résultant d'une *statistique quelconque*.

Cherchons la fonction φ qui réalise le maximum de probabilité, compte tenu des conditions adjointes classiques :

$$\int R dx = 1$$

$$\int RE dx = \varepsilon$$

On trouve, $\frac{1}{k}$ et λ étant des multiplicateurs de Lagrange :

$$\varphi'(R) = \frac{E}{k} + \lambda$$

Lorsque la fonction R satisfait à cette équation (et nous en désignerons la solution par R_0), le corpuscule est dans un état de maximum de probabilité.

Il convient de noter la différence entre un tel état et un état *stationnaire*.

Dans un état stationnaire, on a :

$$G_{12} = G_{21};$$

le corpuscule est en *équilibre statistique*. Aucun de ses paramètres macroscopiques ne varie. Mais, un état de maximum de probabilité peut être en train d'évoluer, grâce à des actions extérieures, vers un autre état de maximum de probabilité : *c'est la suite des états réversibles* de la Thermodynamique. L'état de maximum de probabilité a la même fonction de distribution qu'un état stationnaire, mais il diffère de celui-ci par les fonctions en deux points ; l'on a :

$$G_{21} - G_{12} \neq 0$$

Le corpuscule n'est pas en équilibre statistique.

11. L'entropie. Supposons que le corpuscule parcourre une suite d'états correspondant tous à un maximum de probabilité (états R_0). Dans cette évolution R est constamment égal à R_0 et

$$\frac{Qd}{k} = - \int E \varpi(R_0) dx = - \int \varphi'(R_0) \varpi(R_0) dx$$

représente la variation de la grandeur :

$$\mathcal{H}_0 = - \int \varphi(R_0) dx$$

Donc $\frac{Q\delta}{k}$ est une différentielle exacte et l'entropie de la thermodynamique doit être assimilée à \mathcal{H}_0 .

Cette définition, obtenue par la considération d'une suite d'états réversibles, est conforme à celle de la Thermodynamique. L'entropie, pour un état de maximum de probabilité, coïncide avec le logarithme de la probabilité. Mais cette coïncidence cesse lorsque le système n'est pas dans un état de maximum de probabilité.

Ce que notre raisonnement général ajoute aux résultats classiques, c'est que la définition de l'entropie ne dépend en aucune manière de la statistique adoptée ($\varphi(\mathbf{R})$ arbitraire). En particulier, il lève le reproche adressé par Duhem à W. Gibbs, sur le rôle essentiel joué dans la Mécanique Statistique par la distribution canonique.

12. Le Second Principe. Plaçons nous maintenant en un état, défini par la fonction de distribution \mathbf{R} , qui ne satisfasse pas à la condition de maximum de probabilité.

Il existe toujours une fonction de distribution \mathbf{R}_0 qui satisfait à cette condition, pour la même énergie moyenne ε du corpuscule.

Elle est définie par :

$$\varphi'(\mathbf{R}_0) = \frac{\mathbf{E}}{k} + \lambda$$

et satisfait aux conditions :

$$\int \mathbf{R}_0 dx = 1$$

$$\int \mathbf{R}_0 \mathbf{E} dx = \varepsilon .$$

Nous dirons que l'état défini par \mathbf{R}_0 est l'état de maximum de probabilité *tangent* à l'état dérangé considéré.

Dans cet état «dérangé», la fonction de distribution est :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0(1 + \eta) .$$

a) *point de vue de la thermodynamique classique.*

La Thermodynamique classique continue à définir l'entropie dans cet état par :

$$S = \int \varphi(\mathbf{R}_0) dx = \mathcal{H}_0 .$$

Ce qui caractérise cette conception, c'est que l'entropie est une *fonction d'état*, c'est-à-dire s'exprimant au moyen des deux paramètres macroscopiques k et λ .

Calculons l'écart de cette entropie avec le logarithme de la probabilité :

$$\mathcal{H} = \int \varphi(R) dx$$

Développons $\varphi(R)$ en supposant η petit :

$$\varphi(R) = \varphi(R_0) + R_0 \eta \varphi'(R_0) + \frac{1}{2} R_0^2 \eta^2 \varphi''(R_0) + \dots$$

Je dis d'abord que :

$$\int R_0 \eta \varphi'(R_0) dx = 0$$

En effet, substituant à $\varphi'(R_0)$ son expression $\frac{E}{k} + \lambda$, il vient :

$$\int R_0 \eta \varphi'(R_0) dx = \frac{1}{k} \int R_0 E \eta dx + \lambda \int \eta R_0 dx$$

et chacune de ces intégrales est nulle, en vertu de la définition de l'état tangent, car :

$$\int R dx = \int R_0 dx = 1$$

$$\int R E dx = \int R_0 E dx$$

Il reste donc :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \frac{1}{2} \int R_0^2 \eta^2 \varphi''(R_0) dx + \dots$$

Quand nous avons voulu exprimer que \mathcal{H} était un *maximum* de probabilité, nous avons en réalité écrit seulement qu'il était *stationnaire*. Nous aurons effectivement un *maximum* lorsque :

$$\varphi''(R_0) \quad \text{sera négatif.}$$

C'est bien le cas pour la statistique de Boltzmann, dans laquelle :

$$\varphi = -R \log R \quad \text{d'où :} \quad \varphi'' = -\frac{1}{R}$$

ainsi que pour les nouvelles statistiques, comme on le vérifie aisément.

Un état stationnaire dans le temps, donc stable, ne pouvant correspondre à un minimum de probabilité, toute statistique doit nécessairement satisfaire à la condition :

$$\varphi''(R_0) < 0$$

Cherchons maintenant l'expression de la quantité de chaleur *absorbée* dans l'état dérangé; c'est :

$$\frac{Q' \delta}{k} = \int E \varpi(R) dx = k \int \varphi'(R_0) \varpi(R) dx$$

Il faut bien remarquer ici que :

$$\frac{Q' \delta}{k}$$

n'est plus égal à δS , donc que $\frac{Q' \delta}{k}$ n'est plus une différentielle exacte.

En effet, l'état tangent ne peut admettre une fonction G_{12}^0 égale à G_{12} sans quoi :

$$R_1 = \int G_{12} dx_2$$

serait égale à :

$$R_1^0 = \int G_{12}^0 dx_2$$

Par conséquent, $\frac{\delta S}{\delta t}$ qui s'exprime au moyen des fonctions G par :

$$\frac{\delta S}{\delta t} = \frac{1}{2} \int [\varphi'_1(R_0) - \varphi'_2(R_0)] (G_{21}^0 - G_{12}^0) dx_1 dx_2$$

est différent de $\frac{Q' \delta}{k \delta t}$ qui est :

$$\frac{Q' \delta}{k \delta t} = \frac{1}{2} \int [\varphi'_1(R_0) - \varphi'_2(R_0)] (G_{21} - G_{12}) dx_1 dx_2$$

Calculons maintenant :

$$\frac{\delta S}{\delta t} - \frac{Q' \delta}{k \delta t}$$

c'est :

$$\mathcal{C}_{nc} = \int \varphi'(R_0) [\varpi(R_0) - \varpi(R)] dx$$

que l'on peut mettre aussi, en s'aidant de l'identité :

$$\int R \varphi'(R_0) dx = \int R_0 \varphi'(R_0) dx$$

qui exprime que l'état dérangé et l'état tangent ont même énergie moyenne \mathcal{E} , sous la forme :

$$\mathcal{C}_{nc} = - \int (R_0 - R) \varphi''(R_0) \varpi(R_0) dx = \int R_0 \eta \varphi''(R_0) \varpi(R_0) dx.$$

En particulier, si l'on adopte l'expression classique de Boltzmann pour le logarithme de la probabilité :

$$\mathcal{H} = - \int R \log R \, dx$$

soit $\varphi''(R) = -\frac{1}{R}$, on obtient :

$$\mathcal{T}_{nc} = - \int R \varnothing (\log R_0) \, dx = - \overline{\varnothing (\log R_0)} = \int \eta \varnothing (R_0) \, dx$$

Le second Principe affirme que \mathcal{T}_{nc} n'est jamais négative. Nous ne pouvons, avec les seules ressources de la statistique nous prononcer sur le signe de \mathcal{T}_{nc} , donc démontrer le Second Principe.

b) *Point de vue du corpuscule aléatoire.*

L'expression de la transformation non compensée, pour une particule fluide est, nous l'avons vu :

$$-\varrho \, do \, \overline{\frac{d}{dt} \log R_0}$$

en posant : $R_0 = \varrho f_0$.

Rapportée à la masse unité, elle est donc conforme à l'expression qu'en donne le point de vue thermodynamique. Et ceci est une confirmation de la légitimité de l'expression de Boltzmann :

$$\mathcal{H} = - \int R \log R \, dx$$

pour représenter le logarithme de la probabilité.

c) *Point de vue de la Mécanique Statistique.*

Il est nettement différent des deux précédents. La Mécanique Statistique continue, en effet, a définir l'entropie dans un état dérangé par le logarithme de la probabilité (à un facteur positif près) :

$$\mathcal{H} = \int \varphi (R) \, dx$$

En faisant le calcul de

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{Q \partial}{k \partial t}$$

on trouve cette fois :

$$\mathcal{T}'_{nc} = \int [\varphi'(R) - \varphi'(R_0)] \varnothing (R) \, dx,$$

soit dans la statistique de Boltzmann :

$$\mathcal{T}'_{nc} = \int \log (1 + \eta) \varnothing (R) \, dx$$

et, si η est petit :

$$\mathcal{T}'_{nc} = \int \eta \mathcal{D}(\mathbf{R}) dx$$

L'expression est différente de celle de tout à l'heure mais, en tous cas, on ne peut toujours pas se prononcer sur le signe de \mathcal{T}'_{nc} , donc démontrer le second Principe.

La conception de la Mécanique Statistique n'est pas conforme à celle de la thermodynamique : l'entropie n'est plus une *fonction d'état* car \mathbf{R} , dans un état dérangé, dépend d'autres variables que l'énergie et la densité : il dépend des dérivées de celles-ci et des gradients de la vitesse d'ensemble.

13. Critique des rapports de la probabilité et de l'entropie. On a voulu assimiler l'entropie à la probabilité, en se basant sur deux propositions :

a) l'une, est ce principe de la thermodynamique selon lequel l'entropie d'un système thermiquement isolé ($Q\delta=0$) ne peut décroître.

b) l'autre est l'affirmation qu'un système isolé évolue spontanément vers des états de plus en plus probables.

La première proposition n'est pas la formulation la plus générale du Second Principe ; celle-ci est que la transformation non compensée n'est jamais négative.

Quant à la seconde, personne ne doute que ce soit une évidence ; pourtant ce n'est pas ce qu'il y paraît lorsqu'on regarde les choses de près.

Il y a lieu de distinguer deux faits en ce qui concerne la variation de la probabilité.

1°) Les fluctuations de la fréquence d'un évènement autour d'une probabilité existant *a priori*, comme la probabilité d'amener face avec une pièce de monnaie rigoureusement symétrique.

2°) L'évolution dans le temps de cette probabilité *a priori*, par exemple par l'usure de la pièce de monnaie.

Au sujet du premier, la loi des grands nombres nous apprend seulement que les fréquences tendent vers les probabilités, de telle sorte que la probabilité d'une fluctuation est d'autant plus faible que la fluctuation est grande. Si parmi les évènements possibles, il y en a un dont la probabilité est énormément plus grande que celle de tous les autres, c'est seulement cet évènement que l'on observera en pratique, de sorte que pour déterminer une répartition réelle, il est logique d'écrire

qu'elle correspond à un maximum de probabilité (méthode de la théorie cinétique pour déterminer la loi de Maxwell).

Mais il en va tout autrement du second fait : l'augmentation avec le temps de la probabilité a priori. Aucun principe du Calcul des probabilités ne nous permet d'affirmer qu'elle augmente systématiquement. Ainsi, si d'une urne contenant des boules blanches et des boules noires, nous faisons des extractions en remettant la boule dans l'urne quand elle est noire, en la conservant quand elle est blanche (intervention d'un agent extérieur), la probabilité d'extraction d'une blanche ira en diminuant. Au contraire, si l'on remet dans l'urne les boules extraites (ce qui semble être l'image d'un système isolé sans intervention d'un agent extérieur), la probabilité a priori d'extraction d'une blanche demeurera invariable.

Ce qui paraît le plus naturel d'admettre, c'est que la probabilité d'un système isolé demeure invariable. Et c'est bien le résultat que nous donne le schéma du corpuscule aléatoire dérivable en moyenne quadratique, quand il y a conservation de l'extension en phase. Ce n'est donc pas dans la probabilité que l'on doit chercher l'image de l'entropie, mais dans quelqu'autre qualité de la distribution qui varie alors même que la probabilité reste constante.

D'où vient donc cette assimilation tellement classique qu'on la trouve dans tous les ouvrages élémentaires de Physique, de l'entropie au logarithme de la probabilité ? Nous n'en voyons guère que deux présomptions :

a) Le fait que Boltzmann établit que le logarithme de la probabilité (à une Cte près) :

$$\mathcal{H} = - \int R \log R \, d\omega$$

a, lorsque $R = \rho f\omega$, $f\omega$ étant la loi de Maxwell, la même expression $\rho \log (k^{3/2} \rho^{-1}) \, d\omega$ que la thermodynamique donne, d'autre part, de l'entropie d'un gaz.

b) Un «raisonnement» de Max Planck, qui est le suivant.

L'entropie est additive, donc si nous avons deux systèmes :

$$S_{12} = S_1 + S_2$$

Les probabilités se combinent par produit :

$$P_{12} = P_1 P_2$$

Donc si $S = f(P)$, f satisfait à l'équation fonctionnelle :

$$f(P_1 P_2) = f(P_1) + f(P_2)$$

et par conséquent :

$$S = k \log P$$

k étant > 0 , car S et P varient dans le même sens.

Qui ne se rend compte que l'on commet ici encore une fois l'erreur de presque toutes les applications du Calcul des Probabilités à la Physique : celle d'appliquer le théorème des probabilités composées comme si les probabilités composantes étaient indépendantes ? En réalité, tout ce que nous avons le droit d'écrire, en général, est :

$$f(P_{12}) = f(P_1) + f(P_2).$$

P_{12} étant une quantité qui ne résulte en aucune manière de P_1 et de P_2 , on ne peut déduire de là, la forme fonctionnelle de f .

Qui plus est : ce n'est pas parce que deux grandeurs sont fonctions (même non décroissantes) du temps, qu'en éliminant le temps, on trouvera entre S et P une relation fonctionnelle simple. On doit d'autant plus en douter que, dans la théorie cinétique — P est une fonction en « escalier » qui augmente d'une marche chaque fois qu'un choc s'est produit entre deux molécules, tandis qu'en thermodynamique, S est une fonction d'état (c'est à dire des paramètres macroscopiques définissant le gaz) variant continûment avec le temps.

14. L'entropie et l'incertitude. Dans le Schéma du corpuscule aléatoire, la probabilité de configuration est constante dans le temps. Ce n'est donc pas dans la croissance de cette probabilité qu'il faut chercher une explication de l'augmentation d'entropie. L'entropie est liée à une qualité de la configuration qui varie même lorsque celle-ci conserve sa probabilité. Nous allons voir que c'est l'*incertitude*.

Soit un corpuscule aléatoire ayant une densité ρ et un module k uniformes : ce pourra être une particule infiniment petite, découpée au sein d'un corpuscule pourvu d'un champ.

Son entropie est :

$$S = \log(k^{3/2} \rho^{-1})$$

$k = \frac{\overline{U^2 + V^2 + W^2}}{3}$, la moyenne étant prise avec la fonction R .

Mais on peut tout aussi bien la considérer prise avec la fonction R_0 (égalité de l'énergie dans les deux états).

Donc $k = \overline{U^2}^0$

$k^{3/2}$ est alors le produit des incertitudes $s_1 s_2 s_3$ sur les composantes de la vitesse (calculées avec R_0).

Montrons que ρ^{-1} est proportionnel au produit $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ des incertitudes sur les coordonnées.

Supposons la particule cubique, d'arête $2l$.

On a :

$$\sigma_1^2 = \rho l^2 \int_{-l}^l x^2 dx = \frac{2}{3} \rho l^5$$

d'où¹ :

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \approx \rho^{3/2} l^{15/2}$$

D'autre part, la masse M est égale à $8 \rho l^3$

Eliminant l , il vient :

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \approx M^{15/2} \rho^{-1} \approx \rho^{-1}$$

Ainsi :

L'entropie d'un corpuscule aléatoire est le produit des incertitudes sur chaque couple coordonnée-vitesse (les incertitudes étant calculées avec la fonction de distribution de l'état R_0 tangent).

En tous cas, l'augmentation de l'entropie est liée à l'étalement de la distribution dans l'extension en phase. Nous trouvons là — indépendamment de toute considération de probabilité — l'idée fondamentale que la qualité de l'énergie que mesure l'entropie est son *degré de concentration*. Dire que l'énergie se dégrade c'est dire qu'elle se dilue.

Le minimum d'incertitude étant, en Mécanique Quantique, égal à $\frac{h}{4\pi}$ il est assez naturel de définir l'entropie d'un corpuscule à un seul

degré de liberté par l'expression :

$$S = \log \frac{4\pi \sigma s_1}{h}$$

qui est nulle lorsque l'incertitude est minima et, hors ce cas, toujours positive.

15. Minimum de dissipation. Pour expliciter les équations de la Mécanique du Corpuscule aléatoire, il nous faut connaître la fonction de distribution :

$$R = R_0 (1 + \eta)$$

dans un état dérangé.

R_0 est la fonction de distribution de l'état «tangent», c'est-à-dire de l'état de même énergie, de même densité, correspondant en chaque

¹ Le signe \approx vent dire: «proportionnel à»,

point au maximum de probabilité. On sait que dans la Statistique de Boltzmann :

$$R_0 = \rho f_0,$$

f_0 étant la loi de Maxwell :

$$f_0 = (2\pi k)^{-3/2} \frac{e^{-c'^2}}{2k} \quad (c'^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2)$$

De même qu'en Mécanique rationnelle, le mouvement réel d'un système jouit par rapport aux mouvements virtuels permis par les liaisons, de la propriété de rendre stationnaire l'intégrale d'action, il doit y avoir pour un état dérangé réel une propriété analogue qui permette de déterminer la fonction η .

Nous postulons que cette propriété est le « *Minimum de dissipation* »¹. Cette induction n'est vérifiable que par ses conséquences.

Un corpuscule aléatoire étant dans un état dérangé, caractérisé par la fonction de distribution :

$$R = \rho f = \rho f_0 (1 + \eta),$$

le taux de variation de la transformation non compensée en un point, est :

$$\frac{\partial \bar{G}_{nc}}{\partial t} = - \int f \frac{d}{dt} \log(\rho f_0) d\omega$$

L'expression détaillée de $\frac{d}{dt} \log(\rho f_0)$ est la suivante² :

$$\begin{aligned} - \frac{d}{dt} \log(\rho f_0) = & \left(\frac{3}{2} - \frac{c'^2}{2k} \right) \frac{d_0 \log k}{dt} - \mathcal{S} \frac{u'}{k} \left[\frac{d_0 u_0}{dt} - \bar{A} + k \frac{\partial s}{\partial x} \right] + \\ & + \theta - \frac{1}{k} \left[u'^2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \dots + v' w' \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial z} \right) + \dots \right] - \mathcal{S} \frac{u' c'^2}{2k} \frac{\partial \log k}{\partial x}. \end{aligned}$$

θ désigne, pour abréger l'écriture, la divergence de la vitesse d'ensemble :

$$\mathcal{S} \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

¹ Nous avons eu l'idée d'une Principe de Moindre dissipation, vers 1931, et en avons fait des applications à la Rotation du Soleil et à la Circulation générale de l'Atmosphère.

Voir par exemple : CRAS — 3 déc. 1934.

² Pour rendre les formules plus lisibles, nous désignons ici par u_0, v_0, w_0 , les composantes de la vitesse d'ensemble du fluide, appelées jusqu'à présent $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$.

\overline{A} désigne la moyenne doublement liée de l'accélération pour une « cellule » position-vitesse donnée. C'est en général une fonction de (x, y, z, u, v, w, t) qui nous est inconnue. Nous ferons l'hypothèse que (A, B, C) et (U, V, W) ne sont pas corrélées ; alors \overline{A} s'identifiera avec la moyenne simplement liée \overline{A} , qui représente en fait, la force extérieure agissant sur le corpuscule aléatoire (ou plus précisément sur les éléments du fluide équivalent). Cette hypothèse entraîne la *conservation de l'extension en phase*.

On voit d'abord que :

$$\int f_0 \frac{d}{dt} \log(\rho f_0) d\omega$$

est nul, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\partial \overline{C}_{nc}}{\partial t} = - \int f_0 \eta \frac{d}{dt} [\log(\rho f_0)] d\omega$$

Nous allons écrire que l'état tangent étant donné (c'est-à-dire les fonctions ρ et k), la fonction inconnue η réalise le minimum de cette expression, compte tenu des conditions adjointes suivantes :

$$1^{\circ}) \int f_0 \eta d\omega = 0 \quad (\text{conséquence du théorème des probabilités totales}).$$

$$2^{\circ}) \int f_0 \eta c'^2 d\omega = 0 \quad (\text{qui exprime que le fluide dans l'état tangent a la même énergie en chaque point que le fluide dans l'état dérangé}).$$

$$3^{\circ}) \int f_0 \eta u' d\omega = \int f_0 \eta v' d\omega = \int f_0 \eta w' d\omega = 0 \quad (\text{qui exprime que } u', v', w' \text{ sont les vitesses d'agitation en chaque point}).$$

$$4^{\circ}) \quad - \int f_0 (1 + \eta) \log(1 + \eta) d\omega = C^{nc}$$

Cette dernière condition signifie que les fluides virtuels appelés en comparaison ont, en chaque point, même probabilité. En effet celle-ci a pour logarithme :

$$H = - \int f \log f d\omega = - \int f_0 \log f_0 d\omega - \int f_0 (1 + \eta) \log(1 + \eta) d\omega$$

or $H_0 = - \int f_0 \log f_0 d\omega$ est le même pour tous les fluides comparés, en raison des conditions adjointes 1^o) et 2^o).

La condition de minimum s'écrit :

$$\log(1 + \eta) = \tau \left[- \frac{d}{dt} \log(\rho f_0) + \lambda + \mu c'^2 + au' + bv' + cw' \right]$$

$\tau, \lambda, \mu, a, b, c$, sont des multiplicateurs de Lagrange qui peuvent, en général, être fonctions du point (x, y, z) et même du temps t .

Nous attirons l'attention sur la *grandeur* τ , qui a les dimensions d'un temps et qui confère au corpuscule aléatoire une propriété «temporelle» qui n'existe pas chez le point matériel de la Mécanique.

Le problème de minimum que nous nous sommes posés est entièrement déterminé puisqu'il suffit maintenant de calculer les multiplicateurs de Lagrange par les conditions adjointes. Cependant ce problème est difficile à résoudre directement en termes finis, à cause de la forme $\log(1+\eta)$. On doit procéder par approximations. Nous nous contenterons ici de la première: celle où η étant assez petit, on peut remplacer $\log(1+\eta)$ par η .

Les conditions adjointes donnent alors :

$$1^{\circ) \quad \lambda + 3\mu k = 0$$

$$2^{\circ) \quad a = \frac{5}{2} \frac{\partial \log k}{\partial x} + \frac{1}{k} \left(\frac{d_0 u_0}{dt} - \bar{\Lambda} + k \frac{\partial S}{\partial x} \right); \quad b = \dots; \quad c = \dots$$

$$3^{\circ) \quad -2 \frac{d_0 s}{dt} + 3(\lambda + 5\mu k) = 0$$

Ces équations déterminent λ, μ, a, b, c , par les formules :

$$1^{\circ) \quad \lambda = -\frac{d_0 s}{dt}$$

$$2^{\circ) \quad a \text{ comme ci-dessus.}$$

$$3^{\circ) \quad \mu = \frac{1}{3k} \frac{d_0 s}{dt}$$

Et l'on trouve :

$$\eta = -\frac{\tau}{k} \left\{ \left[\left(u^2 - \frac{c'^2}{3} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} + \dots + v' w' \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial z} \right) + \dots \right] + S u' \left(\frac{5}{2} - \frac{c'^2}{2k} \right) \frac{\partial \log k}{\partial x} \right\}$$

Quant à τ , on peut en avoir une expression au moyen de la condition 4^o) qui, à l'approximation consentie, s'écrit :

$$H_0 - H = \frac{1}{2} \int f_0 \eta^2 d\omega = \frac{1}{2} \tau^2$$

Cela donne :

$$H_0 - H = \frac{\tau^2}{2} \left[\frac{3}{2} S \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + S \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \rho^2 + \frac{5}{2k} \left(\frac{\partial k}{\partial x} \right)^2 \right]$$

C'est — aux coefficients près — la formule donnée par Boltzmann, dans ses *Leçons sur la théorie dynamique des gaz* (traduction française, tome I, 1908, p. 182).

La quantité entre crochets est la somme Φ des fonctions dissipatives mécanique Φ_m et thermique Φ_k . On voit qu'elle est essentiellement positive (ou nulle), en la mettant sous la forme :

$$\frac{2}{3} S \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + S \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{5k}{2} \left(\frac{\partial \log k}{\partial x} \right)^2$$

Une expression approchée de τ est :

$$\tau = \sqrt{\frac{2(H_0 - H)}{\Phi}}$$

Calculons l'expression approchée de $\frac{\partial \bar{\mathcal{C}}_{nc}}{\partial t}$; pour cela prenons la moyenne de la condition de minimum, avec la fonction f . On obtient :

$$\int f \log(1 + \eta) d\omega = \tau \frac{\partial \bar{\mathcal{C}}_{nc}}{\partial t} + \lambda + 3\mu k$$

Prenons d'autre part cette moyenne avec la fonction f_0 ; cela donne :

$$\int f_0 \log(1 + \eta) d\omega = \lambda + 3\mu k$$

d'où par soustraction :

$$\tau \frac{\partial \bar{\mathcal{C}}_{nc}}{\partial t} = \int f_0 \eta \log(1 + \eta) d\omega = \bar{\eta}^2 + \dots$$

Le second membre est, en tous cas, positif car $\eta \log(1 + \eta) > 0$ quel que soit le signe de η . Mais cela ne nous permet pas de conclure sur le signe de $\frac{\partial \bar{\mathcal{C}}_{nc}}{\partial t}$ car, rien dans notre calcul ne nous permet de décider du signe de τ . C'est seulement en invoquant le Second principe que nous reconnaissons que τ doit être positif.

De τ , on peut encore donner l'expression approchée suivante :

$$\tau = \frac{2(H_0 - H)}{\left(\frac{\partial \overline{\mathcal{C}}_{nc}}{\partial t}\right)}$$

Enfin $\overline{\mathcal{C}}_{nc}$ et la fonction dissipative Φ sont liés par la relation :

$$\frac{1}{\tau} \frac{\partial \overline{\mathcal{C}}_{nc}}{\partial t} = \Phi$$

ce qui légitime d'appeler : principe de moindre dissipation, un principe qui consistait au début à écrire le minimum du taux de variation de la transformation non compensée.

Le principe de moindre dissipation qui, appliqué à chaque particule du fluide, nous a permis de déterminer la fonction de distribution des vitesses dans un état dérangé, peut ensuite être appliqué au fluide entier (minimum de l'intégrale $\frac{1}{2} \int \tau^2 \Phi d\omega$), moyennant des conditions adjointes convenables. Il permet alors de déterminer le champ macroscopique des vitesses (u_0, v_0, w_0) et le champ du module d'énergie (k) du fluide¹.

16. Moindre dissipation et maximum de probabilité. On sait que les questions d'extrémum liés (c'est-à-dire avec des conditions adjointes) donnent lieu à plusieurs problèmes mathématiquement équivalents lorsqu'on assujettit l'intégrale qui doit être extréma, à garder une valeur constante donnée et qu'on décide que sera extréma une des intégrales qui, dans le problème primitif, devait garder une valeur donnée fixe.

Par conséquent, nous aurions pu, sans en changer la solution, présenter ainsi notre problème de calcul des Variations :

L'intégrale :

$$\int f_0(1 + \eta) \log(1 + \eta) d\omega$$

¹ Voir à ce sujet :

G. Dedeabant, Ph. Schereschewsky et Ph. Wehrlé : Sur une classe de mouvements naturels des fluides visqueux caractérisés par un minimum de puissance dissipée. Cas du soleil (CRAS — 3 déc. 1934).

Théorie de la Circulation générale de l'Atmosphère — Le champ moyen de température (CRAS — 29-7-1935).

Théorie de la Circulation générale de l'Atmosphère : La loi de rotation et le champ de pression (CRAS — 19-8-1935).

qui représente $(H_0 - H)$ est *maxima*, avec les conditions adjointes suivantes :

$$1.^{\circ}) \quad \int f_0 \eta d\omega = 0$$

$$2.^{\circ}) \quad \int f_0 \eta c'^2 d\omega = 0$$

$$3.^{\circ}) \quad \int f_0 \eta u' d\omega = \int f_0 \eta v' d\omega = \int f_0 \eta w' d\omega = 0$$

$$4.^{\circ}) \quad - \int f_0 \eta \frac{d}{dt} \log(\rho f_0) d\omega = c^{te} = \frac{\partial \mathcal{C}_{nc}}{\partial t}$$

Le problème ainsi posé signifie que l'état dérangé réel représente un maximum de probabilité par rapport à tous les états dérangés virtuels admettant le même état de Maxwell (ρf_0) tangent et le même taux de variation $\left(\frac{\partial \mathcal{C}_{nc}}{\partial t}\right)$ de la transformation non compensée.

C'est cette dernière condition adjointe qui est cause que la loi de Maxwell ne peut réaliser le maximum de probabilité (car pour elle $\frac{\partial \mathcal{C}_{nc}}{\partial t} = 0$; elle ne satisfait donc pas à la condition adjointe posée).

Le problème étant pris sous cet aspect, il saute aux yeux que le maximum de probabilité réalisé par un état réel (et que l'on doit considérer, comme une évidence statistique — cet état étant alors énormément plus fréquent que les autres, donc le seul à se manifester effectivement à notre observation —) est une propriété absolument étrangère à l'évolution d'un système vers des états de plus en plus probables (ce qui n'est en aucune manière une évidence, et qui, plus est, est inexact).

Nous avons vu que l'on peut écrire, pour le maximum de probabilité (état réel) :

$$H = H_0 - \frac{\tau}{2} \frac{\partial \mathcal{C}_{nc}}{\partial t}$$

d'où — à supposer même τ indépendant du temps — :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H_0}{\partial t} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{nc}}{\partial t^2}$$

Si la particule garde une densité et une énergie (k) constantes, on a seulement :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{nc}}{\partial t^2}$$

L'évolution vers des états de plus en plus probables correspond donc à :

$$\frac{\partial^2 \overline{C}_{nc}}{\partial t^2} \leq 0$$

Cette condition n'a rien à voir avec le Second Principe qui réclame :

$$\frac{\partial \overline{C}_{nc}}{\partial t} \geq 0$$

mais n'impose aucune espèce de condition à la variation seconde de \overline{C}_{nc}

17. Explicitation des équations du mouvement. En possession de la fonction de distribution des vitesses dans un état dérangé, il nous est facile d'expliciter complètement les équations du mouvement et l'équation d'énergie du corpuscule aléatoire, qui ne sont autres d'ailleurs que les équations des fluides.

Rappelons d'abord pour mémoire l'équation de continuité pour laquelle il n'est pas besoin de connaître f :

$$\frac{d_0 \log \rho}{dt} + \sum \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0$$

Pour les équations du mouvement, il nous faut calculer le tenseur des moments rectangles des composantes de la vitesse. On trouve :¹

$$\rho \left(\overline{u'^2} - \frac{c'^2}{3} \right) = -\nu \left(2 \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{2}{3} \sum \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)$$

$$\rho \overline{U'V'} = -\nu \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \dots$$

On a posé :

$$\nu = \rho k \tau$$

Cette grandeur s'identifie avec le coefficient de *viscosité cinématique*. Les équations du mouvement sont :

¹ Tous ces calculs nécessitent la connaissance des moments de la loi de Maxwell. Voici les formules nécessaires :

$$\overline{U'^2} = \overline{V'^2} = \overline{W'^2} = k; \quad \overline{C'^2} = 3k; \quad \overline{U'^4} = 3k^2; \quad \overline{U'^2 V'^2} = k^2; \quad \overline{U'^2 C'^2} = 5k^2 \quad \overline{C'^4} = 15 k^2.$$

$$\frac{d_0 u_0}{dt} = \overline{A} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) \right] - \frac{2}{3\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\nu \theta) \\ + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right]$$

et deux analogues.

On a posé :

$$p = k\rho$$

D'après les équations du mouvement, p s'identifie avec la pression et la formule qui la définit n'est autre que la formule des gaz parfaits.

$$\theta = \int \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

est la dilatation cubique.

\overline{A} s'identifie à la force extérieure.

Dans les cas où ν ne dépend pas de (x, y, z) , les équations du mouvement prennent la forme de *Navier-Stokes* :

$$\frac{d_0 u_0}{dt} = \overline{A} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{\rho} \Delta u_0 + \frac{1}{3} \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

L'équation d'énergie nécessite le calcul de $\overline{U' C'^2}$; on trouve :

$$\overline{U' C'^2} = -5 \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial k}{\partial x}$$

d'où l'équation :

$$\frac{d_0 s}{dt} - \frac{5}{2\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \log k}{\partial x} \right) = \frac{\nu}{p} \left[2 \int \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \int \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \theta^2 \right] + \\ + \frac{5\nu}{\rho} \int \left(\frac{\partial \log k}{\partial x} \right)^2$$

Le second membre est la fonction dissipative.

S'il n'y a pas de mouvement d'ensemble : $u_0 = v_0 = w_0 = 0$, et que ν soit constant, on retrouve l'équation de la chaleur de Fourier :

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{5\nu}{3\rho} \Delta k$$

Le coefficient de conductibilité est les $\frac{5}{3}$ du coefficient de viscosité.

On eut trouvé évidemment d'autres rapports avec un corpuscule aléatoire doué de plus de 3 degrés de liberté.

Les équations qui viennent d'être écrites, ne sont pas nouvelles dans leur forme. Les méthodes de l'énergétique, d'une part, de la théorie cinétique d'autre part, permettent de les établir.

L'intérêt de la Mécanique aléatoire, outre son élégance, est son extrême généralité.

Si l'on y réfléchit, deux bases seulement ont été mises en oeuvre :

1°) une base mathématique, qui est l'hypothèse de la dérivabilité en moyenne quadratique.

2°) une base physique : le principe de moindre dissipation. Imitant en cela la Mécanique Statistique de Gibbs qui se refuse à adopter la représentation concrète des molécules comme étant de petites sphères élastiques et raisonne sur des « systèmes », les résultats obtenus, sont entièrement indépendants de la nature des objets étudiés et s'appliquent en particulier aux mouvements des fluides comportant des « étages turbulents ». Ils s'adaptent aussi bien à une structure intime *continue* que *discontinue*, des fluides.

Pourtant l'extension des équations de Navier Stokes aux mouvements turbulents a généralement peu réussi. Nous en voyons trois raisons principales :

1°) la mauvaise définition de la turbulence et la confusion de ses différents étages. Avant d'appliquer des équations, il est indispensable de disposer d'instruments qui mesurent correctement les grandeurs physiques qui figurent dans ces équations.

2°) la grande variabilité dans l'espace, du coefficient de viscosité turbulente, principalement à partir d'une paroi. Il faut donc prendre garde à ne pas remplacer systématiquement ν par une constante.

3°) la non-isotropie de la turbulence au voisinage d'une paroi, qui a pour conséquence que le module d'énergie k qui est un scalaire, doit être remplacé par une grandeur de caractère tensoriel.

18. Equation du « son » pour le corpuscule aléatoire. Soit un corpuscule aléatoire dans l'état de Maxwell. Son état est défini par les paramètres macroscopiques ρ_0 et k_0 , qui sont uniformes dans tout le fluide équivalent.

Imaginons que nous fassions subir au corpuscule une « perturbation sonore », c'est à dire que nous modifions en chaque point ρ_0 et k_0 , de sorte que les dérivées d'espace soient négligeables par rapport aux dérivées de temps.

Dans ces conditions, la loi de Maxwell subsiste: ses paramètres sont seulement devenus des fonctions du temps. L'équation d'énergie se simplifie alors considérablement car toutes les variations par rapport à x, y, z sont négligeables.

Il reste $\frac{d_0 s}{dt} = 0$ qui se réduit à $\frac{\partial s}{\partial t} = 0$ puisqu'on néglige les dérivées d'espace devant les dérivées de temps.

On a donc :

$$k^{3/2} \bar{\rho}^{-1} = k_0^{3/2} \bar{\rho}_0^{-1} = c^{10}$$

dans tout l'espace.

Considérons d'autre part, l'équation aux dérivées partielles du 2.^o ordre en ρ , que nous avons obtenue dans la 1.^{ère} Partie, comme conséquence de la double dérivabilité de X, Y, Z , soit :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \sum \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\overline{X^2} \rho) - \sum \frac{\partial}{\partial x} (\overline{X} \dot{\rho})$$

Les \overline{X} étant nulles dans l'état de Maxwell, l'équation se réduit à :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \sum \frac{\partial^2}{\partial x^2} (k \rho)$$

D'autre part, en vertu de l'équation d'énergie, k est proportionnel à $\rho^{2/3}$ donc :

$$\rho k = \rho_0 k_0 + \frac{5}{3} k_0 (\rho - \rho_0)$$

d'où finalement :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{5}{3} k_0 \Delta \rho$$

Ainsi la perturbation de densité se propage avec la vitesse :

$$a_0 = \sqrt{\frac{5k}{3}}$$

Dans le cas de la théorie cinétique, on reconnaît là, la vitesse du son de Laplace (k étant proportionnel à la température absolue). Mais nous voyons de plus qu'une perturbation de densité, apportée dans un « étage de turbulence », se propage avec une vitesse correspondant au module d'énergie de l'étage.

Ce fait est susceptible d'offrir à la Météorologie dynamique une explication de la vitesse de déplacement des grandes perturbations qui est de l'ordre de 60 km/h. Ces perturbations seraient considérées comme

une «turbulence de grande échelle» de la Circulation générale de l'Atmosphère et leur vitesse de propagation serait alors de l'ordre de la vitesse des vents. L'hydrodynamique classique ne connaît que les ondes sonores proprement dites, ces dernières ayant une vitesse d'un ordre de grandeur énormément plus grand que celui qu'il s'agit d'expliquer.

VIII—LA CONNEXION DU CORPUSCULE ALEATOIRE

19. Sens physique et définition de la connexion. On sait qu'il n'est pas possible d'attribuer aux gaz une structure intime continue, sans quoi on n'expliquerait pas leur compressibilité. Le plus ou moins grand degré de «cohésion» d'un gaz peut se concevoir comme mesuré par la distance moyenne qui sépare ses molécules, notion qui se rattache à celle de *temps de libre parcours* τ , temps moyen séparant deux chocs successifs. Les coefficients de diffusion, de viscosité, de conductibilité d'un gaz, dépendent essentiellement de ce temps τ . La conception de *milieux continus* (comme les liquides incompressibles et les solides rigides) exclut entièrement une telle notion (τ étant alors nul).

Au contraire, elle est naturellement incluse dans la conception du corpuscule aléatoire où, sous le nom de «*connexion*», elle apparaît dans toute sa généralité et se prête à une analyse détaillée.

La connexion est intimement liée aux lois de probabilité en deux points, comme on s'en aperçoit tout de suite en se référant au «schéma des libres parcours» cité en exemple dans la 1ère Partie, pour lequel on a établi que

$$r(h) = 1 - \Phi(|h|)$$

$r(h)$, étant le coefficient de corrélation entre les vitesses du corpuscule en deux instants séparés par l'intervalle h , et $\Phi(\theta)$, la fonction de répartition des libres parcours.

Définissons d'une manière générale ce que nous entendons par connexion de deux variables aléatoires.

Soient $F_1(u_1)$ et $F_2(u_2)$, leurs lois de probabilité individuelles. On crée une dépendance de probabilité entre U_1 et U_2 en choisissant la loi conjuguée :

$$F_{12}(u_1, u_2) = F_1(u_1)F_2(u_2) + L(u_1, u_2)$$

$L(u_1, u_2)$ s'appelle la *fonction lien*.¹ Lorsqu'elle est identiquement nulle, les variables aléatoires U_1 et U_2 sont indépendantes et réciproquement.

¹ Cette dénomination est due à Mr. Kamp de Fériet.

Nous dirons que la fonction lien exprime la connexion entre les variables aléatoires U_1 et U_2 . La loi conjuguée F_{12} contient bien l'idée de connexion, mais pas à l'état pur: elle la mélange avec les lois de probabilité individuelles.

Pour obtenir une *mesure* de la connexion, nous considérerons le coefficient de corrélation :

$$r = \frac{\overline{U_1' U_2'}}{\sqrt{\overline{U_1'^2}} \sqrt{\overline{U_2'^2}}}$$

20. Lois de probabilité dans un fluide. Nous ne diminuerons pas la portée des idées qui vont suivre et nous en faciliterons la compréhension, en réduisant l'espace à une seule dimension, ce qui revient en somme à employer une notation abrégée consistant à condenser l'écriture de plusieurs coordonnées en un symbole unique.

Soit X/t un corpuscule aléatoire et $U = \dot{X}/t$, sa vitesse, dérivée en moyenne quadratique de la fonction aléatoire X .

Représentons par : (x_1, u_1, x_2, u_2) la *loi de probabilité conjuguée des positions et des vitesses* aux instants t_1, t_2 c'est à dire la probabilité pour que le corpuscule se trouve à l'instant t_1 dans la «cellule» (x_1, u_1) , et à l'instant t_2 dans la «cellule» (x_2, u_2) .

C'est une fonction :

$$G_{12} = G(x_1, u_1, x_2, u_2; t_1, t_2)$$

de 4 variables x_1, u_1, x_2, u_2 qui sont les *valeurs courantes* de 4 variables aléatoires, et de *deux paramètres certains* : t_1 et t_2 . Pour bien distinguer les caractères de ces deux sortes de variables, nous avons écrit *d'abord* les valeurs courantes des variables aléatoires et les avons séparées par un *point-virgule* des paramètres certains, écrits *ensuite*.

Lorsque nous utiliserons la notation «parenthèses» — (x_1, u_1, x_2, u_2) — sans nommer par une lettre la fonction envisagée, nous omettrons d'écrire t_1 et t_2 ; on saura cependant par les indices des autres variables que ces paramètres figurent dans la fonction.

De la fonction G , on peut faire dériver toutes les lois de probabilité en deux points relatives au corpuscule (ou à son fluide équivalent), soit en supprimant une ou plusieurs variables — nous obtenons ainsi les autres *lois conjuguées* et, quand il ne reste plus qu'une variable, les *lois individuelles* —, soit en donnant à une ou plusieurs variables des *valeurs fixes* (c'est à dire en considérant ces variables non plus comme les valeurs courantes d'aléatoires, mais comme des paramètres certains) et alors nous obtenons les *lois liées*.

Tout un tissu de relations obtenues par l'application du théorème des probabilités totales et du théorème des probabilités composées, unit entre elles les diverses lois de probabilité dans un fluide. En particulier, toutes peuvent s'obtenir à partir de la loi génératrice G , par application répétée de ces deux théorèmes.

Il est commode de voir comment cette application opère sur les notations que nous avons introduites.

1°) Le *théorème des probabilités totales* se traduit par l'opération de « contraction ».

En sommant une loi par rapport à une variable courante, on obtient une loi ne contenant plus cette variable.

Ainsi :

$$(u_1, u_2; x_1) = \int (u_1, u_2, x_2; x_1) dx_2$$

Cette règle est la même que celle du Calcul Tensoriel, de la sommation par rapport aux indices muets. On peut en effet convenir d'omettre le signe \int et d'intégrer par rapport aux variables répétées dans l'élément différentiel, ce qui donne la notation simplifiée :

$$(u_1, u_2; x_1) = (u_1, u_2, x_2; x_1) dx_2$$

En appliquant plusieurs fois le procédé, on fait dériver de G n'importe quelle loi conjuguée ou individuelle.

Exemple :

$$(x_1) = (x_1, x_2) dx_2 = (x_1, x_2, u_1) dx_2 du_1 = (x_1, x_2, u_1, u_2) dx_2 du_1 du_2$$

2°) Le *théorème des probabilités composées* se traduit par le franchissement du point virgule.

Dans le quotient de deux lois, toute variable qui figure en haut et en bas à gauche du point virgule, passe à droite du point virgule dans la loi qui exprime le quotient.

Exemples :

$$(u_1, u_2, x_2; x_1) = \frac{(u_1, u_2, x_1, x_2)}{(x_1)}$$

$$(u_1, u_2; x_1, x_2) = \frac{(u_1, u_2, x_2, x_1)}{(x_2; x_1)}$$

$$(u_1, u_2; x_1, x_2) = \frac{(u_1, u_2, x_1, x_2)}{(x_1, x_2)}$$

Toute relation existant entre les lois de probabilité dans un fluide peut s'obtenir par combinaison et répétition des deux opérations qui viennent d'être décrites.

Exemple :

$$(u_1, u_2; x_1) = (u_1, u_2, x_2; x_1) dx_2 = (u_1, u_2; x_1, x_2)(x_2; x_1) dx_2$$

21. Nature des diverses lois de probabilité dans un fluide. Au point de vue de leur signification physique, les lois de probabilité dans un fluide sont de trois natures différentes :

a) *les lois corpusculaires* sont les lois conjuguées (non liées). Elles expriment la probabilité d'avoir un certain *état cinématique* (ou seulement géométrique) du corpuscule.

Elles dérivent toutes par contraction de la loi :

$$(x_1, u_1, x_2, u_2)$$

Ainsi :

$$(x_1, x_2) = (x_1, u_1, x_2, u_2) du_1 du_2$$

$$(x_1) = (x_1, x_2) dx_2$$

b) *les lois de champ* sont les lois liées correspondant à des valeurs fixées des coordonnées. Ainsi :

$$(u_1, u_2; x_1, x_2), \quad (u_1; x_1)$$

c) *les lois de « transition » ou de « passage »* concernent la probabilité d'une certaine transformation de l'état du corpuscule : ce sont les lois liées dans lesquelles les variables situées d'un côté du point virgule ont toutes l'indice 1, et celles situées de l'autre côté, toutes l'indice 2.

Exemples :

$$(x_2, u_2; x_1, u_1) \quad (x_2; x_1)$$

Les lois de champ correspondent au point de vue d'*Euler* en hydrodynamique, et les lois de passage au point de vue de *Lagrange*.

Examinons un peu en détail les propriétés de la probabilité de passage :

$$(x_2; x_1) = P(x_2; x_1, t_1, t_2) = P_{12}$$

$P_{12} dx_2$ est la probabilité pour que le corpuscule qui, à l'instant t_1 se trouvait au point x_1 se trouve à l'instant t_2 dans un domaine dx_2 entourant le point x_2 .

On a :

$$(x_2; x_1) = \frac{(x_1, x_2)}{(x_1)}$$

La probabilité de passage est une notion pleine d'intérêt, largement utilisée dans la théorie du mouvement brownien et plus généralement, dans le problème des probabilités en chaîne.

Voyons sa signification hydrodynamique. Dans un fluide « certain », la méthode de Lagrange considère la position x_2 d'une particule à l'instant t_2 , comme une fonction certaine: $x_2(x_1, t_1, t_2)$ de la position x_1 occupée à l'instant t_1 par la particule.

En vertu de la continuité du fluide certain, la relation :

$$x_2 = x_2(x_1, t_1, t_2)$$

établit une correspondance *biunivoque* entre x_1 et x_2 , de sorte que les paramètres x_1 et t_1 permettent de repérer et d'identifier sans ambiguïté la particule dont on parle.

Au contraire, dans un fluide aléatoire, à la particule située en x_1 au temps t_1 correspond au temps t_2 non pas *une* particule, mais un *sous-ensemble* de particules dont la coordonnée x_2 est une fonction *aléatoire* : $x_2/x_1, t_1, t_2$ et qui se particularisera au sein des autres éléments du fluide par sa fonction de distribution :

$$P(x_2; x_1, t_1, t_2)$$

tandis que celle de l'ensemble des particules situées en x_2 au temps t_2 est :

$$\rho(x_2; t_2)$$

La probabilité de passage P nous permet donc de connaître parmi toutes les particules situées en x_2 au temps t_2 , la proportion de celles qui émanent de x_1 où elles étaient au temps t_1 .

La correspondance $x_2 \rightarrow x_1$ n'est plus *univoque* et c'est en cela que consiste la diffusion du fluide en lui-même, propriété essentielle des fluides naturels, que l'hydrodynamique classique passe sous silence, ce qui est la cause principale de ses insuccès.

22. Moyennes de Lagrange. a). Soit d'abord une fonction certaine de x et de t :

$$\Psi(x, t)$$

Considérons la comme attachée à l'élément fluide ayant la coordonnée x à l'instant t .

Au point x_1 , à l'instant t_1 , cette fonction a la valeur :

$$\Psi(x_1, t_1) = \Psi_1$$

Au temps t_2 , les éléments fluides qui étaient concentrés en x_1 à l'instant t_1 , ont diffusé et possèdent une coordonnée aléatoire X_2 .

Nous appellerons *moyenne de Lagrange* de Ψ , la moyenne de Ψ prise sur ces éléments X_2 qui émanent de x_1 .

C'est donc :

$$\widehat{\Psi} = \int P_{12} \Psi(x_2, t_2) dx_2$$

$\widehat{\Psi}$ est finalement une fonction de x_1 , t_1 et de t_2

La variation $(\widehat{\Psi} - \Psi_1)$ représente visiblement la variation de Ψ due à des actions extérieures, puisque *tous* les éléments ont été suivis dans leur diffusion.

Si l'on fait en particulier $\Psi = x$, on obtient la position du centre de gravité des éléments fluides qui ont diffusé à partir de x_1 :

$$\widehat{X} = \int P_{12} x_2 dx_2$$

Quant à leur dispersion, c'est :

$$\widehat{X^2} - (\widehat{X})^2 = \int P_{12} (x_2 - \widehat{X})^2 dx_2$$

b). Considérons maintenant une fonction certaine de (x, u, t) :

$$\Psi(x, u, t)$$

On peut définir sa moyenne de Lagrange dans l'espace généralisé [en considérant (x, u) comme un point], par l'intégrale :

$$\widehat{\Psi} = \int \pi_{12} \Psi(x_2, u_2, t_2) dx_2 du_2$$

où $\pi_{12} = (x_2, u_2; x_1, u_1)$ est la probabilité de passage d'une cellule de l'espace position-vitesse, à une autre. $\widehat{\Psi}$ est une fonction du point initial (x_1, u_1) , de l'instant initial t_1 et de l'instant final t_2 .

Si l'on fait maintenant la moyenne de $\widehat{\Psi}$ pour toutes les vitesses initiales u_1 , on obtient la moyenne de Lagrange proprement dite :

$$\widehat{\Psi} = \int \widehat{\Psi} \cdot (u_1; x_1) du_1 = \int Q_{12} \Psi_2 dx_2 du_2$$

avec

$$Q_{12} = (x_2, u_2; x_1)$$

Lorsque Ψ ne dépend pas de u , on peut effectuer l'intégration par rapport à u_2 et l'on retombe bien sur la moyenne de Lagrange définie plus haut pour une fonction de x et de t seulement.

Si Ψ ne dépend pas de x , on peut — au contraire — intégrer par rapport à x_2 et l'on obtient cette nouvelle forme de la moyenne de Lagrange d'une fonction des vitesses seulement :

$$\bar{\Psi} = \int \Phi_{12} \Psi_2 du_2$$

avec

$$\Phi_{12} = (u_2; x_1)$$

c). On comprend sans peine l'intérêt physique considérable que présentent les moyennes de Lagrange : elles permettent *littéralement* de *suivre* à travers le fluide — et cela malgré leur diffusion — tels éléments fluides que l'on désire. Ainsi, plaçons-nous en un point x : en ce point se trouve à un instant donné une *particule*. Plus tard, cette particule aura diffusé, à cause du *caractère aléatoire de la vitesse* et cessé d'être ponctuelle, ses éléments constituants (les *microparticules*) s'étant dispersés à travers le fluide. Pourtant, les moyennes de Lagrange permettront de calculer la valeur prise par une fonction qui lui était primitivement attachée, tout comme si l'on n'avait pas perdu de vue les éléments maintenant éparpillés de la particule.

Si au lieu d'un point x de l'espace, nous considérons un point (x, u) de l'espace généralisé, nous aurons une *cellule*. Les éléments qui la constituent (*molécules*) diffusent parce que l'accélération (pour une position et une vitesse donnée) est encore *aléatoire*¹. Les moyennes de Lagrange dans l'espace généralisé donnent cependant le moyen de calculer la valeur d'une fonction de x et de u attachée à ces éléments.

23. Diverses sortes de moyennes. Il importe naturellement de bien distinguer les *moyennes de Lagrange* (symboles \frown et \smile) des deux sortes de moyennes que nous avons déjà employées :

1°) Moyennes liées en un point de l'espace (symbole \sqcap), ou de l'espace généralisé (symbole \sqsupset), ou encore en deux points de l'espace (symbole ---), que nous pouvons appeler des *moyennes d'Euler*.

2°) Moyennes étendues à tout le corpuscule, ou *moyennes corpusculaires* (symbole ---).

Les moyennes corpusculaires sont d'un ordre supérieur aux moyennes de Lagrange et d'Euler, puisqu'elles suppriment toute condition liée; elles s'en déduisent par intégration.

¹ Ce n'est pas le cas pour une Mécanique aléatoire de Lagrange, dans laquelle on sait que \ddot{X} est une fonction certaine de \dot{X}, X, t .

Ainsi :

$$\overline{\Psi}_1 = \Psi_1 \cdot (u_1, x_1) dx_1 du_1 = \Psi_1 \cdot (u_1; x_1)(x_1) dx_1 du_1 = \overline{\Psi}_1 \cdot (x_1) dx_1 = \overline{\overline{\Psi}_1}$$

D'autre part, soit :

$$\widehat{\Psi}_1 = \Psi_2 \cdot (x_2; x_1) dx_2$$

on a :

$$\overline{\widehat{\Psi}_1} = \widehat{\Psi}_1 \cdot (x_1) dx_1 = \Psi_2 \cdot (x_1)(x_2; x_1) dx_1 dx_2 = \Psi_2 \cdot (x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \overline{\Psi}_2$$

24. Développement des moyennes de Lagrange. Les moyennes de Lagrange et celles d'Euler sont du même ordre ; leurs relations sont compliquées et ne peuvent s'exprimer que sous forme d'un développement.

La moyenne de Lagrange d'une fonction de x, u, t :

$$\Psi(x, u, t)$$

est, ainsi que l'on vu plus haut :

$$\widehat{\Psi} = \Psi_2 \cdot (x_2, u_2; x_1) dx_2 du_2$$

Changeons ici légèrement nos notations pour abrégier l'écriture : l'instant initial t_1 sera l'instant zéro et l'indice 2 relatif au second état sera supprimé.

Supposons X/t analytique, de sorte que Ψ soit développable en série de Mac-Laurin :

$$\Psi(X, U, t) = \Psi_0 + t\dot{\Psi}_0 + \frac{t^2}{2}\ddot{\Psi}(0) + \dots$$

ou, symboliquement :

$$\Psi(X, U, t) = e^{(\cdot)} \Psi_0$$

L'opérateur «point» (\cdot) est la dérivation *totale* aléatoire par rapport à t (ou dérivation de Lagrange).

Il ne doit pas être confondu avec l'opérateur $\frac{d}{dt}$.

La différence entre ces deux opérateurs est en effet (pour une fonction de x et de u) :

$$(\cdot) - \frac{d}{dt} = \int (A - \overline{A}) \frac{\partial}{\partial u}$$

Elle disparaît seulement dans une Mécanique aléatoire de Lagrange (car alors A , fonction certaine de X, U, t , est égale à \overline{A}).

Prenons les moyennes des deux membres du développement de Ψ pour un point initial donné.

On obtient ainsi :

$$\overline{\Psi} = \overline{\Psi}_0 + t \overline{\dot{\Psi}}_0 + \frac{t^2}{2} \overline{\ddot{\Psi}}_0 + \dots = e^{t(\cdot)} \overline{\Psi}_0$$

On peut donc écrire d'une manière générale :

$$\overline{\Psi^{(n)}} = \left(\frac{\partial^n \overline{\Psi}}{\partial t^n} \right)_{t=0}$$

et, en particulier :

$$\overline{\dot{\Psi}}_0 = \left(\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial t} \right)_{t=0}$$

Cette formule nous conduit à une interprétation physique claire du second membre de l'équation de transfert :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \overline{\Psi}) + \sum \frac{\partial}{\partial x} (\rho \overline{\Psi U}) = \rho \overline{\dot{\Psi}}$$

Considérons à l'instant initial zéro, une particule ponctuelle, concentrée au point x_0 . A l'instant postérieur t , infiniment voisin, cette particule a diffusé autour du point moyen \widehat{X} , parce que les microparticules qui la composent n'ont pas la même vitesse. De plus, les éléments (molécules) qui composent une microparticule n'ont pas la même accélération : les points représentatifs ont diffusé dans l'espace des vitesses. Le point de vue de Lagrange consiste à *suivre* dans l'espace généralisé les éléments (molécules) qui composaient initialement la particule ponctuelle x_0 . La dérivée $\left(\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial t} \right)_0$ de la moyenne de Lagrange

est la variation de la moyenne d'une fonction de x et de u attachée à ces éléments. Notre analyse suivant strictement ceux-ci dans leur individualité — c'est-à-dire sans en perdre un seul de vue ni en laisser pénétrer d'étranger —, il va de soi que les causes de la variation $\left(\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial t} \right)_0$ ne peuvent provenir que d'*agents extérieurs* (par exemple champ de forces extérieur ; molécules échangeant de l'énergie avec le milieu ambiant).

Il faut bien souligner ce que l'analyse (aléatoire) de Lagrange a de remarquable : en dépit de la diffusion s'effectuant non seulement dans l'espace des positions, mais aussi dans l'espace des vitesses, elle per-

met de reconnaître au milieu du troupeau, tels individus antérieurement spécifiés. Dans la mécanique statistique classique, l'étalemeⁿt de l'extension en phase finit par donner à la cellule initiale une forme extrêmement compliquée, mais qu'il est cependant possible d'enfermer dans une frontière. En Mécanique aléatoire, les éléments constitutifs d'une cellule initiale, se dispersent dans tout l'espace généralisé et s'imbriquent dans les autres d'une manière inextricable: seule la méthode *purement statistique des lois de probabilité liées* permet de les distinguer et de les soumettre au Calcul.

La relation :

$$\overline{\Psi}_0 = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)_{t=0}$$

va nous donner toutes précisions sur les principes de conservation implicitement contenus dans la Mécanique du corpuscule aléatoire deux fois dérivable. L'équation de continuité qui correspond à $\Psi=1$, est une évidence qui n'entraîne l'introduction d'aucun principe physique.

Dans les équations du mouvement, si l'on identifie la moyenne liée de l'accélération: \overline{A} à la force extérieure F_x , on exprime la loi physique :

$$\rho \left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} \right)_0 = \rho F_x,$$

qui signifie que la variation de la quantité de mouvement des éléments constituant une particule et suivis dans leur individualité, est égale à la force extérieure.

Enfin, l'équation d'énergie exprime que :

$$\left(\frac{\partial \frac{1}{2} \overline{C^2}}{\partial t} \right)_0 = S \overline{A \overline{U}} = S \overline{U} \overline{A} + S \overline{U' A'} = S u_0 F_x + S \overline{A' U'}.$$

Quand nous avons posé que: $S \overline{A' U'} = 0$ nous avons donc admis que les éléments du corpuscule satisfaisaient au théorème des forces vives autrement dit qu'ils étaient *parfaits*. Cela s'écrit, si l'on veut :

$$\left(\frac{\partial \frac{1}{2} \overline{C^2}}{\partial t} \right)_0 = 0$$

c'est à dire que l'énergie cinétique d'agitation (ou énergie interne) de la particule concentrée initialement en x_0 , se conserve lorsqu'on suit la particule dans toute son individualité.

Il pourrait ne pas en être ainsi, par exemple, si cette énergie d'agitation s'échangeait avec une autre forme d'énergie (telle que le rayonnement) contenue dans le milieu ambiant.

$\int \overline{A' U'}$ représente une « quantité de chaleur », mais alors que les quantités de chaleur considérées jusqu'à présent dans la Thermodynamique du Corpuscule étaient de l'énergie d'agitation qui sortait d'une particule ou y entrait par diffusion (ou perte d'individualité de cette particule) et demeuraient cependant de l'énergie d'agitation, la nouvelle quantité de chaleur correspond — maintenant que la particule conserve toute son individualité — à des transformations en une *autre* forme d'énergie :

En théorie cinétique, avec des chocs parfaits,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \overline{C^2} \right)_0$$

est bien nul ; en effet les molécules qui ne subissent pas de chocs conservent leur énergie cinétique et il en est de même pour les paires qui se choquent car, dans le point de vue de Lagrange, les molécules choquées continuent à appartenir à la *même* particule.

25. Champ aléatoire — Connexion cinématique a) *Fonction aléatoire de deux paramètres.*

Abandonnant pour un moment le corpuscule aléatoire dont les coordonnées n'étaient fonction que d'un seul paramètre certain : t , nous allons maintenant considérer une grandeur aléatoire Φ (un vecteur par exemple), qui soit fonction aléatoire de t et d'un point de l'espace. Φ constitue un *champ aléatoire*.

Pour simplifier l'exposé, supposons l'espace réduit à une seule dimension : x .

La notion de champ aléatoire nous amène à dire préalablement quelques mots d'une fonction aléatoire dérivable de deux paramètres certains x et t .

$\Phi/x, t$ admet une dérivée par rapport à x et une dérivée par rapport à t , s'il existe des fonctions aléatoires $\dot{\Phi}_x$ et $\dot{\Phi}_t$ telles que :

$$\left(\frac{\Phi/x+k, t - \Phi/x, t}{k} - \dot{\Phi}_x \right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\Phi/x, t+h - \Phi/x, t}{h} - \dot{\Phi}_t \right)^2$$

tendent vers zéro en même temps que k et h . Dans le cas de fonctions stationnaires analytiques, le coefficient de corrélation entre deux

valeurs de Φ se développe ainsi :

$$r(h, k) = 1 - \frac{1}{2\sigma^2} (S^2 k^2 + 2\rho ST hk + T^2 h^2) + \dots$$

σ étant l'écart type de Φ , S et T ceux de $\dot{\Phi}_x$ et $\dot{\Phi}_t$ et ρ le coefficient de corrélation entre $\dot{\Phi}_x$ et $\dot{\Phi}_t$

La forme quadratique entre parenthèses est toujours définie positive car

$$\rho^2 \leq 1$$

Comme cela se passe dans le cas d'une fonction aléatoire d'un seul paramètre, on s'aperçoit que les conditions de cohérence sont satisfaites à la limite par la fonction :

$$r(h, k) = \cos(\omega h - \mu k)$$

et on en déduit que le coefficient de corrélation de la fonction Ana. Stat. la plus générale peut se mettre sous la forme :

$$r(h, k) = \overline{\cos(\Omega h - M k)} = \int \cos(\omega h - \mu k) d_{\omega, \mu} F(\omega, \mu),$$

F étant une fonction de répartition, ce qui étend au cas de plusieurs paramètres la forme que Khintchine a donnée pour un seul paramètre.

La fonction aléatoire la plus simple donnant un coefficient de corrélation de cette forme est l'onde aléatoire (extension bien naturelle de l'oscillateur aléatoire) :

$$\Phi = A \cos(\Omega t - Mx + \Psi)$$

où A est une Cte aléatoire de valeur probable nulle, Ω et M des constantes aléatoires, Ψ une cte aléatoire de distribution uniforme. A et Ψ sont indépendantes entre elles et indépendantes de Ω et de M. Ces dernières peuvent être corrélées.

b) *Connexion cinématique.*

La connexion de la fonction Φ , que nous appellerons *connexion cinématique*, peut être sommairement décrite par le moment rectangle :

$$\overline{\Phi \Phi'} = \int (\varphi, \varphi_1; x, t, x_1, t_1) \varphi \varphi_1 d\varphi d\varphi_1$$

Si Φ était un vecteur de l'espace à trois dimensions et de valeur probable non nulle, on considérerait le *tenseur de connexion cinéma-*

tique, associé à la forme bilinéaire :

$$\overline{(\Phi\Lambda)(\Phi_1\Lambda_1)} - \overline{(\Phi\Lambda)}\overline{(\Phi_1\Lambda_1)} = \sum \overline{A'A'}\lambda\lambda + \sum (\overline{A'B'}\lambda\mu_1 + \overline{A'B}\lambda_1\mu)$$

Λ et Λ_1 sont deux vecteurs certains arbitraires.

$(\Phi\Lambda)$ est un produit scalaire et $A' = A - \overline{A}$ etc., sont les composantes purement aléatoires du vecteur Φ .

Les moyennes : $\overline{\quad}$ sont des *moyennes d'Euler*, c'est-à-dire prises avec la fonction de distribution :

$$(\varphi, \varphi_1; x, t, x_1, t_1)$$

qui jouit des propriétés suivantes :

$$1^\circ) \quad (\varphi; x, t) = (\varphi, \varphi_1; x, t, x_1, t_1) d\varphi_1$$

c'est-à-dire qui est telle que l'intégration par rapport à φ_1 fait non seulement disparaître φ_1 , mais encore le groupe de paramètres certains : (x_1, t_1) .

2°) Lorsque $x_1 \rightarrow x$ et $t_1 \rightarrow t$, $(\varphi, \varphi_1; x, t, x_1, t_1)$ tend vers $(\varphi; x, t)$.

L'intérêt physique de la connexion cinématique est qu'elle nous est donnée — expérimentalement parlant — par la méthode d'observation « en réseau » (celle qu'emploient les services météorologiques par exemple) et qui consiste à placer des instruments enregistreurs ou statistiques, en des points fixes.

Soit par exemple des enregistrements « fins » obtenus en deux points O et O_1 . Le moment rectangle $\overline{AA_1}$ s'estime par la somme des produits des valeurs successives de A en O_1 autour de l'instant t par les valeurs successives de A en O , autour de l'instant t_1 : c'est une « corrélation *différée* ».

Si l'on considère un seul instrument, celui placé en O par exemple, les moyennes \overline{A} ou $\overline{A^2}$ sont celles des valeurs de A (ou de A^2) autour de l'instant t . Elles sont identiques aux moyennes que nous avons déjà désigné par \overline{A} et $\overline{A^2}$. C'est cette identité qu'exprime la propriété signalée en 2°) de la fonction $(\varphi, \varphi_1; x, t, x_1, t_1)$.

La connexion cinématique comprend deux cas particuliers, soit que les points O et O_1 sont confondus, auquel cas nous l'appellerons *connexion locale* (ou connexion dans le temps), soit que les instants t et t_1 sont confondus et elle devient alors la *connexion géométrique* dont le tenseur a déjà été envisagé par de Kármán.

Il importe de remarquer que la donnée de la connexion géométrique et de la connexion locale ne suffisent pas à faire connaître la connexion cinématique, pas plus que la connaissance de ses dérivées par rapport à x et par rapport à t n'équivaut à celle d'une fonction de deux variables (x, t) : il faut encore connaître les dérivées mixtes par rapport à x et à t .

c). *Exemple de l'onde aléatoire.*

La connexion cinématique s'exprime par :

$$\overline{\Phi\Phi_1} = \frac{\overline{A^2}}{2} \overline{\cos(\Omega h - Mk)}$$

Pour $h=0$, on a la connexion géométrique: $\overline{\cos \Omega h}$ et pour $k=0$ la connexion locale: $\overline{\cos Mk}$. On voit bien que la donnée de ces deux connexions (qui ne contient que les lois individuelles de Ω et de M) ne suffit pas à faire connaître la connexion cinématique (qui contient la loi conjuguée de Ω et de M).

Pour $h \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$, $\overline{\Phi\Phi_1}$ tend vers $\frac{\overline{A^2}}{2}$ c'est-à-dire vers $\overline{\Phi^2}$ (qui est aussi $\overline{\Phi^2}$ en raison de la stationnarité).

Un cas particulier intéressant est celui où: $M = \pm \frac{\Omega}{c}$, c étant une constante certaine.

Alors :

$$r(h, k) = \overline{\cos \Omega \left(h \pm \frac{k}{c} \right)}$$

Et l'on voit qu'étant donnés deux points x et x_1 , si l'on choisit les instants t et t_1 de sorte que :

$$x_1 - x = \pm c(t_1 - t),$$

le coefficient de corrélation restera constamment égal à l'unité. Les enregistrements de la grandeur Φ en x et en x_1 coïncident avec un décalage de temps égal à $\pm \left(\frac{x_1 - x}{c} \right)$

Φ est donc une fonction aléatoire de la combinaison $(x \pm ct)$: c'est une grandeur qui se propage par onde.

Le coefficient de corrélation est une fonction de la combinaison $\left(h \pm \frac{k}{c} \right)$: c'est une onde — l'onde de corrélation — qui se propage avec la vitesse c .

Inversement, cherchons la condition pour que le coefficient de corrélation puisse prendre la valeur 1 (en dehors du cas $h=k=0$). Nous savons, d'après les propriétés spéciales des «*r*» (voir lère partie: conditions de cohérence) qu'il faut et suffit pour cela que le terme du second ordre de son développement soit nul (les autres l'étant alors nécessairement), c'est-à-dire ici :

$$\overline{\Omega^2 h^2} - 2\overline{\Omega M} hk + \overline{M^2} k^2 = 0$$

Or $\overline{\Omega M^2} \leq \overline{\Omega^2} \overline{M^2}$; il faut donc d'abord que $\overline{\Omega M^2} = \overline{\Omega^2} \overline{M^2}$, ce qui entraîne que M et Ω soient proportionnels, soit :

$$M = \pm \frac{\Omega}{c}$$

Alors la forme quadratique devient un carré parfait :

$$\overline{\Omega^2} \left(h \pm \frac{k}{c} \right)^2$$

et elle est nulle si

$$\frac{k}{h} = \pm c$$

On peut considérer c comme un nombre aléatoire susceptible de prendre les deux valeurs c et $-c$, avec des probabilités α et $1-\alpha$. On obtient alors ainsi la forme générale suivante, pour le coefficient de corrélation d'un champ admettant une onde de corrélation :

$$r(h, k) = \alpha \cos \Omega \left(h - \frac{k}{c} \right) + (1-\alpha) \cos \Omega \left(h + \frac{k}{c} \right)$$

En particulier pour $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} r(h, k) &= \frac{1}{2} \left[\overline{\cos \Omega \left(h - \frac{k}{c} \right)} + \overline{\cos \Omega \left(h + \frac{k}{c} \right)} \right] = \overline{\cos 2\Omega h \cos 2\frac{\Omega k}{c}} \\ &= 1 - \Omega^2 \left(h^2 + \frac{k^2}{c^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

c). *Connexion stationnaire; connexion homogène; connexion isotrope.*

Plaçons-nous dans le cas général d'un espace à trois dimensions. Le tenseur de connexion cinématique est dit *stationnaire*, s'il n'est fonction des instants t et t_1 que par la différence $(t_1 - t)$.

En ce cas, la *connexion géométrique* (obtenue pour $t=t_1$) est *permanente* et la *connexion locale, stationnaire*.

La *connexion cinématique* est dite *homogène* lorsque son tenseur de connexion n'est fonction des points O et O_1 que par les différences de leurs coordonnées: x_1-x , y_1-y , z_1-z . La même propriété appartient ipso-facto à la *connexion géométrique*. Quant à la *connexion locale* (que l'on obtient pour $O=O_1$), elle est *uniforme* dans tout le fluide.

La *connexion cinématique* est dite *isotrope* quand son tenseur admet la symétrie de révolution autour de OO_1 et reste invariant quand la distance $OO_1=d$ reste constante. On a vu (1^{ère} partie) qu'alors elle s'exprime au moyen de deux fonctions de d seulement: $f(d)$ et $g(d)$ par les formules:

$$a_{ij} = \frac{f(d)-g(d)}{d^2} x_i x_j + g(d) \delta_{ij}$$

$f(d)$ est le coefficient de corrélation entre les composantes des vecteurs Φ et Φ_1 portés par la droite OO_1 et $g(d)$ le coefficient de corrélation entre les composantes normales à OO_1 .

26. Connexion cinématique dans l'espace-temps. Nous venons de voir que dans un espace, et un temps distincts, un coefficient de connexion cinématique *stationnaire* est fonction de (x_1-x) et de (t_1-t) , l'homogénéité n'étant autre chose que la stationnarité dans la dimension « temps ».

Dans un espace-temps *relativiste*, l'espace et le temps ne sont plus séparés et l'on doit appeler *stationnaire* un coefficient de connexion qui ne dépend que de l'invariant:

$$c^2 (t_1-t)^2 - (x_1-x)^2$$

c , étant la vitesse de la lumière.

Alors:

$$r(h, k) = f \left[\left(h^2 - \frac{k^2}{c^2} \right) \right] = 1 - \frac{\Omega^2}{2} \left(h^2 - \frac{k^2}{c^2} \right) + \dots$$

Le fait qu'il est toujours inférieur à l'unité se traduit par la condition: $\frac{k^2}{h^2} \leq c^2$ qui exprime qu'aucun élément corpusculaire ne peut se mouvoir plus vite que la lumière.

Il est facile de former une fonction aléatoire qui possède un coefficient de connexion de cette forme. Nous allons pour cela définir les *fonctions trigonométriques d'un vecteur s*. Les fonctions trigonométriques d'un scalaire (arc du cercle unitaire par exemple) peuvent être considérées comme définies par des séries qui ne sont qu'une suite d'additions et de multiplications algébriques.

Substituons à ces opérations algébriques la somme vectorielle et le produit scalaire. Rien ne sera changé, ces opérations vectorielles jouissant exactement des mêmes propriétés que les opérations algébriques correspondantes (associativité, commutativité etc.). Et il est facile de voir que l'on obtient :

$$\cos s = \cos |s| \quad (\text{fonction paire})^1$$

$$\sin s = \frac{s}{|s|} \quad (\text{fonction impaire})^1$$

Soit maintenant la fonction aléatoire élémentaire :

$$\Phi = \cos \left(\Omega \frac{s}{c} + \Psi \right)$$

Elle admet pour coefficient de connexion :

$$\overline{\Phi \Phi_1} = \cos \left(\Omega \frac{s_1 - s}{c} \right) = \cos \frac{\Omega}{c} |s_1 - s| = \cos \left(\Omega \sqrt{h^2 - \frac{k^2}{c^2}} \right)$$

Prenons alors :

$$\Phi = \int \Phi/\omega \sqrt{dF(\omega)}$$

les Φ/ω étant normalisées (et indépendantes ($\overline{\Phi/\omega_i \Phi/\omega_j} = \delta_{ij}$)) on obtient le coefficient de connexion :

$$r(h, k) = \int \cos \left(\omega \sqrt{h^2 - \frac{k^2}{c^2}} \right) dF(\omega)$$

qui est la forme générale d'un «*r*» stationnaire dans l'espace-temps.

27. Corpuscule aléatoire plongé dans un champ. Nous venons d'étudier la connexion d'un «*champ aléatoire*», c'est à dire d'une grandeur aléatoire Φ attachée en chaque point de l'espace, et en outre

¹ Le lecteur friand de curiosités mathématiques, verra combien simplement on établit la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique à l'aide de ces notions. La formule d'addition des lignes trigonométriques :

$$\cos (s_1 - s) = \cos s \cos s_1 + \sin s \sin s_1$$

donne en effet :

$$\cos |s_1 - s| = \cos |s| \cos |s_1| + \frac{s \cdot s_1}{|s| |s_1|} \sin |s| \sin |s_1|$$

Or $s \cdot s_1 = |s| |s_1| \cos (s, s_1)$ d'où la formule souhaitée :

$$\cos |s_1 - s| = \cos |s| \cos |s_1| + \sin |s| \sin |s_1| \cos (s, s_1)$$

fonction du temps, et nous nous sommes ainsi provisoirement éloignés du point de vue du corpuscule. Nous allons maintenant plonger un corpuscule dans ce champ; pour cela il suffit de remplacer la coordonnée x par une fonction aléatoire X/t . Φ cessera alors d'être une grandeur de champ pour devenir une grandeur attachée à un corpuscule.

Inversement si nous donnons, pour un instant t déterminé, à la variable aléatoire X/t une valeur fixe x , Φ est encore une variable aléatoire, mais une *variable liée* dont le champ de probabilité dépend de la fixation qui a été faite de la coordonnée x . On peut la considérer comme engendrant une fonction aléatoire de deux paramètres: $\Phi/x, t$, c'est à dire un champ aléatoire.

Exemples.

1°) Soit l'onde aléatoire:

$$\Phi = A \cos(\Omega t - Mx + \Psi).$$

Remplaçons le paramètre certain x , par la fonction aléatoire:

$$X = Ut,$$

U étant une constante aléatoire.

On a ainsi «plongé» dans le champ de l'onde aléatoire, un corpuscule — d'ailleurs particulièrement simple: ses éléments se meuvent en ligne droite avec une vitesse constante.

La grandeur Φ attachée à ce corpuscule, devient une fonction aléatoire du temps, qui est l'oscillateur stationnaire:

$$\Phi/t = A \cos \left[\Omega \left(1 - \frac{MU}{\Omega} \right) t + \Psi \right].$$

L'onde aléatoire était entièrement définie par la loi de probabilité conjuguée $(a, \omega, \mu) - \Psi$ étant d'autre part un angle de probabilité uniforme. Pour définir le corpuscule, il faut y ajouter la loi de probabilité liée:

$$(u; a, \omega, \mu)$$

qui se réduit à (u) si U ne dépend pas des autres constantes aléatoires.

2°) Soit le corpuscule stationnaire:

$$X = A \sin(\Omega t - \Psi).$$

Considérons la fonction aléatoire attachée à ce corpuscule — :

$$\Phi = \Lambda \Omega \cos(\Omega t - \Psi)$$

(qui est d'ailleurs la vitesse de ce corpuscule).

Si l'on fixe la valeur de X : $X=x$, on peut éliminer une des constantes aléatoires, par exemple Ψ . Il se trouve que le temps s'élimine en même temps, et l'on voit que Φ devient la fonction de champ permanente :

$$\Phi/x = \pm \Omega \sqrt{\Lambda^2 - x^2}$$

Φ/x est connu par la loi de probabilité (ω, α) .

27. Connexion physique du corpuscule. La connexion cinématique est la connexion décrite du point de vue du *champ* : elle correspond au point de vue d'*Euler* en hydrodynamique. Mais dans les applications, c'est la *connexion physique* qui intervient ; elle correspond au point de vue de *Lagrange*. Soit X/t un corpuscule. Choisissons une position initiale O et un instant initial t . L'élément du corpuscule qui, à cet instant, se trouvait en ce point, se trouve à l'instant postérieur dans la position O_1 , fonction aléatoire de t, t_1 et de O . Soit Φ la grandeur attachée au corpuscule : Φ_1 est aussi une fonction aléatoire de t, t_1 et O .

La *connexion physique* est la connexion entre Φ_1 et la valeur de Φ à l'instant t au point O . Nous la représenterons par le tenseur dérivé de la forme bilinéaire :

$$\overbrace{(\Phi \Lambda)} (\Phi_1 \Lambda_1) - \overbrace{(\Phi \Lambda)} (\Phi_1 \Lambda_1)$$

le symbole de moyenne $\overbrace{(\quad)}$, indiquant qu'il s'agit d'une moyenne de Lagrange.

Les lois de probabilité à introduire dans ces moyennes sont :

$(\varphi, \varphi_1; x)$ lorsqu'interviennent à la fois Φ et Φ_1 , et $(\varphi; x) = (\varphi, \varphi_1; x)(\varphi_1)$, $(\varphi_1; x) = (\varphi, \varphi_1; x)(\varphi)$, lorsque Φ (ou Φ_1) interviennent seuls.

La connexion physique se distingue de la connexion cinématique, par le fait que Φ_1 n'est plus une valeur attachée à un point fixe, mais en un point *aléatoire* dont la position (incertaine) se déduit de O, t et t_1 . On peut dire qu'elle est la connexion entre les valeurs successives de Φ , attachée à un même élément, suivi sur sa trajectoire.

L'importance de la connexion physique vient de ce qu'elle régit les *phénomènes de diffusion*. La diffusion consiste en effet, en ce qu'un petit nuage de fumée, émis au temps t au voisinage de O , se trouve au temps t_1 dispersé à l'intérieur d'un volume fini (point O_1 aléatoire). La

distribution des grains de fumée à l'intérieur de ce volume dépend essentiellement de la connexion entre les vitesses successives prises par les grains de fumée.

Les phénomènes de *viscosité et de conductibilité*, qui sont des transferts de quantité de mouvement et d'énergie, sont également commandés par la connexion physique.

Le tenseur de connexion physique \mathcal{C} se relie bien simplement au tenseur de connexion cinématique, par l'intermédiaire de la *probabilité de passage*.

On a, en effet :

$$(u, u_1; x) = (u, u_1; x, x_1)(x_1; x) dx_1$$

d'où :

$$\mathcal{C} = \int (x_1; x) \Theta dx_1$$

Cette formule est très éloquente : elle sépare en deux parties les propriétés du corpuscule aléatoire :

1° les *propriétés du champ* dans lequel il est plongé qui sont représentées par le tenseur de connexion cinématique Θ .

2° les *propriétés mécaniques* du corpuscule, qu'exprime la probabilité de passage $(x_1; x)$.

Ces considérations entraînent une conséquence fort importante pour l'organisation des recherches expérimentales sur les fluides turbulents. Se fiant à l'analogie fournie par l'hydrodynamique certaine, on pourrait croire qu'il suffit d'explorer un champ fluide par des instruments placés en un série de points fixes (réseau) pour tout connaître de la Mécanique du Fluide. Il n'en est rien : cette recherche expérimentale (statistique) fournira seulement le tenseur Θ , et il est encore nécessaire de connaître la probabilité de passage $(x_1; x)$ pour obtenir le tenseur de connexion physique \mathcal{C} qui régit, lui, toutes les applications.

Pour que la connexion physique soit stationnaire [\mathcal{C} fonction de $(t_1 - t)$] il ne suffit pas que la connexion cinématique le soit ; il faut de plus que la probabilité de passage $(x_2; x_1)$ ne dépende que de $(t_1 - t)$.

28. Relations entre le corpuscule et le champ. *a) Point de vue classique.*

Dans le point de vue classique où l'espace et le temps sont distincts, la connexion du champ lorsqu'elle est stationnaire et homogène est une fonction de $(x_1 - x)$ et de $(t_1 - t)$ séparément, car ces deux grandeurs sont chacune invariants.

Prenons d'abord le cas où il existe une onde de corrélation de vitesse certaine c . Le coefficient de corrélation est alors

$$\overline{\cos \Omega \left(h - \frac{k}{c} \right)}$$

Plongeons dans le champ le corpuscule aléatoire :

$$X = Ut + B$$

U et B étant des constantes aléatoires, indépendantes de Ω ; soit u_0 la valeur probable et S , l'écart type de U .

Nous créons ainsi une fonction aléatoire de t , dont le coefficient de corrélation physique est :

$$r(h) = \overline{\cos \Omega \left(1 - \frac{U}{c} \right) h} = \overline{\cos \Omega' h}$$

Entre la pulsation « physique » Ω' et la pulsation du champ Ω , nous avons entre autres, la relation :

$$\overline{\Omega'^2} = \overline{\Omega^2} \left[\left(1 - \frac{u_0}{c} \right) + \frac{S^2}{c^2} \right]$$

Cette formule peut être considérée comme la généralisation de la formule de Doppler, que l'on retrouve quand Ω et U sont des constantes certaines ($\overline{\Omega^2} = \Omega^2$; $S^2 = 0$).

Dans le cas général, le coefficient de corrélation cinématique se développe ainsi :

$$1 - \frac{1}{2} \left(\overline{\Omega^2} h^2 - 2 \overline{\Omega M} h k + \overline{M^2} k^2 \right) + \dots$$

En multipliant par la probabilité de passage $(x_1 ; x)$ et intégrant par rapport à x_1 , on obtient le coefficient de corrélation physique. Or, u_0 et S étant la valeur probable et l'écart type de la vitesse du corpuscule plongé dans le champ, on a

$$\begin{aligned} \widehat{k} &= u_0 h \\ \widehat{k^2} &= (u_0^2 + S^2) h^2 \end{aligned}$$

d'où

$$r = 1 - \frac{h^2}{2} \left(\overline{\Omega^2} - 2 \overline{\Omega M} u_0 + \overline{M^2} u_0^2 + \overline{M^2} S^2 \right) + \dots$$

et

$$\overline{\Omega'^2} = \overline{\Omega^2} \left[1 - 2 \frac{\overline{\Omega M}}{\overline{\Omega^2}} u_0 + \frac{\overline{M^2}}{\overline{\Omega^2}} (u_0^2 + S^2) \right]$$

b) *Point de vue relativiste.*

Nous avons vu que :

$$r(h, k) = \cos \Omega \sqrt{h^2 - \frac{k^2}{c^2}} = 1 - \frac{\overline{\Omega^2}}{2} \left(h^2 - \frac{k^2}{c^2} \right) + \dots$$

Si l'on plonge un corpuscule, dans le champ précédent, on a entre la pulsation physique et la pulsation cinématique, la relation :

$$\overline{\Omega^2} = \overline{\Omega'^2} \left(1 - \frac{u_0^2 + S^2}{c^2} \right)$$

qui, pour Ω certain ($S=0$) redonne la formule connue de transformation des fréquences pour un système en mouvement relatif (u_0) par rapport au système de référence.

29. L'onde associée au corpuscule. Nous allons tenter de donner une interprétation de l'onde de Louis de Broglie, grâce au schéma aléatoire.

a) *Point de vue classique*

Un champ dans lequel existe une onde de corrélation, de vitesse c , a pour connexion cinématique :

$$\begin{aligned} r(h, k) &= \alpha \cos \Omega \left(h - \frac{k}{c} \right) + (1 - \alpha) \cos \Omega \left(h + \frac{k}{c} \right) = \\ &= 1 - \overline{\Omega^2} \left[h^2 + 2(1 - 2\alpha) \frac{hk}{c} + \frac{k^2}{c^2} \right] + \dots \end{aligned}$$

Au voisinage du point $h=k=0$, les courbes d'égale corrélation sont des ellipses concentriques. Un rayon vecteur de coefficient angulaire $\frac{k}{h} = u_0$, représente la vitesse d'un corpuscule plongé dans le champ.

Si, à partir du point (h, k) on se déplace suivant la direction V conjuguée de u_0 , le coefficient de corrélation reste *stationnaire*, puisqu'on se déplace sur la tangente à l'ellipse qui passe par le point (h, k) . Nous dirons que V représente la vitesse d'une *onde de corrélation*. A chaque vitesse u_0 du corpuscule est associée une vitesse V de l'onde. Ces deux vitesses sont liées par la relation :

$$V = - \frac{c + (1 - 2\alpha) u_0}{\frac{u_0}{c} + 1 - 2\alpha}$$

Dans le cas de $\alpha = \frac{1}{2}$, elle se réduit à :

$$V = -\frac{c^2}{u_0}$$

qui est la formule de Louis de Broglie, sauf que V étant de signe contraire à u_0 , l'onde voyage en *sens inverse* du corpuscule.

b) *Point de vue relativiste*

Cette fois :

$$r(h, k) = f\left(h^2 - \frac{k^2}{c^2}\right)$$

Les courbes d'égalité de corrélation sont, non plus des ellipses, mais des hyperboles.

Pour que r reste stationnaire, il faut se déplacer à la vitesse V telle que :

$$V = \frac{c^2}{u_0}$$

qui est, maintenant, en grandeur et en signe, la relation même de Louis de Broglie.

Nous donnons cette interprétation pour ce qu'elle vaut. Il est en tous cas curieux que le schéma aléatoire suggère directement l'idée d'associer une onde à un corpuscule.

30. Connexion corpusculaire. La connexion physique concernait les éléments du corpuscule qui, à un instant t , se trouvaient en un point déterminé O . Si l'on s'affranchit de cette condition, on obtient la *connexion corpusculaire*, définie par le tenseur $\overline{\mathcal{C}c}$ rattaché à la forme bilinéaire :

$$\overline{(\Phi\Lambda)(\Phi_1\Lambda_1)} - \overline{(\Phi\Lambda)(\Phi_1\Lambda_1)},$$

le symbole de moyenne : $\overline{\quad}$ étant étendu à *tous les éléments* du corpuscule, c'est à dire que la moyenne est prise avec la fonction de distribution :

$$(\varphi, \varphi_1)$$

La relation :

$$(\varphi, \varphi_1) = (\varphi, \varphi_1; x)(x) dx$$

montre que l'on a :

$$\overline{\mathcal{C}c} = \int (x) \overline{\mathcal{C}} dx$$

L'on a également :

$$\overline{\mathcal{C}c} = \int (x, x_1) \Theta dx dx_1$$

La connaissance de la connexion corpusculaire nécessite, en plus de la connexion cinématique Θ , et de la probabilité de passage $(x_1; x)$, la donnée de la probabilité de présence (x) .

31. La conception aléatoire d'une grandeur physique. Un des plus grands bouleversements qu'apportent les Nouvelles Mécaniques dans nos idées traditionnelles, est à coup sûr de cesser de concevoir une grandeur physique comme un *simple nombre* et de la représenter par un *opérateur* ou une *matrice*. Cela semble décourager par avance toute tentative d'explication tant soit peu concrète. Pourtant, nous allons voir que la conception d'une grandeur physique comme *fonction aléatoire* — notion que l'on doit considérer comme naturelle et fondamentale au même titre que celle de fonction au sens habituel du terme — coïncide avec celles de la Mécanique ondulatoire et de la Mécanique quantique. C'est ce qui constitue, à nos yeux, une explication concrète du symbolisme de ces mécaniques.

Sans s'attacher à une rigueur que le sujet mériterait cependant, on peut présenter la question de la manière suivante.

On a vu qu'une fonction aléatoire équivaut à une fonction d'une infinité de variables : la fonction de distribution conjuguée :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

des valeurs de X à n instants successifs — pour tout n —. Cette fonction ne peut être choisie arbitrairement à cause des conditions de *cohérence* dont nous avons parlé dans la première partie. Mais elle peut être *construite* à partir des *lois liées*, par application répétée du théorème des probabilités composées :

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1)(x_2; x_1)(x_3; x_1, x_2) \dots$$

Chacun des facteurs du produit est une loi de probabilité à *une seule variable* et peut être choisie arbitrairement sous la seule condition de vérifier le théorème des probabilités totales ; ainsi :

$$(x_3; x_1, x_2) dx_3 = 1$$

quels que soient x_1 et x_2 .

On peut dire que la suite des fonctions :

$$(x_1), (x_2; x_1), (x_3; x_1, x_2) \dots$$

équivaut à une fonction aléatoire.

Considérons maintenant les valeurs successives prises par X , au cours d'une épreuve faite au *voisinage* du temps t , c'est à dire à des instants :

$$t + \delta t_1, t + \delta t_2, \dots$$

appartenant à l'intervalle $(t, t + \Delta t)$, soit

$$x_1^*, x_2^*, \dots,$$

comme les composantes d'un vecteur dans l'espace de *Hilbert*. On peut le faire, car la série :

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_i^*)^2$$

représente une «*estimation*» de la moyenne quadratique $\overline{X^2}(t)$ et converge par conséquent (sauf sur un ensemble de mesure nulle). Lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, $\delta t_1, \delta t_2, \dots$ tendent aussi vers zéro et les lois de probabilité liées tendent vers des limites qui ne dépendent plus que de l'instant t :

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, t) \\ &F_1(x_1, x_2, t) \\ &\dots \end{aligned}$$

Il importe ici de remarquer que dans ce que devient une fonction aléatoire à l'instant t , il y a *plus qu'un simple nombre aléatoire*. Il y a aussi la *limite vers laquelle tend la connexion* (figurée par exemple, dans le cas d'une fonction indéfiniment dérivable par la loi de probabilité conjuguée de la fonction et de toutes ses dérivées).

Le produit scalaire de deux vecteurs X et Y sera :

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_i^* y_i^*)$$

estimation du moment rectangle : $\overline{X(t)Y(t)}$.

A la notion de vecteurs *orthogonaux* correspondra donc celle de vecteurs *non corrélés*.

Remarquons maintenant que la suite des fonctions F_1, F_2, \dots représente une *application* de l'espace de *Hilbert* sur lui-même. On peut d'ailleurs donner à cette transformation une forme canonique remarquable.

Posons :

$$\begin{aligned} y_1 &= \int_{-\infty}^{x_1} (\xi) d\xi - \frac{1}{2} \\ y_2 &= \int_{-\infty}^{x_2} (\xi; x_1) d\xi - \frac{1}{2} \\ &\dots \end{aligned}$$

On a :

$$dy_1 dy_2 \dots = (x_1)(x_2; x_1) \dots dx_1 dx_2 \dots = (x_1, x_2 \dots) dx_1 dx_2 \dots$$

Ainsi, le jacobien de la transformation est la loi de probabilité conjugée des valeurs successives de X et, à ce titre il est positif ou nul (cette dernière éventualité ne se produisant pas, au moins à l'intérieur d'un certain domaine). La transformation admet par suite un inverse.

Les y sont des nombres aléatoires, compris entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, de valeur probable nulle et *non corrélés* entre eux. Donc, les vecteurs $(y_1, 0, 0 \dots)$, $(0, y_2, 0 \dots)$ forment une *base orthogonale* de l'espace de *Hilbert*.

Nous admettrons que les propriétés précédentes restent vraies quand on passe à la limite ($\Delta t \rightarrow 0$), les y tendant alors vers des z et la transformation qui fait passer des x aux z , ne dépendant plus que de l'instant t .

Ainsi, on peut faire correspondre à chaque instant t , à une fonction aléatoire, une transformation ponctuelle du domaine de l'espace de *Hilbert* dont les points ont des coordonnées cartésiennes comprises entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. Chacune de ces transformations définit une fonction aléatoire à l'instant t .

Or, l'espace de Hilbert étant *isomorphe* à l'espace fonctionnel des fonctions de carré sommable, une application de cet espace sur lui-même équivaut à un *opérateur* A transformant une fonction f en une fonction g :

$$g = A(f).$$

C'est précisément le point de vue de la Mécanique ondulatoire selon lequel une grandeur physique est un opérateur et non plus un simple nombre.

Il est certain que les considérations précédentes mériteraient d'être développées et améliorées dans le sens de la rigueur (limites, convergence, etc.). Telles qu'elles sont cependant, elles permettent d'espérer qu'un jour, les Nouvelles Mécaniques pourront être exposées comme des Mécaniques aléatoires particulières, ce qui contribuera beaucoup à leur conférer un caractère concret.

IX — LA DIFFUSION

33. La diffusion en général. La diffusion est un phénomène banal et pourtant essentiel, qui se produit au sein de tous les fluides naturels; cependant l'hydrodynamique classique n'en tient pas compte (notion

trop rigide de «surface fluide»). La théorie cinétique, qui est en somme une Mécanique aléatoire basée sur un schéma particulier, corrige cette imperfection et donne une expression de la diffusion moléculaire. Mais les fluides naturels, dont le mouvement est toujours turbulent, diffusent à des échelles bien plus grandes que l'échelle moléculaire et les phénomènes de diffusion y prennent une importance énorme. Nous allons, dans ce chapitre, étudier la diffusion dans un corpuscule aléatoire, dérivable en moyenne quadratique; les résultats obtenus seront indépendants de l'échelle des phénomènes et applicables par conséquent aux fluides naturels.

Soit O_1 un point fixé, à l'intérieur d'un fluide. A l'instant t_1 , s'y trouve une microparticule. La méthode de Lagrange consiste à suivre cette microparticule dans son mouvement. L'hydrodynamique classique admet qu'au temps t_2 , cette microparticule occupe la position O_2 , telle que :

$$x_2 = x_2(x_1, t_1, t_2)$$

x_2 étant une fonction analytique continue et dérivable des paramètres x_1, t_1, t_2 , qui s'inverse d'une manière univoque, de sorte que l'on a également :

$$x_1 = x_1(x_2, t_1, t_2).$$

Dans un milieu aléatoire, et non plus continu, les coordonnées de O_2 sont des fonctions aléatoires, que nous supposerons généralement dérivables en moyenne quadratique, des coordonnées de O_1 et des instants t_1 et t_2 :

$$X_2 = X_2/x_1, t_1, t_2$$

L'inversion de cette fonction n'est évidemment pas possible d'une manière univoque; tout ce que l'on peut dire, c'est que X_1 est également une fonction aléatoire que nous admettrons être aussi dérivable :

$$X_1 = X_1/x_2, t_1, t_2.$$

Au temps t , la microparticule qui, à l'instant t_1 se trouvait en O_1 , peut se trouver *n'importe où dans le fluide* et, *en chaque point*, il existe une certaine probabilité ($x_2; x_1$) pour que cette microparticule y soit située.

Il résulte de ce schéma mathématique que si l'on considère à l'instant t_1 , une particule entourant le point O_1 , comme cette particule se compose d'un grand nombre de *microparticules* dont le sort est aléatoire, la particule aura, au temps t_2 , répandu dans le fluide toutes les microparticules qui la constituaient et, vu le grand nombre de celles-ci,

elles seront distribuées selon des fréquences conformes à la probabilité de passage $(x_2; x_1)$.

Le problème de la diffusion va consister essentiellement en l'étude de la fonction aléatoire :

$$X_2/x_1, t_1, t_2$$

c'est-à-dire d'un fragment du corpuscule aléatoire X , équivalent au fluide, *sélectionné* par le fait qu'à un instant donné, ce fragment occupait une position ponctuelle déterminée.

Une image physique d'un pareil « sous-corpuscule » est le nuage de fumée émis par une cheminée d'usine au sein de l'atmosphère.

Le sous-corpuscule X_2 peut avoir des propriétés fort différentes du corpuscule. Soit par exemple l'oscillateur stationnaire à fréquence certaine :

$$X = A \sin(\omega t - \Phi).$$

La moyenne quadratique $\overline{X^2}$ de X , est constante. Ce corpuscule ne manifeste donc, macroscopiquement, aucune propriété périodique. Mais portons notre attention sur le sous-corpuscule X_2 formé par les éléments qui au temps $t=0$, avaient la coordonnée $X=0$. Ce sous-corpuscule peut être matériellement réalisé en disposant un écran percé d'une ouverture et en démasquant cette ouverture pendant un temps très court; ce sera par exemple une bouffée de la fumée émise par une cheminée. Pour le sous-corpuscule X_2 , Φ cesse d'être un angle aléatoire de probabilité uniforme; il devient l'angle certain $\Phi=0$, de sorte que :

$$X_2 = A \sin \omega t$$

et

$$\overline{X_2^2} = \overline{A^2 \sin^2 \omega t} = \frac{\overline{A^2}}{2} (1 - \cos 2\omega t).$$

Ainsi la dispersion du sous-corpuscule X_2 , présente une variation périodique. En particulier, X_2 redevient périodiquement ponctuel. On peut dire que ces phénomènes périodiques, s'ils étaient contenus en puissance dans le corpuscule X (dans sa connexion, qui est périodique), n'avaient pas l'occasion de se manifester: ils ont été en quelque sorte « libérés » par la sélection qu'une expérience a opérée sur les éléments de X .

Un autre genre de diffusion nous est donné par le *corpuscule aléatoire libre*.

$$X = At + B.$$

Considérons les éléments qui, au temps $t=0$, ont l'abscisse $X=0$. Pour ces éléments, B cesse d'être un nombre aléatoire et devient le nombre certain zéro. Comme tout à l'heure, le sous-corpuscule X_2 ainsi défini peut être matériellement isolé par un dispositif convenable. L'on a :

$$\widehat{X}_2^2 = \overline{A^2} t^2$$

$$\sigma_2^2 = \widehat{X_2^2} = \overbrace{(X_2 - \overline{X}_2)^2} = \overline{A^2} t^2.$$

Ainsi l'écart type de la diffusion est proportionnel au temps. Le cas du corpuscule libre est évidemment aussi celui d'un corpuscule (dérivable) quelconque pour un temps infiniment petit.

34. Forme générale du problème de la diffusion. Ce problème est, nous l'avons dit, l'étude de la fonction aléatoire :

$$X_2/x_1, t_1, t_2$$

c'est à dire le calcul de ses moments principaux :

$$\widehat{X}_2, \widehat{X}_2^2 \text{ et } \widehat{X}_2 X_3.$$

Les moyennes de Lagrange donnent une solution du problème sous forme d'un développement de Taylor faisant intervenir les moments liés, pour un point donné, de toutes les dérivées en moyenne quadratique de X . Cette solution est évidemment toute théorique et n'offre d'intérêt pratique que pour des intervalles de temps très petits. Aussi allons nous poser maintenant le problème en termes finis.

Les moments \widehat{X}_2 et \widehat{X}_2^2 se calculent au moyen de la probabilité de passage $(x_2; x_1)$, par les formules :

$$\widehat{X}_2 = \int x_2 \cdot (x_2; x_1, t_1, t_2) dx_2$$

$$\widehat{X}_2^2 = \int x_2^2 \cdot (x_2; x_1, t_1, t_2) dx_2$$

Lorsque la probabilité de passage ne dépend que des différences $(t_2 - t_1)$ et $(x_2 - x_1)$, ces moments sont indépendants du point initial x_1 et ne sont fonctions que de l'intervalle de temps $(t_2 - t_1)$. La diffusion est alors *homogène et stationnaire*.

Pour obtenir le moment rectangle $\widehat{X}_2 X_3$, il est nécessaire de faire intervenir une loi de probabilité *en trois points* :

$$\widehat{X}_2 X_3 = \int x_2 x_3 \cdot (x_2, x_3; x_1, t_1, t_2, t_3) dx_2 dx_3.$$

Ces notations sont surtout formelles. Pour faire un pas de plus, souvenons nous que, dans les fluides, l'expérience atteint non la coordonnée du corpuscule, mais sa vitesse et que celle-ci est la dérivée en moyenne quadratique de celle-là. Le problème de la diffusion se pose ainsi comme un problème d'intégration aléatoire, la fonction X_2 s'exprimant par :

$$X_2 = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} U/s \, ds .$$

La valeur probable de X_2 est :

$$\widehat{X}_2 = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} ds \int u \cdot (u ; x_1, t_1, s) \, du .$$

Son calcul nécessite la connaissance d'une loi de probabilité en deux points (t_1, s) . Un cas particulier intéressant est celui où cette loi ne dépend que de la différence $(s - t_1)$ et ne contient pas la coordonnée initiale x_1 . Alors le chemin $\widehat{X}_2 - x_1$, parcouru par le point moyen ne dépend pas du point de départ ni de l'instant initial, mais seulement de l'intervalle de temps $(t_2 - t_1)$.

Voyons quelles restrictions entraînent nos hypothèses. Lorsque $(u ; x_1)$ ne dépend pas de x_1 , il en est de même en particulier de $(u_1 ; x_1)$, fonction de distribution des vitesses en un point : celle-ci est donc *uniforme* dans tout le fluide. De plus, comme $(u_1 ; x_1)$ ne contient pas t_1 , la distribution des vitesses est *permanente*. Par contre il n'y a aucune restriction sur la loi de densité (x_1) . Ainsi nous avons affaire à un fluide sans mouvement d'ensemble, avec un module uniforme et constant de la vitesse d'agitation, mais pouvant avoir une densité différenciée, comme celle qui résulte de la présence d'un champ de forces. Une atmosphère *isotherme* en équilibre vertical sous l'action de la gravité, donne un modèle d'un tel fluide.

Par contre les hypothèses précédentes ne conviennent certainement pas, à l'échelle de la *turbulence*, pour représenter convenablement la diffusion dans les couches basses de l'atmosphère où la vitesse d'ensemble et le module de la vitesse turbulente sont systématiquement différenciés. Ceci montre la difficulté qu'on doit rencontrer dans l'étude théorique de phénomènes en apparence aussi simples que la diffusion de fumées ou de fumigènes dans les couches d'air voisines du sol.

Passons maintenant au calcul du moment rectangle $\widehat{X}_2 \widehat{X}_3$, qui contient comme cas particulier le moment quadratique \widehat{X}_2^2 . On a :

$$\widehat{(X_2 - x_1)(X_3 - x_1)} = \int u \zeta \cdot (u, \zeta ; x_1, t_1, s, t) \, ds \, dt \, du \, d\zeta .$$

L'intégrale (double) par rapport aux variables s et t , est étendue au rectangle ayant pour sommets :

$$(t_1, t_1), (t_2, t_1), (t_2, t_3), (t_1, t_3).$$

Il intervient une loi liée en *trois points*, et ceci reste vrai pour le moment quadratique $\widehat{(X_2 - x_1)^2}$ qui se calcule exactement par la même formule, sauf que l'aire d'intégration a cette fois pour sommets :

$$(t_1, t_1), (t_2, t_1), (t_2, t_2), (t_1, t_2)$$

(l'une des diagonales du rectangle est la bissectrice des axes de coordonnées).

En dérivant la formule précédente, on obtient la relation :

$$\widehat{U_2 U_3} = \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_3} \widehat{X_2 X_3}$$

qui étend, aux moyennes de Lagrange, une formule que nous connaissons déjà pour les moyennes corpusculaires.

35. Diffusion stationnaire et homogène. Intéressons nous plus spécialement au cas où une loi en *deux points* serait suffisante pour le calcul du moment rectangle. Il faut pour cela que la loi $(u, \xi; x_1)$ ne contienne pas x_1 . Il en résulte que :

$$(u; x_1) = (u, \xi; x_1) d\xi$$

ne contient pas x_1 non plus.

Comme tout à l'heure, la fonction de distribution des vitesses en un point : $(u; x_1)$ est *uniforme* dans le fluide. Ajoutons encore l'hypothèse que la loi $(u, \xi; x_1)$ ne dépend des instants que par les différences $(s - t_1)$ et $(t - t_1)$. Le moment rectangle ne dépendra alors que des différences $(t_2 - t_1)$ et $(t_3 - t_1)$. Cette nouvelle hypothèse entraîne comme conséquence que la loi $(u; x_1)$ qui déjà ne dépendait pas de x_1 , ne dépend pas non plus de t_1 .

Nous qualifierons la diffusion dans ce cas particulier de *stationnaire* et d'*homogène*. Insistons sur le fait que la loi de densité reste absolument quelconque.

Ce cas comporte d'importantes simplifications. On voit, en effet, qu'en général le problème de la diffusion est ramené au problème de la *connexion physique* de la vitesse, c'est-à-dire à l'étude des propriétés du moment :

$$\widehat{U_s U_t}.$$

Or, quand la connexion physique ne dépend pas du point initial x_s , elle est identique à la connexion corpusculaire, car :

$$\overline{U_s U_t} = \int (x_s) \widehat{U_s U_t} dx_s = \widehat{U_s U_t}$$

puisqu'on peut faire sortir cette dernière quantité—indépendante de x_s —du signe d'intégration.

La connexion cinématique revêt aussi une forme particulière. Considérons en effet, la relation :

$$\widehat{U_s U_t} = \int (x_t ; x_s) \overline{U_s U_t} dx_t \quad s \leq t.$$

La diffusion étant stationnaire et homogène, le premier membre est fonction de $(t-s)$; $(x_t ; x_s)$ est fonction de $(t-s)$ et de $(x_s - x_t)$. Il en est donc de même par conséquent de $\widehat{U_s U_t}$: la connexion cinématique est, elle aussi, stationnaire et homogène.

Désignons par S^2 le carré de l'écart type des vitesses d'agitation : $\overline{U^2}$, qui en pareil cas est aussi bien égal à la moyenne corpusculaire $\overline{U^2}$, qu'à la moyenne de Lagrange $\widehat{U^2}$.

Soit $r(t-s)$, le coefficient de corrélation physique entre les vitesses U/t et U/s d'une microparticule aux instants t et s .

L'on a :

$$\widehat{X^2} = S^2 \iint r(t-s) ds dt$$

l'intégrale étant étendue au carré $(0, 0)$, $(t, 0)$, $(0, t)$, (t, t) , si l'on prend zéro comme instant initial. On trouve :

$$\widehat{X^2} = 2 S^2 \int_0^t (t-s) r(s) ds.$$

Nous étudierons tout à l'heure le comportement de cette intégrale. Auparavant, faisons la remarque que s'il s'agit d'un problème théorique, c'est-à-dire que si l'on connaît a priori la Mécanique du corpuscule, on a sans peine $r(s)$ qui est à la fois le coefficient de corrélation physique et le coefficient de corrélation corpusculaire.

Au contraire, s'il s'agit de l'étude expérimentale d'un fluide turbulent au point de vue d'Euler (observations en des points fixes), l'expérience atteint seulement le coefficient de corrélation cinématique ρ . Pour remonter de là au coefficient de corrélation physique, il est nécessaire de connaître la probabilité de passage $(x_2 ; x_1)$, qui est d'ailleurs ici de la forme $P(\xi, \tau)$ où ξ est la différence des deux coordonnées et s la différence des deux époques. Il semble donc qu'on ne soit que très

médiocrement avancé, puisqu'aussi bien la connaissance de $(x_2; x_1)$ nous eût fourni aussitôt $\overline{X^2}$ par une moyenne de Lagrange.

Mais on peut dire d'une part, que des expériences directes sur la diffusion, combinées avec l'exploration du fluide au point de vue d'Euler, nous permettent inversement, de déterminer $(x_2; x_1)$ c'est-à-dire en somme la Mécanique du corpuscule. Et d'autre part, on peut obtenir une valeur approchée de la corrélation physique à partir de la corrélation cinématique, sans connaître exactement $(x_2; x_1)$.

Nous avons, en effet,

$$r(\tau) = \int \rho(\xi, \tau) P(\xi, \tau) d\xi.$$

Posons $\xi = u\tau$; il vient:

$$r(\tau) = \int \rho(u\tau, \tau) P(u\tau, \tau) \tau du.$$

Or $P(u\tau, \tau) \tau du$, tend vers $(u) du$, lorsque $\tau \rightarrow 0$, (u) étant la fonction de distribution des vitesses. Une première approximation consistera à remplacer P par cette limite, ce qui donne:

$$r(\tau) = \overline{\rho(\tau u, \tau)}.$$

Consentant encore une approximation, on peut réduire u à sa valeur probable u_0 et l'on a la formule:

$$r(\tau) = \overline{\rho(\tau u_0, \tau)},$$

qui donne des résultats suffisamment approchés, dans la mesure où $S^2 = \overline{U^2}$ est faible devant u_0 . C'est le cas des souffleries aéro-dynamiques dans lesquelles la vitesse de la veine (u_0) est de l'ordre de $10^m/\text{sec}$ et S de l'ordre de $0,1^m/\text{sec}$.

En admettant l'existence d'une onde de corrélation de vitesse c , on a:

$$r(\tau) = \overline{\cos \Omega \left(1 - \frac{u_0}{c} \right) \tau},$$

ce qui donne pour la moyenne quadratique de la pulsation physique:

$$\overline{\Omega'^2} = \overline{\Omega^2} \left(1 - \frac{u_0}{c} \right)^2.$$

Or, dans les études de la turbulence en soufflerie, faites par divers auteurs, on étudie la connexion *géométrique*, c'est-à-dire la connexion entre les vitesses, au même instant, en deux points séparés par la dis-

tance x , comptée dans l'axe de la veine. C'est donc :

$$\rho(x, 0) = \cos \Omega \frac{x}{c}$$

et l'on admet comme évident que la connexion physique s'obtient en substituant τu_0 à x , ce qui donne :

$$r_1(\tau) = \cos \Omega \frac{u_0}{c} \tau.$$

On voit bien qu'en général r_1 n'est pas égal au véritable coefficient de corrélation physique r . Cela n'arriverait que pour $c = 2u_0$, mais il n'y a évidemment aucune raison pour cela.

La comparaison des mesures expérimentales directes de la dispersion et du coefficient de connexion géométrique permettrait, au contraire, de déterminer la vitesse c de l'onde de corrélation.

36. Coefficient de diffusion. Dans la théorie du *mouvement brownien*, le rapport :

$$\chi = \frac{\overline{X^2}}{2t}$$

est une constante indépendante de t , que l'on appelle le coefficient de diffusion.

Mais en général, le précédent rapport est une fonction de t . Il arrive que cette fonction tende vers une limite finie lorsque $t \rightarrow \infty$ et même que, pratiquement, cette limite soit déjà presque atteinte pour des valeurs de t relativement faibles. On pourra encore dire qu'il existe en pareil cas un coefficient de diffusion.

Représentons $r(\tau)$ par l'intégrale de Fourier :

$$r(\tau) = \int_0^{\infty} \cos \omega t d\Phi(\omega).$$

Nous traitons donc seulement des fonctions aléatoires analytiques stationnaires.

χ a pour expression :

$$\chi = \frac{2S^2}{t} \int_0^t \frac{\sin^2 \frac{\omega t}{2}}{\omega^2} d\Phi(\omega).$$

D'après la théorie des *intégrales de Dirichlet*, la valeur asymptotique de $\chi(t \rightarrow \infty)$ dépend, à cause du dénominateur ω^2 du comportement de $\Phi(\omega)$ à l'origine.

$\Phi(\omega)$ est, rappelons-le, une fonction non négative, non décroissante, nulle pour $\omega=0$, égale à 1 pour ω infini. Elle peut présenter une discontinuité dès l'origine, de sorte que $\Phi(+0)$ ne soit pas nul. Par exemple :

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= \alpha_0 \quad \text{pour } 0 < \omega \leq \omega_1 \\ \Phi(\omega) &= 1 \quad \text{pour } \omega_1 < \omega\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$r(\tau) = \alpha_0 + (1 - \alpha_0) \cos \omega_1 \tau,$$

qui est bien le coefficient de corrélation d'une fonction ana-stat.

Trois cas sont donc à envisager :

a) $\Phi(+0) = \alpha_0 > 0$.

On démontre alors que :

$$\chi = S^2 t [\alpha_0 + \psi(t)]$$

$\psi(t)$, étant une fonction qui tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$, par valeurs positives.

χ augmente donc indéfiniment : il n'y a pas de coefficient de diffusion.

Un exemple banal de ce cas est le corpuscule aléatoire libre, pour lequel :

$$\widehat{X^2} = S^2 t^2$$

donc

$$\chi = \frac{S^2}{2} t.$$

Il correspond à :

$$\alpha_0 = 1.$$

b) $\Phi(+0) = 0$.

On démontre que χ a pour partie principale : Δt^m avec $m < 1$. I peut donc arriver que :

χ tende vers l'infini (mais moins vite que t).

χ tende vers zéro.

χ tende vers une limite finie.

Un cas particulier intéressant est celui où $\Phi(\omega)$ est continue et dérivable (spectre continu).

Alors χ a pour expression asymptotique :

$$\chi = S^2 \left[\int_0^t r(s) ds + \frac{1}{t} \int_0^t s r(s) ds \right].$$

On aura donc un coefficient de diffusion si :

$$\int_0^{\infty} r(s) ds \quad \text{a un sens}$$

et si $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t s r(s) ds$ existe.

Le crochet qui multiplie S^2 a les dimensions d'un temps et peut être considéré comme une sorte de « temps de libre parcours ».

c) $\Phi(\omega) = 0$ tant que $\omega < \alpha$.

χ a alors toujours une limite pour $t \rightarrow \infty$; il existe toujours un coefficient de diffusion.

Donnons quelques exemples de *spectres* et des coefficients de diffusion correspondants.

1°) Une seule raie de pulsation ω_0 .

C'est le cas de l'oscillateur à fréquence certaine :

$$X = A \cos(\omega_0 t + \Phi)$$

qui admet pour coefficient de corrélation :

$$r(\tau) = \cos \omega_0 \tau,$$

ce qui correspond à :

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= 0 & \text{si } \omega < \omega_0 \\ \Phi(\omega) &= 1 & \text{si } \omega > \omega_0. \end{aligned}$$

Le coefficient de diffusion est :

$$\chi(t) = \frac{2 S^2}{t} \frac{\sin^2 \frac{\omega_0 t}{2}}{\omega_0^2}.$$

La limite pour $t \rightarrow \infty$ est nulle.

Imaginons de la fumée émise en un point, au sein du fluide représenté par un tel corpuscule et supposons S petit devant la vitesse d'ensemble u_0 , de manière que les phénomènes qui se produisent dans le temps, se retrouvent dans l'espace par la transformation $x = u_0 t$. La diffusion a lieu suivant deux sinusoïdes, les éléments diffusés se rassemblant périodiquement en des noeuds. Si l'on ajoute à cette diffusion périodique une diffusion générale « en paraboloïde », on obtient un aspect fréquemment réalisé dans les fumées émises par les cheminées d'usine : émission par « bouffées ».

2°) Une bande limitée

$$\Phi(\omega) = \frac{\omega}{\alpha} \quad \text{si } \omega \leq \alpha$$

$$\Phi(\omega) = 1 \quad \text{si } \omega > \alpha.$$

On a :

$$r(\tau) = \frac{\sin \alpha \tau}{\alpha \tau}$$

et

$$\chi(t) = \frac{S^2}{\alpha} \int_0^t \frac{\sin \alpha s}{s} ds - \frac{S^2}{\alpha^2} \frac{1 - \cos \alpha t}{t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) = \frac{\pi S^2}{2\alpha}.$$

3°) Spectre continu (et Φ dérivable)

a) $\Phi'(\omega) = a e^{-a\omega}.$

On a :

$$r(\tau) = \frac{a^2}{a^2 + t^2}$$

$$\chi(t) = a S^2 \operatorname{arctg} \frac{t}{a} - \frac{a^2 S}{t} \log \sqrt{1 + \frac{t^2}{a^2}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) = \frac{\pi S^2 a}{2}.$$

b) $\Phi'(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\theta^2}{1 + \theta^2 \omega^2}.$

C'est le cas complémentaire du précédent : $r(\tau) = e^{-\frac{\tau}{\theta}}$

$$\chi(t) = S^2 \theta - \frac{S^2 \theta}{t} (1 - e^{-\frac{\tau}{\theta}})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) = S^2 \theta.$$

c) $\Phi'(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \theta e^{-\frac{\theta^2 \omega^2}{2}}.$

On a :

$$r(\tau) = e^{-\frac{\tau^2}{2\theta^2}}$$

$$\chi(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} S^2 \theta - \frac{S^2 \theta}{t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) = S^2 \theta \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

La courbe $\chi(t)$ se rapproche très rapidement de son asymptote, de sorte que la valeur limite du coefficient de diffusion est pratiquement atteinte au bout d'un temps très court.

37. Le schéma des libres parcours. Ce schéma qui joue un rôle fondamental en théorie cinétique peut se décrire ainsi :

Des points matériels quelconques (Molécules, granules browniens, bulles de savon équilibrées soumises à la turbulence d'une soufflerie¹ etc.) décrivent à vitesse constante des trajets rectilignes (libres parcours), troublés accidentellement par de brusques déviations (les chocs) causant une discontinuité de la vitesse. Les vitesses avant et après le choc, sont supposées *indépendantes en probabilité*.

Nous désignons par :

$$\Phi(\theta)$$

la probabilité (I) pour que la durée d'un libre parcours soit *inférieure* ou égale à θ , qui est aussi celle pour qu'un choc au moins survienne pendant la durée θ .

On a fait implicitement l'hypothèse de *l'homogénéité du temps et de l'espace*, c'est-à-dire que l'on admet que Φ ne dépend pas de l'instant ni du lieu où débute le libre parcours.

$\Phi(\theta)$ est une «fonction de répartition» ou «fonction des probabilités totales», jouissant par conséquent des propriétés suivantes :

1°) $\Phi(\theta)$ n'est jamais négative ni décroissante.

2°) $\Phi(0)=0$, $\Phi(\infty)=1$.

De la connaissance de $\Phi(\theta)$, on déduit un certain nombre de probabilités intéressantes dont nous allons parler.

(II) Probabilité pour que la durée d'un libre parcours soit *supérieure* ou égale à θ , ou encore qu'il n'y ait pas de choc pendant la durée θ ; c'est :

$$\psi(\theta)=1-\Phi(\theta).$$

(III) Probabilité pour que la durée d'un libre parcours soit *comprise* entre θ_1 et θ_2 ($\theta_2 > \theta_1$), qui est aussi celle pour qu'il y ait au moins un choc entre les instants t_1 et t_2 , mais pas avant t_1 .

Pour la calculer, nous appliquerons le théorème des probabilités

¹ M. Kampé de Fériet, Directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille a imaginé d'étudier la turbulence d'une soufflerie par la diffusion de bulles de savon. Il a, avant la guerre, exécuté de très nombreuses expériences dans la grande soufflerie de Lille.

totales. L'évènement contraire de l'évènement considéré est que la durée de libre parcours soit :

$$\begin{aligned} a) & \leq \theta_1 \\ b) & \geq \theta_2. \end{aligned}$$

Ces deux circonstances s'excluent mutuellement, donc la probabilité de l'évènement contraire est d'après (II) et (III) :

$$\Phi(\theta_1) + 1 - \Phi(\theta_2).$$

Par suite, celle de l'évènement cherché est :

$$1 - [\Phi(\theta_1) + 1 - \Phi(\theta_2)] = \Phi(\theta_2) - \Phi(\theta_1).$$

(IV) Probabilité pour qu'une molécule ayant déjà accompli un libre parcours de durée θ_1 , accomplisse un libre parcours total de durée inférieure à θ_2 ($\theta_2 > \theta_1$). C'est aussi la probabilité pour que la molécule n'ayant pas subi de choc pendant la durée θ_1 , en éprouve *au moins un* entre θ_1 et θ_2 .

Elle se déduit du théorème des probabilités composées.

L'évènement envisagé dans la probabilité (III) résulte des deux suivants :

a) un libre parcours de durée supérieure ou égale à θ_1 , a déjà été accompli : probabilité $1 - \Phi(\theta_1)$.

b) le libre parcours suivant a une durée inférieure à $(\theta_2 - \theta_1)$; c'est la probabilité de cet évènement que nous cherchons et nous la désignons par :

$$P(\theta_1, \theta_2 - \theta_1).$$

On a donc :

$$\Phi(\theta_2) - \Phi(\theta_1) = [1 - \Phi(\theta_1)] P(\theta_1, \theta_2 - \theta_1)$$

d'où

$$P(\theta_1, \theta_2 - \theta_1) = \frac{\Phi(\theta_2) - \Phi(\theta_1)}{1 - \Phi(\theta_1)}.$$

(V) Probabilité pour qu'une molécule ayant accompli un *libre parcours nul* accomplisse ensuite un libre parcours de durée θ , c'est-à-dire pour qu'une molécule qui vient de recevoir un choc, en éprouve *au moins un autre* pendant la durée θ . C'est :

$$P(0, \theta) = \Phi(\theta).$$

Ainsi, lorsqu'une molécule vient d'être choquée, la probabilité liée d'un libre parcours inférieur à une durée donnée est égale à la probabilité a priori.

Lorsque $(\theta_2 - \theta_1)$ devient infiniment petit, et supposant $\Phi(\theta)$ dérivable, les probabilités revêtent les expressions :

(III)

$$\Phi'(\theta) d\theta$$

(IV)

$$P(\theta, d\theta) = \frac{\Phi'(\theta) d\theta}{1 - \Phi(\theta)}$$

(V)

$$P(0, d\theta) = \Phi(d\theta) = \begin{cases} \Phi'(0) d\theta & \text{si } \Phi'(0) \neq 0 \\ \frac{1}{2} \Phi''(0) d\theta^2 & \text{si } \Phi'(0) = 0 \text{ et } \Phi''(0) \neq 0. \end{cases}$$

On remarquera en outre que la probabilité pour qu'il se produise *un choc* dans l'ensemble du « gaz » est égale à la probabilité pour qu'une molécule subisse *au moins un choc*, donc à $\Phi(\theta)$.

38. La connexion dans le schéma des libres parcours. Pour un intervalle infiniment petit, le nombre des chocs est proportionnel à $\Phi(d\theta)$, donc de l'ordre de $d\theta$ si $\Phi'(0) \neq 0$, et de l'ordre de $d\theta^2$ si $\Phi'(0) = 0$ mais $\Phi''(0) \neq 0$.

L'intérêt que présente le schéma des libres parcours est qu'il permet grâce à la fonction $\Phi(\theta)$, de construire la *connexion* du gaz. La liaison entre $\Phi(\theta)$ et le coefficient de connexion (*corpusculaire*) entre les vitesses d'une molécule aux instants t et $t+h$, s'établit en effet, avec une grande simplicité par le raisonnement suivant :

a) les molécules dont la durée de libre parcours est *inférieure* à $|h|$ n'apportent aucune contribution à la moyenne $\overline{U_1 U_2}$, car U_1 et U_2 sont par hypothèse indépendants.

b) les molécules dont la durée de libre parcours est *supérieure* à $|h|$, qui sont en nombre relatif :

$$1 - \Phi(|h|)$$

apportent la contribution :

$$\overline{U^2} [1 - \Phi(|h|)]$$

car pour elles : $U_1 = U_2$.

Finalement :

$$r(h) = 1 - \Phi(|h|) = \Psi(|h|).$$

Le raisonnement n'est pas altéré si, au lieu de considérer toutes les molécules du gaz, on l'applique à celles qui à un instant donné se trouvaient en un point donné ; $r(h)$ représente donc aussi le coefficient de *connexion* physique ; on se trouve dans le cas d'une connexion stationnaire et homogène.

Cette liaison entre $r(h)$ et $\Phi(\theta)$ entraîne une double conséquence : $r(h)$ est soumis aux conditions qui dérivent du fait que $\Phi(\theta)$ est une fonction de répartition et $\Phi(\theta)$ à celles qui résultent du fait que $1 - \Phi|h|$ est « un r ».

Ainsi $r(h)$ est une fonction qui n'est jamais croissante ni jamais négative ; elle tend vers zéro pour $h \rightarrow \infty$. Elle représente donc une forme très particulière de la corrélation.

$[1 - \Phi(\theta)]$ doit satisfaire, elle, aux conditions de cohérence. Ceci entraîne entre autres, que les libres parcours offrent nécessairement une dispersion. En effet, s'ils étaient tous égaux à θ_0 , on aurait :

$$\begin{cases} \Phi(\theta) = 0 & \text{pour } \theta < \theta_0 \\ \Phi(\theta) = 1 & \text{pour } \theta_0 \leq \theta \end{cases}$$

et par conséquent :

$$\begin{cases} r(h) = 1 & \text{pour } |h| < \theta_0 \\ r(h) = 0 & \text{pour } \theta_0 \leq |h|. \end{cases}$$

Or ceci est impossible, en vertu des conditions de cohérence : r ne saurait être égal à 1 sur un intervalle ayant la puissance du continu, sans être égal à 1 pour toute valeur de h .

En outre, il n'est pas possible que $\Phi''(0)$ soit nul car sinon r serait toujours égal à 1.

39. Dépendance des libres parcours successifs. La probabilité (IV) nous permet d'étudier l'influence du libre parcours déjà accompli, sur la probabilité du prochain choc. Introduisons pour cela la probabilité :

(VI) Probabilité pour qu'une molécule ayant déjà accompli un libre parcours de durée θ_1 , accomplisse un autre parcours de durée totale supérieure à θ_2 ($\theta_2 > \theta_1$) ou encore pour que la molécule qui n'a pas subi de choc pendant la durée θ_1 , n'en éprouve pas entre θ_1 et θ_2 .

C'est la complémentaire de la probabilité (IV), soit :

$$Q(\theta_1, \theta_2 - \theta_1) = 1 - P(\theta_1, \theta_2 - \theta_1) = \frac{\Psi(\theta_2)}{\Psi(\theta_1)}.$$

Il faut comparer cette probabilité à la probabilité *a priori* :

$$\Psi(\theta_2 - \theta_1)$$

qui est la probabilité pour qu'une molécule n'éprouve pas de choc dans l'intervalle $(\theta_2 - \theta_1)$, quand on ne sait rien sur son passé.

Q et Ψ s'expriment facilement au moyen du coefficient de corrélation:

$$Q(\theta_1, \theta_2 - \theta_1) = \frac{r(\theta_2)}{r(\theta_1)}$$

$$\Psi(\theta_2 - \theta_1) = r(\theta_2 - \theta_1).$$

Lorsque les probabilités Q et Ψ sont égales, cela veut dire que la durée du trajet déjà accompli sans choc, est *sans influence* sur la probabilité du prochain choc. On est donc dans le cas que la théorie cinétique appelle: «indépendance des libres parcours».

L'équation fonctionnelle:

$$\frac{r(\theta_2)}{r(\theta_1)} = r(\theta_2 - \theta_1)$$

détermine le coefficient de corrélation qui est l'*exponentielle simple*:

$$r(\theta) = e^{-\lambda\theta} \quad (\lambda > 0).$$

Le corpuscule aléatoire représentatif du gaz n'est alors pas deux fois dérivable en moyenne quadratique.

Mais, dans le schéma de la théorie cinétique où nos points matériels sont en réalité de petites sphères de rayon fini se choquant entre elles, cette hypothèse de l'indépendance des libres parcours n'est pas admissible.

Il est net en effet qu'une molécule qui vient de subir un choc (θ_1 nul) est, tant qu'elle reste voisine de la molécule choquante ($\theta_2 - \theta_1$, petit), protégée par elle comme par un écran, contre les chocs des autres molécules. Elle a donc moins de chances de subir un nouveau choc dans l'intervalle ($\theta_2 - \theta_1$) qu'une molécule qu'un libre parcours notable déjà accompli (θ_1 relativement grand) aurait dégagée de la molécule qui l'a choquée pour la dernière fois.

Cette condition de dépendance, imposée par l'image précise des molécules, se traduit dans nos notations par:

$$Q(\theta_1, \theta_2 - \theta_1) < Q(0, \theta_2 - \theta_1)$$

c'est à dire

$$\frac{r(\theta_2)}{r(\theta_1)} < r(\theta_2 - \theta_1).$$

Cette inégalité doit avoir lieu pour ($\theta_2 - \theta_1$) assez petit. On doit donc pouvoir trouver ($\theta_2 - \theta_1$) assez petit pour que:

$$\frac{r'(\theta_1)}{r(\theta_1)} < r'(0) + \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} r''(0).$$

a) Lorsque $r'(0) \neq 0$ (corpuscule non dérivable), cette inégalité entraîne la suivante :

$$\frac{r'(\theta_1)}{r(\theta_1)} < r'(0) \quad \text{et aussi :} \quad r''(0) < r'^2(0)$$

qui porte sur la forme du coefficient de corrélation, et qui signifie que la courbe $r(\theta)$ s'amorce *au-dessous* de l'exponentielle simple.

b) Lorsque $r'(0) = 0$ (corpuscule dérivable), l'inégalité peut toujours être satisfaite pour $(\theta_2 - \theta_1)$ assez petit.

Ainsi le schéma des chocs entre molécules non ponctuelles est compatible aussi bien avec un corpuscule dérivable qu'avec un corpuscule non dérivable, mais dans ce dernier cas une restriction est apportée à la forme du coefficient de corrélation.

Exemples :

1) Soit $r(h) = e^{-\lambda h^2}$, forme qui entraîne la dérivabilité.

On a :

$$\frac{r(\theta_2)}{r(\theta_1)} = e^{-\lambda (\theta_2^2 - \theta_1^2)}$$

$$r(\theta_2 - \theta_1) = e^{-\lambda (\theta_2 - \theta_1)^2}$$

d'où pour le rapport de la probabilité d'un choc pour une molécule ayant déjà accompli un libre parcours à la probabilité d'un choc pour une molécule qui vient d'en subir un :

$$e^{-2\lambda \theta_1 (\theta_2 - \theta_1)}$$

Ce rapport, inférieur à l'unité, n'atteint cette valeur que pour $(\theta_2 - \theta_1)$ infini. Les chances d'un choc augmentent constamment avec la durée d'un libre parcours.

2) Soit $r(h) = \frac{\tau}{\tau + |h|}$ (corpuscule non dérivable).

On a :

$$\frac{r(\theta_2)}{r(\theta_1)} = \frac{\tau + \theta_1}{\tau + \theta_2} = 1 - \frac{\theta_2 - \theta_1}{\tau + \theta_2}$$

$$r(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tau}{\tau + \theta_2 - \theta_1} = 1 - \frac{\theta_2 - \theta_1}{\tau + \theta_2 - \theta_1}$$

Par conséquent :

$$\frac{r(\theta_2)}{r(\theta_1)} > r(\theta_2 - \theta_1)$$

c'est-à-dire que la probabilité d'un choc est plus petite pour une molécule ayant accompli un libre parcours de durée θ_1 , que pour une molécule qui vient d'être choquée : cette forme r ne convient donc pas à la théorie cinétique.

$$3) r(h) = e^{-\lambda h - \frac{\nu h^2}{2}} \text{ (corpuscule non dérivable).}$$

Le rapport des deux probabilités est :

$$e^{-\nu \theta_2 (\theta_2 - \theta_1)}.$$

Il est inférieur à 1 : cette forme de r convient à la théorie cinétique.

40. La diffusion dans le schéma des libres parcours. Le coefficient de corrélation physique étant égal au coefficient de corrélation corpusculaire, la diffusion est donnée par l'intégrale :

$$\widehat{X}^2 = 2 S^2 \int_0^t (t-s) r(s) ds = 2 S^2 \int_0^t (t-s) [1 - \Phi(s)] ds.$$

Supposons $\Phi(\theta)$ dérivable et soit $\varphi(\theta)$ sa dérivée.

La dispersion peut s'écrire :

$$\widehat{X}^2 = S^2 \left[t^2 - \int_0^t (t-s)^2 \varphi(s) ds \right].$$

Admettons, ce qui est bien naturel, que les moments de $\varphi(s)$ existent — au moins jusqu'à l'ordre 2 — On voit alors que la valeur asymptotique de \widehat{X}^2 (pour t grand) est

$$\left[2 S^2 \int_0^\infty s \varphi(s) ds \right] t - S^2 \int_0^\infty s^2 \varphi(s) ds = at + b.$$

La valeur asymptotique du coefficient de diffusion est :

$$\chi = \frac{X^2}{2t} = S^2 \int_0^\infty s \varphi(s) ds = S^2 \bar{\theta}.$$

Il est possible d'ailleurs, dans le schéma des libres parcours de calculer le moment d'un ordre quelconque de X et l'on montre que si tous les moments de $\varphi(\theta)$ existent, X est équivalent à l'infini à $\xi \sqrt{t}$, ξ étant une variable aléatoire gaussienne, ce qui généralise le résultat classique de la théorie du mouvement brownien.

Pour t petit, \widehat{X}^2 est infiniment petit de l'ordre de t^2 .

X — EXEMPLES DE CORPUSCULES ALÉATOIRES

42. Corpuscule aléatoire libre. Le plus simple des corpuscules aléatoires est le corpuscule aléatoire libre, qui vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{X}=0.$$

Celui-ci correspond au système différentiel canonique :

$$X=U \quad \dot{U}=0.$$

L'inconnue du problème est la fonction de distribution conjuguée de X, \dot{X} . C'est une fonction de deux intégrales premières du système différentiel associé :

$$\frac{dx}{u} = \frac{du}{0} = dt$$

soit :

$$R(u, x-ut)$$

On peut la déduire de son expression initiale $R(u_0, x_0)$ pour $t=0$.

L'expression formelle de X est simple :

$$X=U_0 t + X_0$$

X_0 est la position initiale, U_0 la vitesse initiale. Ce sont deux constantes aléatoires dont la loi de probabilité $R(x_0, u_0)$ est considérée comme une donnée.

Le moment conjugué général de X et de U est :

$$X^\alpha U^\beta = \iint x^\alpha u^\beta R(u, x-ut) dx du = \iint (\xi+ut)^\alpha u^\beta R(u, \xi) du d\xi.$$

C'est un polynôme de degré α en t , dont les coefficients sont des moments initiaux.

En particulier :

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \bar{X}_0 + t\bar{U}_0 \\ \bar{X}^2 &= \bar{X}_0^2 + 2\bar{X}_0\bar{U}_0 t + \bar{U}_0^2 t^2 \\ \overline{XU} &= \bar{X}_0\bar{U}_0 + \bar{U}_0^2 t. \end{aligned}$$

Rapportons le corpuscule à ses *axes propres*, c'est-à-dire par rapport auxquels :

$$\bar{X}_0=0 \quad \bar{U}_0=0.$$

Alors, à tout instant :

$$\bar{X}=0 \quad \bar{U}=0.$$

La position et la vitesse sont par rapport à ces axes des variables purement aléatoires.

Supposons maintenant que X_0 et U_0 soient indépendantes. En particulier, l'on a :

$$\overline{X_0 U_0} = 0.$$

Posons :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \overline{X^2} ; \sigma_0^2 = \overline{X_0^2} ; S^2 = \overline{U^2} = \overline{U_0^2} \\ r &= \frac{\overline{XU}}{S\sigma} ; r_1 = \frac{\overline{X_0 U_0}}{\sigma_0 \sigma} \end{aligned}$$

Les formules de tout à l'heure deviennent avec ces notations :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma_0^2 + S^2 t^2 \\ r &= \frac{S}{\sigma} t = \frac{S t}{\sqrt{\sigma_0^2 + S^2 t^2}} \\ r_1 &= \frac{\sigma_0}{\sigma} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sigma_0^2 + S^2 t^2}} \end{aligned}$$

On peut se représenter le corpuscule aléatoire libre comme une espèce de «nébuleuse» dont la densité est égale à la probabilité de présence :

$$\rho(x, t) = \int R(u, x-ut) du.$$

La nébuleuse se déplace d'un *mouvement d'ensemble rectiligne et uniforme*, mais en outre ses éléments sont doués d'un *mouvement d'agitation* dont l'énergie est constante.

Ainsi, le principe d'inertie appliqué à un corpuscule aléatoire libre ($\ddot{X}=0$) ne donne pas seulement comme conséquence que son centre de gravité est en mouvement rectiligne et uniforme, mais y ajoute que l'énergie d'agitation est constante. On s'explique de cette manière qu'il est tout à fait naturel que les molécules d'un gaz soient douées d'un mouvement d'agitation statistiquement permanent.

Si l'on regarde l'énergie d'agitation comme étant *l'énergie interne* du corpuscule, on peut énoncer que l'énergie interne d'un corpuscule aléatoire libre (donc isolé) se conserve. Avec le temps, le corpuscule se dilate et son énergie se dilue, comme le montre l'expression de la dispersion :

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + S^2 t^2.$$

Si l'on appelle *incertitude* le produit $S\sigma$ et que l'on désigne par $\frac{h}{4\pi}$ l'incertitude initiale ($S\sigma_0$), on a :

$$S\sigma = S \sqrt{\sigma_0^2 + \left(\frac{ht}{4\pi\sigma_0}\right)^2} \geq \frac{h}{4\pi}.$$

L'incertitude va toujours en croissant au cours du temps. La formule :

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + \left(\frac{ht}{4\pi\sigma_0} \right)^2$$

est exactement celle qu'on obtient en traitant le problème du corpuscule libre par l'équation de Schrödinger. Cette analogie n'est par fortuite car la Mécanique ondulatoire est vraisemblablement une Mécanique aléatoire en général *non lagrangienne*, mais l'étant accidentellement pour un problème aussi simple que celui du corpuscule libre.

Particularisons encore le problème en posant que $R(u_0, x_0)$ est une loi de Gauss :

$$R(u_0, x_0) = \frac{1}{2\pi S \sigma_0} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2} - \frac{u_0^2}{2S^2}}$$

d'où par suite :

$$R(u, x - ut) = \frac{1}{2\pi S \sigma_0} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{\sigma_0^2} - \frac{2xut}{\sigma_0^2} + \frac{u^2 \sigma_0^2}{S^2 \sigma_0^2} \right]}$$

et

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

avec : $\sigma^2 = \sigma_0^2 + S^2 t^2$.

La vitesse de l'équivalent hydrodynamique est la moyenne liée :

$$\bar{U} = \frac{1}{\rho} \int R u du = \frac{S^2 t}{\sigma^2} x.$$

On vérifie facilement que ρ satisfait bien à l'équation de continuité :

$$\frac{d_0}{dt} \log \rho + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = 0$$

où

$$\frac{d_0}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{S^2 t}{\sigma^2} x \frac{\partial}{\partial x}.$$

La vitesse quadratique moyenne d'agitation est :

$$\overline{U^2} = \frac{1}{\rho} \int R \cdot (u - \bar{U})^2 du = \frac{S^2 \sigma_0^2}{\sigma^2}$$

et l'équation du mouvement de l'équivalent hydrodynamique :

$$\frac{d_0 \overline{U}}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \overline{U^2} = - \overline{U^2} \frac{\partial \log \rho}{\partial x} = \frac{\sigma_0^2 S^2}{\sigma^4}.$$

La force de pression :

$$\frac{\sigma_0^2 S^2}{\sigma^4} x = \left(\frac{h}{4\pi} \right)^2 \frac{x}{\sigma^4}$$

coincide avec la *force quantique* :

$$\frac{h^2}{8\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x} \right)$$

à laquelle est soumis le « fluide de probabilité » de la Mécanique ondulatoire.

Le corpuscule aléatoire libre est doué d'une *entropie*. Si on la calcule au sens de *Boltzmann*, c'est-à-dire par la formule :

$$\mathcal{H} = - \iint R \log R \, dx \, du$$

ou trouve :

$$\mathcal{H} = \log(\sigma_0 S) + C^{te}.$$

Elle est donc *constante*, résultat conforme à ce que nous avons vu dans la Thermodynamique du corpuscule aléatoire (deux fois dérivable) — car il y a évidemment ici conservation de l'extension en phase.

Or ceci est choquant car si l'énergie du corpuscule libre se conserve, par contre elle se dégrade car le corpuscule se dilate et l'on a ordinairement l'intention de mesurer par l'entropie le degré de dilution de l'énergie.

L'explication est la même que celle déjà donnée à propos de la Thermodynamique. Pour calculer l'entropie, il faut imaginer une transformation virtuelle, composée d'une suite d'états de maximum de probabilité *tangents aux états réels* (suite réversible) et non pas prendre la suite des états dans l'évolution réelle.

Un état de maximum de probabilité tangent à l'état réel défini par les paramètres macroscopiques S et σ , a pour fonction de distribution la loi de Gauss :

$$\mathcal{G}_0 = \frac{1}{2\pi \sigma S} \exp \left(- \frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{u^2}{2S^2} \right)$$

L'entropie (conforme à la conception de la Thermodynamique) est :

$$\mathcal{H}_0 = - \iint R \log R_0 \, dx \, du.$$

On voit qu'elle est égale à :

$$\mathcal{H} = \log(\sigma S) + C^{10}$$

et qu'elle croit par conséquent avec le temps. Conformément à un résultat déjà trouvé, elle est égale (à une C^{10} additive près) au logarithme de l'incertitude.

La variation d'entropie entre les instants 0 et t est :

$$\log(S\sigma) - \log(S\sigma_0) = \log \frac{\sigma}{\sigma_0} > 0.$$

C'est la valeur de *transformation non compensée* entre les instants 0 et t .

Ainsi, le corpuscule aléatoire libre est-il doué non pas seulement des propriétés d'un simple point matériel mais de toutes celles, bien plus riches, d'un système *thermodynamique*.

43. Rotateur plan aléatoire. Traitons maintenant d'un corpuscule à deux dimensions : le *rotateur plan*, c'est-à-dire un corpuscule aléatoire dont les deux coordonnées sont des oscillateurs aléatoires de même pulsation.

Ses équations différentielles sont :

$$\begin{cases} \ddot{X} + \Omega^2 X = 0 \\ \ddot{Y} + \Omega^2 Y = 0 \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= U; \dot{U} = -\Omega^2 X \\ \dot{Y} &= V; \dot{V} = -\Omega^2 Y. \end{aligned}$$

Le système différentiel associé est :

$$dt = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{du}{-\omega^2 x} = \frac{dv}{-\omega^2 y}.$$

Il représente le mouvement d'un point matériel attiré par un centre proportionnellement à la distance. Il admet quatre intégrales premières que l'on peut choisir de manière que trois ne contiennent pas le temps et que la quatrième soit linéaire par rapport au temps.

Ce sont :

$$\begin{cases} \omega^2 x^2 + u^2 = 2\varepsilon_1 \\ \omega^2 y^2 + v^2 = 2\varepsilon_2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{équation d'énergie} \end{array} \right.$$

$$vx - uy = \frac{2\varepsilon}{\omega}, \quad \text{équation des aires}$$

$$t - \frac{1}{\omega} \arcsin \sqrt{\frac{\omega x}{\omega^2 x^2 + u^2}} = \varepsilon_3, \quad \text{équation du mouvement.}$$

On peut exprimer aussi les quatre intégrales premières en fonction des coordonnées et des vitesses initiales :

$$\begin{cases} x \cos \omega t - \frac{u}{\omega} \sin \omega t = x_0 \\ \omega x \sin \omega t + u \cos \omega t = u_0 \\ y \cos \omega t - \frac{v}{\omega} \sin \omega t = y_0 \\ \omega y \sin \omega t + v \cos \omega t = v_0. \end{cases}$$

La trajectoire est l'une des deux ellipses :

$$\varepsilon_2 x^2 + \varepsilon_1 y^2 \pm 2xy \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon^2} = \frac{2\varepsilon^2}{\omega^2}.$$

C'est un *cercle* si

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = |\varepsilon|.$$

La fonction de distribution conjuguée de X, Y, U, V , à l'instant t est une fonction des quatre intégrales premières du système différentiel associé. Mais si le rotateur est *stationnaire*, elle n'est fonction que des trois intégrales indépendantes de t :

$$\frac{\omega^2 x^2 + u^2}{2}, \frac{\omega^2 y^2 + v^2}{2}, \frac{\omega}{2} (vx - uy).$$

Elle dépend en outre — explicitement — de ω , bien entendu.

Cherchons maintenant à introduire des condition d'*isotropie* qui, pour le problème de Mécanique aléatoire, soient l'analogue du *mouvement circulaire* en Mécanique certaine.

La probabilité doit être indifférente à une *rotation autour de l'origine*. Si l'on fait tourner autour de O , le point (x, y) , accompagné du vecteur vitesse (u, v) , la probabilité ne doit dépendre que de la figure formée par ces deux vecteurs. Une fois $\xi = x^2 + y^2$, fixé, elle ne dépend que de $\eta = u^2 + v^2$, et de l'angle des deux vecteurs, représenté par le produit vectoriel :

$$vx - uy = \frac{2\varepsilon}{\omega}.$$

Mais, d'autre part, la stationnarité lui impose d'être une fonction de :

$$2\varepsilon_1 = \omega^2 x^2 + u^2, 2\varepsilon_2 = \omega^2 y^2 + v^2, \varepsilon$$

ou, ce qui revient au même, de :

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{\omega^2 \xi + \eta}{2}, \varepsilon_1, \varepsilon.$$

La confrontation des deux sortes de conditions imposées montre que la fonction de distribution du rotateur plan *stationnaire et isotrope*, a la forme :

$$R \left[\frac{\omega^2(x^2+y^2)+u^2+v^2}{2}, \frac{\omega}{2}(vx-uy), \omega \right].$$

Elle ne dépend que de l'énergie totale, de la constante des aires et de ω .

La loi de probabilité des constantes aléatoires :

$$E_1, E_2, E, \omega$$

est :

$$\frac{4\pi}{\omega^2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon^2}} R(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon, \omega).$$

On peut retrouver ce résultat par une voie différente. R vérifie d'abord l'équation aux dérivées partielles des multiplicateurs du système différentiel associé. Si R ne dépend pas de t , on a donc :

$$u \frac{\partial R}{\partial x} + v \frac{\partial R}{\partial y} - \omega^2 x \frac{\partial R}{\partial u} - \omega^2 y \frac{\partial R}{\partial v} = 0.$$

Comme la force ne dépend que de la position, il y a conservation de l'extension en phase et R est non seulement un multiplicateur, mais un *invariant intégral* du système différentiel associé.

D'autre part, R doit rester invariante par les rotations. C'est donc un invariant intégral du système différentiel qui a pour solutions les équations d'une rotation d'axes. R vérifie par suite la seconde équation aux dérivées partielles :

$$y \frac{\partial R}{\partial x} - x \frac{\partial R}{\partial y} + v \frac{\partial R}{\partial u} - u \frac{\partial R}{\partial v} = 0.$$

La première a pour solution générale :

$$R = \Phi \left[\frac{\omega^2 x^2 + u^2}{2}, \frac{\omega^2 y^2 + v^2}{2}, vx - uy, \omega \right] = \Phi(\lambda, \mu, \nu, \omega).$$

Il existe des fonctions de ce type satisfaisant à la seconde; il suffit pour cela que :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = 0$$

Φ est donc finalement fonction de $\lambda + \mu, \nu, \omega$.

Ainsi la forme de R a été précisée par le fait que ce devait être une fonction invariante par *les transformations de deux groupes*.

Le premier est le groupe à un paramètre, attaché à l'équation fondamentale en R , qui exprime la conservation de la probabilité et résulte de la dérivabilité en moyenne quadratique. Il est défini par la transformation infinitésimale :

$$\begin{aligned} dx &= u dt & du &= -\omega^2 x dt \\ dy &= v dt & dv &= -\omega^2 y dt. \end{aligned}$$

C'est dans les équations de ce groupe qu'intervient la *force extérieure*.

Le second groupe est un groupe à un paramètre qui représente les rotations simultanées du même angle, des vecteurs position et vitesse. Ses équations en termes finis sont :

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} u' = u \cos \alpha - v \sin \alpha \\ v' = u \sin \alpha + v \cos \alpha \end{cases}$$

et ses équations infinitésimales :

$$\begin{cases} dx = -y d\alpha \\ dy = x d\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} du = -v d\alpha \\ dv = u d\alpha. \end{cases}$$

Il correspond à des *propriétés purement internes* du corpuscule, ou a l'on veut, à des relations entre le corpuscule et l'espace dans lequel il est plongé, indépendamment des actions extérieures qui donnent à son mouvement sa physionomie particulière. L'*isotropie* n'est qu'une forme particulière des conditions de ce genre dont les plus usitées en Mécanique quantique sont : l'invariance aux permutations, à la symétrie par rapport à un point ou à un plan, etc...

D'une façon générale, on voit que les conditions physiques imposées à un corpuscule aléatoire, qui sont de deux sortes (externes et internes), imposent à l'inconnue R du problème de Mécanique aléatoire d'être un invariant commun à un certain nombre de groupes; Ces conditions, à elles seules ne déterminent pas R , mais on peut souvent tirer de la forme ainsi restreinte, des conclusions intéressantes sans avoir besoin de préciser davantage.

Nous allons maintenant poursuivre la solution de notre problème en supposant que R est une loi de Gauss :

$$R = \frac{\omega}{4\pi^2 S^2 (1-r^2)} e^{-\frac{1}{2S^2(1-r^2)} [\omega^2(x^2+y^2) + u^2 + v^2 + 2r\omega(vx-uy)]}$$

On trouve pour les moments du 2^o ordre :

$$\begin{aligned}\overline{U^2} &= \overline{V^2} = \omega^2 \overline{X^2} = \omega^2 \overline{Y^2} = S^2 \\ \overline{XY} &= \overline{XU} = \overline{YV} = \overline{UV} = 0 \\ \overline{UY} &= -\overline{VX} = \frac{r}{\omega} S^2.\end{aligned}$$

Il en résulte immédiatement la vitesse de l'équivalent hydrodynamique :

$$\overline{U} = r\omega y \quad \overline{V} = -r\omega x$$

et sa densité :

$$\rho = \frac{\omega^2}{2\pi S^2} e^{-\frac{\omega^2}{2S^2}(x^2+y^2)}$$

C'est donc un fluide, fortement concentré autour de son centre et qui tourne *comme un solide* avec la vitesse angulaire ωr , donc différente de la pulsation ω du rotateur. Si $r=0$, le fluide est au repos.

Il est certain que l'adoption de la loi de Gauss entraîne des simplifications excessives. D'une manière plus générale, on pourrait obtenir une rotation différenciée, chaque élément fluide tournant avec une vitesse angulaire fonction de la distance.

XI—SYSTEMES DE CORPUSCULES ALÉATOIRES

44. Forme générale du problème. La simple notion de corpuscule aléatoire, qui ne fait que généraliser le *point matériel* de la Mécanique Rationnelle, n'est évidemment pas suffisante pour répondre aux exigences de tous les problèmes que pose la Physique. Il est clair, par exemple, que le gaz que représente un corpuscule aléatoire possède les degrés de liberté et les symétries d'un gaz *mono-atomique*. Pour représenter un gaz *biatomique*, il faut imaginer deux corpuscules aléatoires dont la distance soit une constante (certaine ou aléatoire).

Considérons aussi le mélange de *deux gaz monoatomiques*. Chacun est représenté par un corpuscule aléatoire et, en général, ces deux corpuscules ne seront pas indépendants. La présence de l'un influe sur la probabilité de l'état de l'autre. Aux corrélations internes de chaque corpuscule (diffusion des gaz en eux-mêmes) s'ajoutent des corrélations réciproques — jouant le rôle de *liaisons* plus ou moins rigides — qui régissent la diffusion des gaz l'un dans l'autre.

Citons encore le cas des *systèmes atomiques*. L'électron périphérique de l'atome d'hydrogène ou de l'atome d'hélium ionisé, peut bien être représenté par un corpuscule aléatoire unique. Mais, dès que l'atome

contient plus d'un électron, il faut tenir compte des liaisons de probabilité entre électrons et faire appel à la Mécanique des Systèmes de corpuscules aléatoires.

Un système de corpuscules aléatoires est représenté par un certain nombre de paramètres aléatoires, généralisation des paramètres de Lagrange, en Mécanique Analytique. Il est soumis de la part de tout ce que lui est « extérieur » (ce mot ne voulant plus dire : de tout ce qui n'occupe pas le même espace) à des *forces*. Les états sont solutions d'un système différentiel, compte tenu de conditions de structure (symétries, isotropie, indiscernabilité, etc.).

En Mécanique classique des systèmes de points ou de solides, il existe des *liaisons*, caractérisées par des *forces de liaison*. En Mécanique aléatoire, la notion de liaison prend un caractère plus général, qui rapproche les systèmes aléatoires des fluides naturels. Elle devient équivalente à la notion statistique de *corrélation*. Nous dirons en effet qu'il existe une liaison entre deux corpuscules aléatoires dès que la présence de l'un modifie la probabilité de la position ou de la vitesse de l'autre. Une telle influence est exactement ce que la statistique appelle une « liaison de probabilité » ou plus brièvement une « corrélation », et les liaisons rigides envisagées par la Mécanique ne sont autre chose que des *cas limites* de la corrélation.

On étudie, en Mécanique Rationnelle, des Systèmes constitués par des points (ou par des sous-systèmes) *mécaniquement indépendants*, c'est à-dire tels que le mouvement de chacun d'eux puisse être déterminé comme si les autres n'existaient pas. Les paramètres et les équations différentielles du mouvement se séparent en groupes dont chacun n'intéresse que l'un des sous-systèmes constituants.

En Mécanique aléatoire, une telle séparation peut aussi exister dans la forme, mais ne correspond pas nécessairement à l'idée qu'on se fait des systèmes indépendants. Elle n'exclut nullement, en effet, la possibilité de corrélations entre les corpuscules indépendants au sens mécanique. Il suffit pour que ces corrélations existent entre les corpuscules que les positions et les vitesses *initiales* soient des constantes aléatoires dépendantes en probabilité, circonstance qui est absolument incompréhensible en Mécanique classique. Pour qu'il y ait en Mécanique aléatoire une véritable décomposition d'un système en sous-systèmes, il faut non seulement que les équations différentielles du mouvement se séparent en groupes (indépendance mécanique) mais encore que les données initiales correspondant à ces groupes soient *indépendantes en probabilité*.

Une réflexion s'impose au sujet de la notion de *force*. Les systèmes aléatoires sont, comme les systèmes certains, soumis de la part du

monde extérieur, à des forces. Mais, par contre, les liaisons entre les constituants que la Mécanique classique traduit par des forces intérieures, apparaissent maintenant comme des corrélations. Ces corrélations peuvent aussi parfois s'exprimer par des forces : tel est le cas des forces de tension dans un fluide, qui se déduisent de la corrélation entre les vitesses d'agitation. Mais l'inverse n'est pas toujours vrai. Pour prendre un exemple, il est possible que les taches solaires exercent une action sur la Météorologie de notre Atmosphère. Cette action, qui pourrait se constater par l'étude empirique de la corrélation entre le mouvement des taches solaires et celui de nos cyclones, et qui s'expliquerait par le fait que les taches peuvent influencer sur le rayonnement reçu par l'Atmosphère, donc sur la distribution des températures et des pressions, est bien trop complexe pour être traduite par une force. La notion de corrélation apparaît ainsi comme une notion plus générale et certainement moins métaphysique que celle de force ; il y a donc tout avantage à substituer celle-là à celle-ci, et à dire : nous constatons que la présence du système A modifie la probabilité de l'évolution du système B, donc A exerce une action sur B qui peut s'exprimer en tous cas par des corrélations, mais ces corrélations ne pourront pas toujours être représentées par des forces.

Une remarque est encore à faire en ce qui concerne la possibilité de définir l'*interaction* de deux corpuscules grâce au concept aléatoire. Ces deux corpuscules étant considérés comme un *système unique*, leur ensemble est représentable par un *fluide* dans l'espace de configuration, et l'on peut dire que, sommairement, il y a équivalence entre les corrélations et les tensions du fluide fictif. Celles-ci, en ce qui concerne les coordonnées relatives à un des corpuscules, expriment donc les actions qui s'exercent sur les éléments de ce corpuscule en tant que constituant du système. Mais d'autre part, ce corpuscule est équivalent à un fluide dans l'espace ordinaire à trois dimensions et les tensions de cet équivalent hydrodynamique représentent les liaisons intérieures au corpuscule, quand il est seul. Les tensions ne sont donc pas en général les mêmes dans les deux cas et leur différence exprimera l'action du second corpuscule sur le premier, c'est-à-dire l'interaction entre les constituants du système.

45. Equations du mouvement d'un système de points aléatoires. Considérons n corpuscules aléatoires $O_i(X_i, Y_i, Z_i)$, soumis à des forces ayant pour composantes :

$$A_i(X_k, Y_k, Z_k, t); B_i(X_k, Y_k, Z_k, t); C_i(X_k, Y_k, Z_k, t).$$

Ces corpuscules peuvent avoir des masses différentes, que nous supposons certaines. Les équations différentielles de leur mouvement sont :

$$\begin{cases} m_i \ddot{X}_i = A_i \\ m_i \ddot{Y}_i = B_i \\ m_i \ddot{Z}_i = C_i. \end{cases}$$

Soit (U_i, V_i, W_i) la vitesse ; on peut écrire le système de $6n$ équations :

$$\begin{cases} \dot{X}_i = U_i & \dot{Y}_i = V_i & \dot{Z}_i = W_i \\ \dot{U}_i = A_i & \dot{V}_i = B_i & \dot{W}_i = C_i. \end{cases}$$

La force donnée, dépend en général des positions de tous les corpuscules. S'il se trouve que la force appliquée au corpuscule ne dépend que des coordonnées de ce corpuscule, l'intégration *formelle* du système est identique à celle des mouvements de n corpuscules isolés.

Mais, en Mécanique aléatoire, l'inconnue du problème est la fonction de distribution conjuguée des positions et des vitesses :

$$R(x_1, \dots, w_n, t).$$

On voit donc que le concept statistique introduit des liaisons là, où en Mécanique classique, il y avait indépendance totale. Pour déterminer la fonction R , il faut par exemple se donner la fonction de distribution conjuguée des positions et des vitesses initiales des corpuscules. En Mécanique classique, ces éléments constituent $6n$ constantes numériques. En Mécanique aléatoire, ce sont $6n$ nombres aléatoires. Parler de leur fonction de distribution conjuguée c'est admettre qu'elles peuvent être reliées par des corrélations, c'est-à-dire qu'il existe une interdépendance entre les données, même lorsque les mouvements des corpuscules constituant satisfont à des équations analytiquement indépendantes entre elles.

46. Liaisons en Mécanique aléatoire. Le point de vue aléatoire peut introduire des liaisons d'un genre nouveau.

Il existe des *liaisons* entre les corpuscules aléatoires qui constituent le système, si les coordonnées et les vitesses des différents corpuscules sont liées par des relations a priori, autres que les équations du mouvement. Ces relations — et c'est là ce qui est nouveau — peuvent bien entendu être des *relations de probabilité*, c'est-à-dire des *corrélations*.

Il peut arriver que les liaisons s'expriment par des *relations fonctionnelles certaines* entre les coordonnées, les vitesses et des constantes aléatoires. Si les vitesses n'y figurent pas, on peut utiliser ces relations pour réduire le nombre de paramètres nécessaires à définir le système. Ce sont des liaisons *holonomes aléatoires*.

Enfin, si ces relations fonctionnelles ne contiennent pas de paramètres aléatoires, elles sont analogues aux liaisons de la Mécanique certaine.

Lorsque les distances mutuelles des corpuscules sont des constantes certaines, on a un *solide aléatoire*.

Prenons comme exemple le système constitué par deux corpuscules libres à une dimension. Le système différentiel de leur mouvement est :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = U_1 & \dot{U}_1 = 0 \\ \dot{X}_2 = U_2 & \dot{U}_2 = 0 \end{cases}$$

dont la solution formelle est :

$$\begin{cases} X_1 = A_1 t + B_1 & U_1 = A_1 \\ X_2 = A_2 t + B_2 & U_2 = A_2 \end{cases}$$

A_1, A_2, B_1, B_2 sont quatre constantes aléatoires ayant pour fonction de distribution conjuguée :

$$R(a_1, a_2, b_1, b_2).$$

La loi de probabilité conjuguée des deux corpuscules est :

$$R(a_1, a_2, x_1 - u_1 t, x_2 - u_2 t).$$

a) *Liaison aléatoire générale*

L'exemple le plus simple est l'absence de liaison de probabilité entre les deux corpuscules que l'on exprimera en écrivant que $R(a_1, a_2, b_1, b_2)$ est le produit d'une fonction de (a_1, b_1) par une fonction de (a_2, b_2) .

b) *Liaison holonome aléatoire*

Ecrivons que la distance $(X_2 - X_1)$ est une constante aléatoire E :

$$\begin{aligned} X_1 &= A_1 t + B_1 \\ X_2 &= A_1 t + B_1 + E. \end{aligned}$$

Le problème a pour solution une loi de probabilité à 3 variables :

$$R(u_1, u_2, \varepsilon).$$

Le système primitif de quatre équations différentielles est remplacé par deux équations différentielles et une équation en termes finis :

$$\dot{X}_1 = U_1, \dot{U}_1 = 0, X_2 = X_1 + E.$$

L'équation en termes finis a une influence sur la corrélation entre les intégrales premières du système différentiel.

c) *Liaison holonome certaine*

La distance $(X_2 - X_1)$ est une constante certaine. L'ensemble des deux corpuscules constitue un solide aléatoire entièrement défini par

X_i, U_i . La solution du problème est une fonction de distribution à deux variables :

$$R(u_i, x_i - u_i t).$$

47. Équations de Lagrange — Principe de Hamilton. Introduisons la force vive aléatoire $2T$, l'action hamiltonienne \mathcal{L} , l'hamiltonien H , fonctions certaines de paramètres aléatoires Q_i de Lagrange dont dépend le système après réductions, de leurs dérivées \dot{Q}_i et de t .

En Mécanique certaine, si le potentiel F peut s'exprimer à l'aide des paramètres Q_i (cas des systèmes sans résistances passives), les équations de Lagrange sont simplement l'aspect invariant des équations différentielles du mouvement. On les obtient par changement de variables à l'aide des opérations élémentaires du calcul différentiel, qui s'étendent *formellement* au Calcul aléatoire. Donc, les équations de Lagrange et les équations de Hamilton sont valables en Mécanique aléatoire.

Par suite, le *principe de Hamilton* s'applique à la valeur probable de la fonction aléatoire $\mathcal{L}(Q_i, \dot{Q}_i, t)$. Parmi toutes les fonctions aléatoires qui, pour $t=t_0$ et $t=t_1$, sont égales à des constantes aléatoires données (par leur loi de probabilité conjuguée), celles qui conviennent au mouvement vrai rendent maxima ou minima l'intégrale certaine :

$$\int_{t_0}^{t_1} \bar{\mathcal{L}} dt.$$

H est une fonction certaine des $2n$ variables Q_i et P_i (coordonnées dans l'extension en phase), elles-mêmes fonctions aléatoires du temps.

Le système différentiel canonique est :

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad \dot{P}_i = - \frac{\partial H}{\partial Q_i}.$$

La fonction de distribution conjuguée R des $2n$ variables Q_i et P_i vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial R}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial R}{\partial p_i} \right) = 0$$

ce qui montre que $R(Q_i, P_i, t)$ est une constante aléatoire (la divergence Δ dans l'extension en phase est nulle).

Nous sommes dans le cas de la Mécanique statistique de *Gibbs*. La fonction \mathcal{H} de Boltzmann :

$$\mathcal{H} = - \int R \log R dq_1 \cdots dp_n$$

ne peut varier.

Pour trouver une variation de l'entropie, il faut comme nous l'avons dit à propos de la Thermodynamique substituer à \mathcal{H} l'expression :

$$\mathcal{H}_0 = - \int R \log R_0 dq_1 \dots dp_n$$

R_0 étant la fonction de distribution de l'état de maximum de probabilité tangent à l'état réel, soit

$$R_0 = A e^{-\frac{H}{k}}$$

L'entropie, conforme à la conception de la thermodynamique, est à une constante près :

$$-\log A.$$

48. Interaction de deux corpuscules. Étudions le système formé par deux corpuscules aléatoires C_1 et C_2 , de masse unité, mécaniquement indépendants, c'est-à-dire soumis à une force qui ne dépend pour chacun que de sa propre position et du temps.

Les équations de leur mouvement sont :
$$\begin{cases} \ddot{X}_1 = A_1(X_1, t) \\ \ddot{X}_2 = A_2(X_2, t) \end{cases}$$

Elles consistent en deux groupes mécaniquement indépendants, en ce sens que les équations différentielles s'intègrent séparément. Pourtant les deux corpuscules peuvent être liées par des *corrélations* si la fonction de distribution :

$$R(x_1, u_1, x_2, u_2, t_0)$$

correspondant aux données initiales ne se décompose pas en le produit d'une fonction de (x_1, u_1) par une fonction de (x_2, u_2) .

Cette fonction de distribution est celle d'un *corpuscule fictif* C , à deux coordonnées X_1, X_2 . A C , équivaut un fluide fictif à *deux dimensions* qui est soumis en chaque point (x_1, x_2) à une force ayant pour composantes :

$$\frac{d_0 \bar{U}_1}{dt}, \frac{d_0 \bar{U}_2}{dt}$$

où
$$\bar{U}_1 = \frac{1}{\varphi} \int R u_1 du_1 du_2; \varphi = \int R du_1 du_2$$

et
$$\frac{d_0}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{U}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \bar{U}_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

La résultante de cette force pour l'ensemble du fluide a pour première composante :

$$\int \frac{d_0 \bar{U}_1}{dt} \varphi dx_1 dx_2 = \frac{d_0}{dt} \int \bar{U}_1 \varphi dx_1 dx_2 = \frac{d_0 \bar{U}_1}{dt} = \dot{\bar{U}}_1 = \bar{A}_1.$$

Le fluide fictif est donc soumis, dans son ensemble, à une force de composantes $\overline{A}_1, \overline{A}_2$.

Mais le corpuscule C_1 , considéré seul possède un équivalent hydrodynamique à une dimension déduit de la loi de probabilité individuelle de C_1 :

$$R_1(x_1, u_1, t) = \int R dx_2 du_2.$$

Ce fluide est soumis en chaque point à une force égale à :

$$\frac{d_1 \overline{U}_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \overline{U}_1 + \overline{U}_1 \frac{\partial \overline{U}_1}{dx}$$

avec

$$\begin{aligned} \overline{U}_1 &= \frac{1}{\rho_1} \int R_1 u_1 du_1 = \frac{1}{\rho_1} \int R u_1 du_1 du_2 dx_2 = \frac{1}{\rho_1} \int \overline{U}_1 dx_2 \\ \rho_1 &= \int R_1 du_1 = \int R dx_2 du_2 du_1 = \int \rho dx_2. \end{aligned}$$

Cette force est, en général, différente de la composante correspondante de la force qui s'exerçait sur le fluide fictif à deux dimensions. Leur différence peut être interprétée comme étant dans le système, l'action du corpuscule C_2 sur le corpuscule C_1 .

Si l'on prend la moyenne de la force intérieure à C_1 , pour tout ce corpuscule, on retrouve évidemment la force \overline{A}_1 , la même que la composante correspondant à C_1 de la force qui s'exerçait sur le corpuscule C .

Admettons maintenant que les corpuscules C_1 et C_2 sont *indépendants en probabilité*. Alors :

$$R(x_1, u_1, x_2, u_2, t) = R_1(x_1, u_1, t) \cdot R_2(x_2, u_2, t).$$

\overline{U}_1 devient :

$$\overline{U}_1 = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \int u_1 R_1 R_2 du_1 du_2 = \frac{1}{\rho_1} \int u_1 R_1 du_1 = \overline{U}_1.$$

C'est donc aussi la vitesse du fluide représentant C_1 . Voyons ce qu'il en est des accélérations. Comme \overline{U}_1 ne dépend plus x_2 , on a :

$$\frac{d_0 \overline{U}_1}{dt} = \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial t} + \overline{U}_1 \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1} = \frac{d_1 \overline{U}_1}{dt}.$$

Par conséquent, la première composante de l'accélération du fluide fictif correspondant à C est identique à l'accélération du fluide fictif correspondant à C_1 .

On peut donc dire que, si deux corpuscules aléatoires sont *indépendants* (en probabilité), le fluide fictif équivalent à leur ensemble contient séparément les fluides qui représentent chacun d'eux. On mesure

donc les actions réciproques de deux corpuscules par la différence entre l'accélération du fluide équivalent à l'ensemble des deux et les accélérations des fluides équivalents aux corpuscules individuels. Cette différence est nulle lorsque les corpuscules sont indépendants.

On peut donner de l'action réciproque de deux corpuscules aléatoires la description physique suivante :

1°. Le corpuscule C_1 , pris dans son ensemble, peut exercer sur l'ensemble du corpuscule C_2 , une action qui est une *force* au sens de la Mécanique classique. Ainsi, l'attraction newtonienne exercée par le Soleil sur la Terre.

2°. Le corpuscule C_1 , toujours pris dans son ensemble, peut exercer sur les particules du fluide équivalent à C_2 , une action qui est encore une *force* et dans l'exemple du Soleil-Terre, ce serait la force des marées.

3°. Enfin, et c'est là un genre d'action étranger à la Mécanique, on peut observer des corrélations entre les vitesses d'agitation des fluides équivalents aux corpuscules C_1 et C_2 . Par exemple, entre la vitesse des taches solaires et celles des cyclones de notre Atmosphère. Ces corrélations traduisent des actions complexes impossibles à représenter par des forces.

49. Systèmes d'oscillateurs. Soit X un oscillateur aléatoire. Supposons qu'il soit le centre de gravité d'un système de n corpuscules aléatoires définis comme suit :

Chaque corpuscule X_i est un oscillateur aléatoire. Tous les X_i ont même masse $\frac{1}{n}$, même pulsation certaine ω , même loi de probabilité stationnaire. Il existe entre eux des *corrélations*. La loi de probabilité conjuguée de leurs positions et de leurs vitesses est une loi de Gauss :

$$R(x_i, u_i; t).$$

On a :

$$X = \frac{1}{n} \sum X_i.$$

Appelons : σ , l'écart type commun aux X_i : $\sigma^2 = \overline{X_i^2}$
 Σ , l'écart type de X : $\Sigma^2 = \overline{X^2}$
 s , l'écart type commun aux \dot{X}_i : $s^2 = \overline{\dot{X}_i^2} = \omega^2 \sigma^2$
 S , l'écart type de \dot{X} : $S^2 = \overline{\dot{X}^2} = \omega^2 \Sigma^2$.

L'incertitude sur un oscillateur élémentaire est le produit

$$s\sigma = \frac{s^2}{\omega}$$

qui mesure la dispersion du corpuscule dans l'espace généralisé.

La dispersion de l'oscillateur X est :

$$\Sigma^2 = \frac{1}{n^2} \sum \overline{X_i X_j} = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum r_{ij}$$

$r_{ij} = \frac{1}{\sigma^2} \overline{X_i X_j}$, désignant le coefficient de corrélation entre deux oscillateurs élémentaires ($r_{ii}=1$).

Par conséquent :

a) Si tous les X_i sont indépendants : $r_{ij}=0 (i \neq j)$

$$\overline{X^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

b) Si tous les r_{ij} sont positifs :

$$\overline{X^2} > \frac{\sigma^2}{n}$$

c) Si tous les r_{ij} sont négatifs :

$$\overline{X^2} < \frac{\sigma^2}{n}$$

d) Si tous les X_i sont égaux : $r_{ij}=1$

$$\overline{X^2} = \sigma^2$$

Combinons l'indépendance et la liaison fonctionnelle, par le schéma en grappes de *Borel*.

Groupons les n oscillateurs en k grappes de p oscillateurs rigidement liées. Dans une même grappe, les r_{ij} sont égaux à 1. Deux grappes sont indépendantes : entre deux oscillateurs appartenant à deux grappes différentes, l'on a : $r_{ij}=0$.

Il y a, parmi les $\frac{n(n-1)}{2}$ nombres $r_{ij} (i \neq j)$, $\frac{kp(p-1)}{2}$ nombres égaux à 1, tous les autres étants nuls.

Donc :

$$\overline{X^2} = \frac{\sigma^2}{n} \left[n + kp(p-1) \right] = \frac{\sigma^2}{n} \left[n + n(p-1) \right] = p \frac{\sigma^2}{n}$$

et

$$\overline{X^2} = p \frac{\sigma^2}{n}$$

L'énergie de l'oscillateur complexe est :

$$\mathcal{E} = m \overline{X^2} = p \frac{s^2}{n}$$

Désignons par $\frac{h}{2\pi}$ l'incertitude élémentaire : $\frac{s\sigma}{n} = \frac{s}{\omega n}$.

On a :

$$\mathcal{E} = ph \frac{\omega}{2\pi} = ph\nu \quad (\nu = \text{fréquence}).$$

L'énergie est donc *quantifiée* dans le schéma des grappes égales.

50. Interprétation de la quantification de l'énergie. Nous venons de voir que le schéma en grappes conduisait à la quantification de l'énergie; nous allons montrer maintenant que, parmi toutes les *organisations molaires* qui peuvent s'établir au sein de notre système d'oscillateurs, les associations en grappes égales sont les *plus probables*. Il en résulte qu'elles seront les seules à se manifester réellement.

Pour rendre les notations homogènes, posons :

$$\dot{X}_i = \omega X_{n+i}.$$

L'oscillateur élémentaire étant stationnaire, l'on a d'ailleurs :

$$r_{i, n+i} = 0$$

mais cette particularité n'a aucune importance.

Soit Δ_{2n} le déterminant des r_{ij} . La loi de Gauss qui représente la probabilité conjuguée des positions et des vitesses des oscillateurs élémentaire est :

$$R = \frac{1}{S_1 S_2 \cdots S_{2n}} \frac{1}{(2\pi)^n \sqrt{\Delta_{2n}}} \exp\left(-\frac{1}{2\Delta_{2n}} \sum R_{ij} \frac{x_i x_j}{S_i S_j}\right).$$

La probabilité d'une configuration donnée, c'est-à-dire d'un ensemble donné de r_{ij} est, d'après *Boltzmann*, proportionnelle au nombre φ tel que :

$$\log \varphi = - \int R \log R dx_1 \cdots dx_{2n}$$

ce qui donne, tous calculs faits :

$$\log \varphi = n + n \log 2\pi + \log \sqrt{\Delta_{2n}} + \log (S_1 \cdots S_{2n}).$$

Dans le cas d'oscillateurs indépendants ($\Delta_{2n} = 1$) on aurait :

$$\log \varphi_0 = n + n \log 2\pi + \log (S_1 \cdots S_{2n}).$$

D'où :

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \sqrt{\Delta_{2n}}.$$

Le nombre $P = \frac{\varphi}{\varphi_0}$ mesure la probabilité de la configuration envisagée.

Rappelons les propriétés du déterminant des coefficients de corrélation, établies dans la 1^{ère} Partie.

Δ_{2n} est compris entre 0 et 1 ; il ne peut augmenter avec $2n$. Il tend vers zéro avec $2n$, sauf si, à partir d'un rang fini les coefficients de corrélation sont tous nuls.

Nous dirons brièvement que $\Delta_{2n} \rightarrow 0$ pourvu que les coefficients de corrélation ne soient pas « presque tous nuls ».

Étudions les valeurs de la probabilité P pour n tendant vers l'infini.

1^{ère} cas. La loi de Gauss est définie, c'est-à-dire que l'exposant peut se mettre sous la forme de la somme de $2n$ carrés de formes linéaires indépendantes.

Pour que la configuration ait une probabilité non nulle, il faut que presque tous les oscillateurs soient indépendants. Ceux qui sont corrélés entre eux étant en nombre fini, représentent une fraction négligeable de l'ensemble.

2^{ème} cas. La loi de Gauss est dégénérée, c'est-à-dire que l'exposant se décompose en moins de $2n$ carrés.

On peut alors réunir les variables en groupes linéairement indépendants.

La loi de probabilité à envisager est celle des groupes. Il se présente deux sous-cas :

a) Les groupes sont tous l'assemblage d'un nombre fini d'éléments ; leur nombre k est donc forcément infiniment grand. Alors $\Delta_k \rightarrow 0$ sauf si les groupes sont presque tous indépendants.

b) Certains groupes contiennent un nombre infini d'éléments. Alors $\Delta_k \rightarrow 0$, sauf si le nombre de ces groupes reste fini.

Ceci posé, on peut toujours répartir les oscillateurs élémentaires en k groupes de $p_1, p_2 \dots p_k$ oscillateurs, tels que :

1°) Les oscillateurs d'un même groupe ne soient jamais indépendants entre eux.

2°) Les oscillateurs pris dans deux groupes différents soient toujours indépendants.

Les cas limites sont : un seul groupe ou des groupes d'un seul élément.

La loi de Gauss est le produit de k lois de Gauss définies, relatives chacune à un groupe. Soit $\Delta^{(i)}$ le déterminant relatif au i ème groupe.

On a :
$$P^2 = \Delta^{(1)} \Delta^{(2)} \dots \Delta^{(k)}.$$

Les $\Delta^{(i)}$ sont en général inférieurs à l'unité : ils n'atteignent cette valeur que lorsque les oscillateurs d'un même groupe sont soudés en grappe.

Lorsque $2n \rightarrow \infty$, deux cas peuvent se présenter :

a) le nombre d'oscillateurs de chaque groupe reste fini.

Alors k tend nécessairement vers l'infini et $\Delta^{(i)}$ tend généralement

vers zéro, donc P aussi. Il n'y a d'exception que lorsque les $\Delta^{(i)}$ sont presque tous égaux à 1, c'est-à-dire lorsque *presque tous les groupes sont des grappes*.

a) le nombre d'oscillateurs de certains groupes devient infini.

Alors, pour ces groupes $\Delta^{(i)} \rightarrow 0$, à moins qu'ils ne soient des grappes. Si ce sont des grappes $\Delta^{(i)} = 1$ et P ne sera différent de zéro que si le nombre d'oscillateurs non associées en grappes est fini.

Finalement (lorsque $2n \rightarrow \infty$) on peut dire que :

a) les « organisations molaires » ont en général une *probabilité nulle*.

b) seules ont une *probabilité finie* — donc une existence possible — les organisations dans lesquelles les oscillateurs *sont inclus dans des grappes*, sauf un nombre fini (donc négligeable) d'entre eux.

Cherchons maintenant parmi les groupements de n oscillateurs en grappes, ceux qui sont les plus fréquents. Le nombre de manières de réaliser la distribution dans laquelle la $i^{\text{ème}}$ grappe contient p_i oscillateurs est :

$$\frac{n!}{p_1! p_2! \cdots p_k!}$$

Ce nombre est maximum pour :

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_k = \frac{n}{k}$$

Ce sont donc les grappes égales qui sont les plus fréquentes.

C'est en cela que consiste notre interprétation de la quantification.

Un oscillateur aléatoire complexe étant considéré, *a priori*, comme susceptible d'une suite *continue* d'états réalisés par des corrélations entre les oscillateurs élémentaires qui le composent, on démontre que dans cette suite continue, seule une suite *discrète* correspond à une *probabilité appréciable* (les groupements en grappes égales). Les états de cette suite discrète sont les *états quantifiés*. Il leur correspond des énergies de l'oscillateur complexe qui sont des multiples du produit de leur fréquence par une grandeur ayant les dimensions d'une action et caractéristique des oscillateurs élémentaires composants.