

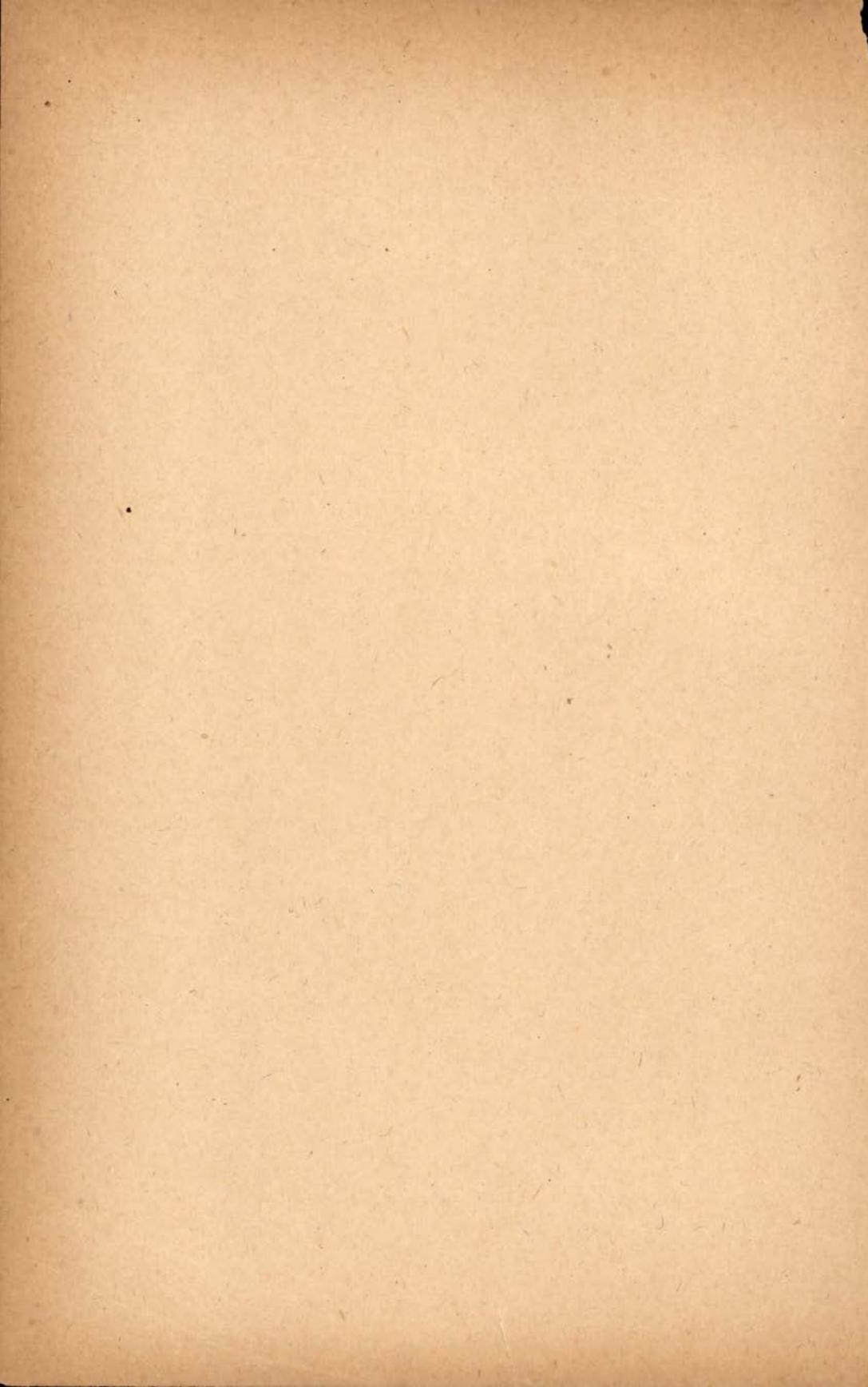
PORTUGALIAE PHYSICA

VOLUME I

1 9 4 3 - 4 5



INSTITUTO PARA A ALTA CULTURA
CENTRO DE ESTUDOS DE FÍSICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA
PORTUGAL



PORTUGALIAE PHYSICA

VOLUME I

1 9 4 3 - 4 5



INSTITUTO PARA A ALTA CULTURA
CENTRO DE ESTUDOS DE FÍSICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA
PORTUGAL

COMISSÃO DE REDACÇÃO :

A. CYRILLO SOARES, M. T. ANTUNES, A. MARQUES DA SILVA E M. VALADARES

EDITOR :

A. CYRILLO SOARES (Director do Laboratório de Física da Fac. de Ciências de Lisboa)

PREÂMBULO

Quando em 1929 foi criada em Portugal a instituição pública que primeiro teve o nome de **Junta de Educação Nacional** e posteriormente recebeu a designação de **Instituto para a Alta Cultura**, deu-se um primeiro e importante passo no sentido de prover de remédio um mal já de há muito reconhecido e lamentado por todos os espiritos cultos que se haviam detido no exame e apreciação das actividades científicas no nosso país.

Com efeito, reconhecia-se que a contribuição portuguesa para a obra de acrescentamento das Ciências que, de um modo geral, se apresentava escassa em qualquer campo de investigação científica que se considerasse, era praticamente nula em alguns sectores de estudo, como o da Física, por exemplo.

A falta de recursos materiais dos nossos laboratórios universitários e até as condições de vida do pessoal ao serviço dos mesmos não favoreciam a criação de ambiente adequado ao desenvolvimento da actividade investigatória.

O envio ao estrangeiro pela instituição acima referida de numerosos diplomados pelas nossas escolas superiores, mediante a concessão de bolsas de estudo que lhes têm permitido estágios de apreciável duração em centros de elevada cultura, as qualidades desses bolseiros que, de um modo geral, se têm afirmado aptos para as tarefas da investigação científica, instruindo-se e treinando-se nas técnicas dos trabalhos laboratoriais com proveito, para alguns tão notável que os tornou competentes, não só para

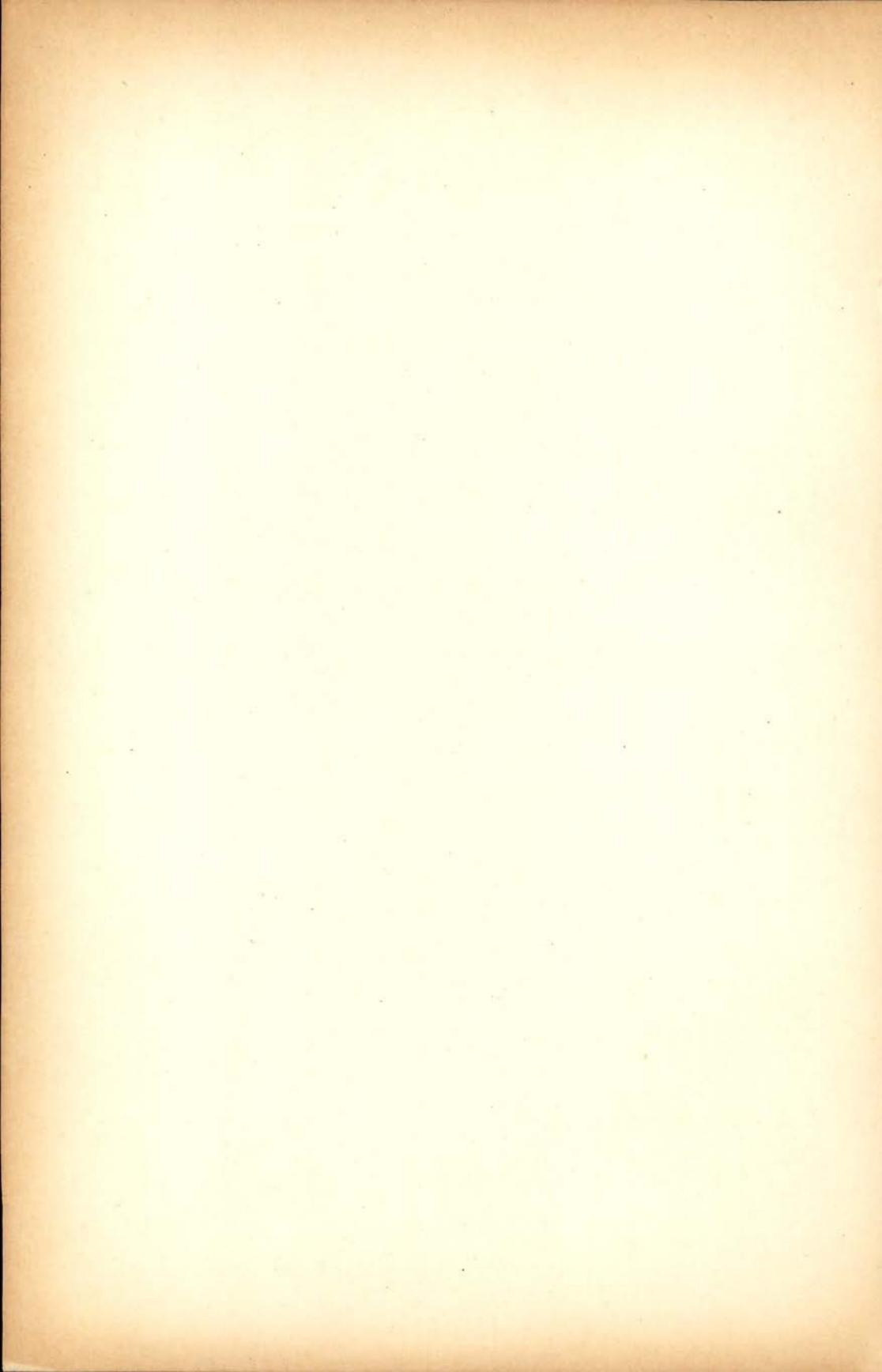
*investigar com êxito, mas até para instruir outros nas referidas técnicas e atraí-los com entusiasmo para essa forma de actividade, são factores que têm vindo, desde o regresso a Portugal dos primeiros bolseiros, a modificar sensivelmente a situação do nosso País sob o ponto de vista da sua contribuição para a obra de desenvolvimento da **Ciência** em que tôdas as nações civilizadas devem colaborar.*

O Instituto para a Alta Cultura, subsidiando laboratórios universitários e concedendo bôlsas de estudo no País a alguns dos seus bolseiros regressados do estrangeiro e a outros estudiosos que por aquêles têm sido iniciados nas técnicas científicas modernas, poudo ao fim de uma escassa dúzia de anos considerar demonstrada a utilidade da sua função social pela produção de trabalhos científicos de seguro merecimento e reconhecer, em conseqüência, a necessidade de se criarem os órgãos de publicação dêsses resultados e do estabelecimento de relações científicas tão estreitas quanto possível dos nossos centros de investigação e de seus membros com os meios culturais do estrangeiro.

O exposto levou o Instituto referido a subsidiar a publicação de «Portugaliae Physica» em que os físicos portugueses registarão os resultados dos seus trabalhos e em que contam incluir a colaboração de ilustres cientistas estrangeiros.

ÍNDICE
(Table des matières)

PREÂMBULO	v-vi
M. T. ANTUNES — Les valeurs de l'énergie de la configuration électronique $3d^2 4p$	1- 14
A. GIBERT — Analyse de spectres β de raies	15- 28
RUY LUÍS GOMES — Sur une généralisation de l'opérateur de projection $\mathcal{E}(1)$	29- 34
MANUEL VALADARES — La loi photoélectrique d'Einstein et le phénomène de conversion interne	35- 42
A. GIBERT, F. ROGGEN et J. ROSSEL — Sur les masses de Cl^{35} et Cl^{37}	43- 46
J. PALACIOS — Sur la myopie et le presbytisme nocturnes.	47- 58
A. PROCA — Sur un nouveau type d'électron.	59- 66
LÍDIA SALGUEIRO — Spectrographie du rayonnement γ emis par le dépôt à évolution lente du radon	67- 72
MANUEL VALADARES — Le spectre L de rayons X du radium D	73- 76
J. PALACIOS et L. LOZANO CALVO — L'aimantation du nickel par compression unilatérale	77- 92
GUIDO BECK — Remarque sur la notion du champ électromagnétique dans la théorie de Dirac	93- 94
G. DEDEBANT et PH. WEHRLÉ — Mécanique aléatoire. — 1 ^{ère} partie : Le calcul aléatoire	95-150
MARIETA DA SILVEIRA — Sur l'absorption du rayonnement γ emis par l'uranium I et leur descendants immédiats	151-158
CARLOS A. C. BRAGA — Étude de la transmutation $Ra D \rightarrow Ra E$ par spectrographie magnétique du rayonnement β de conversion interne	159-166
MARIETA DA SILVEIRA — Radioactivité naturelle par émission de neutrons.	167-174
MARIETA DA SILVEIRA — Sur l'absorption du rayonnement γ emis par l'UX complexe.	175-177
G. DEDEBANT et PH. WEHRLÉ — Mécanique aléatoire	179-294
J. PALACIOS et M. T. VIGÓN — L'adsorption de cations par le charbon actif. Confirmations expérimentales	295-316
Obras recebidas	317-326



LES VALEURS DE L'ÉNERGIE DE LA CONFIGURATION
ÉLECTRONIQUE $3d^2 4p$

par M. T. ANTUNES (À LISBONNE)

(Février, 1943)

On a calculé la matrice des interactions électrostatique et orbite-spin de d^2p en profitant des résultats déjà obtenus pour d^8p ¹. L'équation séculaire est adaptée approximativement aux valeurs expérimentales des niveaux d'énergie de cette configuration dans Ti II. On donne simultanément les valeurs calculées et les empiriques.

Étant donné le grand nombre des niveaux énergétiques impairs qu'on rencontre dans la plupart des atomes neutres ou ionisés, nous avons cru intéressant faire le calcul de l'énergie de ces atomes, dans l'espoir d'arriver à confirmer les attributions, faites par divers auteurs, des niveaux empiriques à des termes spectrales et configurations électroniques.

Nous avons calculé, par cette raison, l'énergie de d^2p et adapté l'équation séculaire obtenue aux valeurs trouvées empiriquement dans $3d^8 4p$ de Co I¹.

Maintenant nous présentons le résultat d'un calcul semblable pour d^2p et de l'adaptation de l'équation séculaire respective aux valeurs empiriques de $3d^2 4p$ dans Ti II.

LA MATRICE DE L'ÉNERGIE

Les éléments de matrice de l'énergie d'interaction électrostatique qu'on a obtenu sont les suivants :

¹ Travail paru en 1942 dans Physical Review.

a) *Éléments diagonaux* :

$$({}^2\text{H} | \text{Q} | {}^2\text{H}) = \text{F}_0 + 4\text{F}_2 + \text{F}_4 + 2\text{F}'_0 + 4\text{F}'_2 - 6\text{G}_1 - 3\text{G}_3$$

$$({}^4\text{G} | \text{Q} | {}^4\text{G}) = \text{F}_0 - 8\text{F}_2 - 9\text{F}_4 + 2\text{F}'_0 + \text{F}'_2 - 9\text{G}_1 - 12\text{G}_3$$

$$({}^2\text{G}_a | \text{Q} | {}^2\text{G}_a) = \text{F}_0 - 8\text{F}_2 - 9\text{F}_4 + 2\text{F}'_0 + \text{F}'_2 + \frac{9}{2}\text{G}_1 + 6\text{G}_3$$

$$({}^2\text{G}_b | \text{Q} | {}^2\text{G}_b) = \text{F}_0 + 4\text{F}_2 + \text{F}_4 + 2\text{F}'_0 - 11\text{F}'_2 + \frac{3}{2}\text{G}_1 - 18\text{G}_3$$

$$({}^4\text{F} | \text{Q} | {}^4\text{F}) = \text{F}_0 - 8\text{F}_2 - 9\text{F}_4 + 2\text{F}'_0 - 3\text{F}'_2 - \text{G}_1 - 48\text{G}_3$$

$$({}^2\text{F}_a | \text{Q} | {}^2\text{F}_a) = \text{F}_0 + 4\text{F}_2 + \text{F}_4 + 2\text{F}'_0 + \frac{55}{7}\text{F}'_2 - \frac{3}{14}\text{G}_1 - \frac{372}{7}\text{G}_3$$

$$({}^2\text{F}_b | \text{Q} | {}^2\text{F}_b) = \text{F}_0 - 3\text{F}_2 + 36\text{F}_4 + 2\text{F}'_0 - \frac{6}{7}\text{F}'_2 - \frac{23}{7}\text{G}_1 - \frac{69}{7}\text{G}_3$$

$$({}^2\text{F}_c | \text{Q} | {}^2\text{F}_c) = \text{F}_0 - 8\text{F}_2 - 9\text{F}_4 + 2\text{F}'_0 - 3\text{F}'_2 + \frac{1}{2}\text{G}_1 + 24\text{G}_3$$

$$({}^4\text{D}_a | \text{Q} | {}^4\text{D}_a) = \text{F}_0 - 7\text{F}_2 - 14\text{F}_4 + 2\text{F}'_0 - \frac{7}{3}\text{F}'_2 + \frac{8}{3}\text{G}_1 - 77\text{G}_3$$

$$({}^4\text{D}_b | \text{Q} | {}^4\text{D}_b) = \text{F}_0 + 6\text{F}_2 - 79\text{F}_4 + 2\text{F}'_0 + \frac{10}{3}\text{F}'_2 - \frac{20}{3}\text{G}_1 - 40\text{G}_3$$

$$({}^2\text{D}_a | \text{Q} | {}^2\text{D}_a) = \text{F}_0 - 8\text{F}_2 - 9\text{F}_4 + 2\text{F}'_0 + \frac{12}{5}\text{F}'_2 - \frac{2}{5}\text{G}_1 + \frac{219}{5}\text{G}_3$$

$$({}^2\text{D}_b | \text{Q} | {}^2\text{D}_b) = \text{F}_0 - 3\text{F}_2 + 36\text{F}_4 + 2\text{F}'_0 + 3\text{F}'_2 - 2\text{G}_1 - \frac{57}{2}\text{G}_3$$

$$({}^2\text{D}_c | \text{Q} | {}^2\text{D}_c) = \text{F}_0 + 7\text{F}_2 - 84\text{F}_4 + 2\text{F}'_0 - \frac{7}{5}\text{F}'_2 + \frac{12}{5}\text{G}_1 + \frac{147}{10}\text{G}_3$$

$$({}^4\text{P} | \text{Q} | {}^4\text{P}) = \text{F}_0 + 7\text{F}_2 - 84\text{F}_4 + 2\text{F}'_0 + 7\text{F}'_2 - 6\text{G}_1 - 63\text{G}_3$$

$$({}^2\text{P}_a | \text{Q} | {}^2\text{P}_a) = \text{F}_0 + 7\text{F}_2 - 84\text{F}_4 + 2\text{F}'_0 + 7\text{F}'_2 + 3\text{G}_1 + \frac{63}{2}\text{G}_3$$

$$({}^2\text{P}_b | \text{Q} | {}^2\text{P}_b) = \text{F}_0 + 14\text{F}_2 + 126\text{F}_4 + 2\text{F}'_0 + 0 \cdot \text{F}'_2 - 2\text{G}_1 - 21\text{G}_3$$

$$({}^2\text{P}_c | \text{Q} | {}^2\text{P}_c) = \text{F}_0 - 3\text{F}_2 + 36\text{F}_4 + 2\text{F}'_0 - 3\text{F}'_2 + \text{G}_1 - \frac{69}{2}\text{G}_3$$

$$({}^4\text{S} | \text{Q} | {}^4\text{S}) = \text{F}_0 + 7\text{F}_2 - 84\text{F}_4 + 2\text{F}'_0 - 14\text{F}'_2 + 6\text{G}_1 - 42\text{G}_3$$

$$({}^2\text{S} | \text{Q} | {}^2\text{S}) = \text{F}_0 + 7\text{F}_2 - 84\text{F}_4 + 2\text{F}'_0 - 14\text{F}'_2 - 3\text{G}_1 + 21\text{G}_3$$

b) *Éléments non-diagonaux :*

$$({}^2G_a | Q | {}^2G_b) = -\frac{3\sqrt{15}}{2} \left\{ \begin{array}{l} G_1 - 2G_3 \end{array} \right\}$$

$$({}^2F_a | Q | {}^2F_b) = \frac{6\sqrt{3}}{7} \left\{ \begin{array}{l} 4F'_2 - G_1 - 3G_3 \end{array} \right\}$$

$$({}^2F_b | Q | {}^2F_c) = -\frac{30}{\sqrt{21}} \left\{ \begin{array}{l} G_1 - 3G_3 \end{array} \right\}$$

$$({}^2F_c | Q | {}^2F_a) = \frac{9}{2\sqrt{7}} \left\{ \begin{array}{l} G_1 + 18G_3 \end{array} \right\}$$

$$({}^4D_a | Q | {}^4D_b) = \sqrt{14} \left\{ \begin{array}{l} -F_2 + 5F_4 + \frac{7}{3}F'_2 - \frac{2}{3}G_1 - 7G_3 \end{array} \right\}$$

$$({}^2D_a | Q | {}^2D_b) = -\frac{\sqrt{30}}{5} \left\{ \begin{array}{l} G_1 + 33G_3 \end{array} \right\}$$

$$({}^2D_b | Q | {}^2D_c) = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{21}{5}} \left\{ \begin{array}{l} -2G_1 + 9G_3 \end{array} \right\}$$

$$({}^2D_c | Q | {}^2D_a) = -\frac{3\sqrt{14}}{5} \left\{ \begin{array}{l} 4F'_2 + G_1 + 3G_3 \end{array} \right\}$$

$$({}^2P_a | Q | {}^2P_b) = 3\sqrt{3} \left\{ \begin{array}{l} -G_1 + 7G_3 \end{array} \right\}$$

$$({}^2P_b | Q | {}^2P_c) = \sqrt{7} \left\{ \begin{array}{l} -4F'_2 + G_1 + 3G_3 \end{array} \right\}$$

$$({}^2P_c | Q | {}^2P_a) = -\frac{15\sqrt{21}}{2} \left\{ \begin{array}{l} G_3 \end{array} \right\}$$

La signification des paramètres qui entrent dans ces expressions est la suivante :

$$\begin{aligned} F_0 &= F_0(n2 n2); F_2 = (1/49)F_2(n2 n2); F_4 = (1/441)F_4(n2 n2); \\ F'_0 &= F'_0(n2 n'1); F'_2 = (1/25)F'_2(n2 n'1); G_1 = (1/15)G_1(n2 n'1); \\ G_3 &= (1/245)G_2(n2 n'1). \end{aligned}$$

Les symboles $F_k(nl n'l')$ et $G_k(nl n'l')$ représentent les intégraux de Slater.

Les éléments de matrice de l'énergie d'interaction magnétique orbite-spin relativement aux fonctions Ψ (SLJM) sont les suivants, groupés par valeurs de J :

$$J=5\frac{1}{2};$$

	${}^2\text{H}$	${}^4\text{G}$
${}^2\text{H}$	$\frac{1}{2}b$	a
${}^4\text{G}$		$\frac{1}{2}(3a+b)$

$$J=4\frac{1}{2};$$

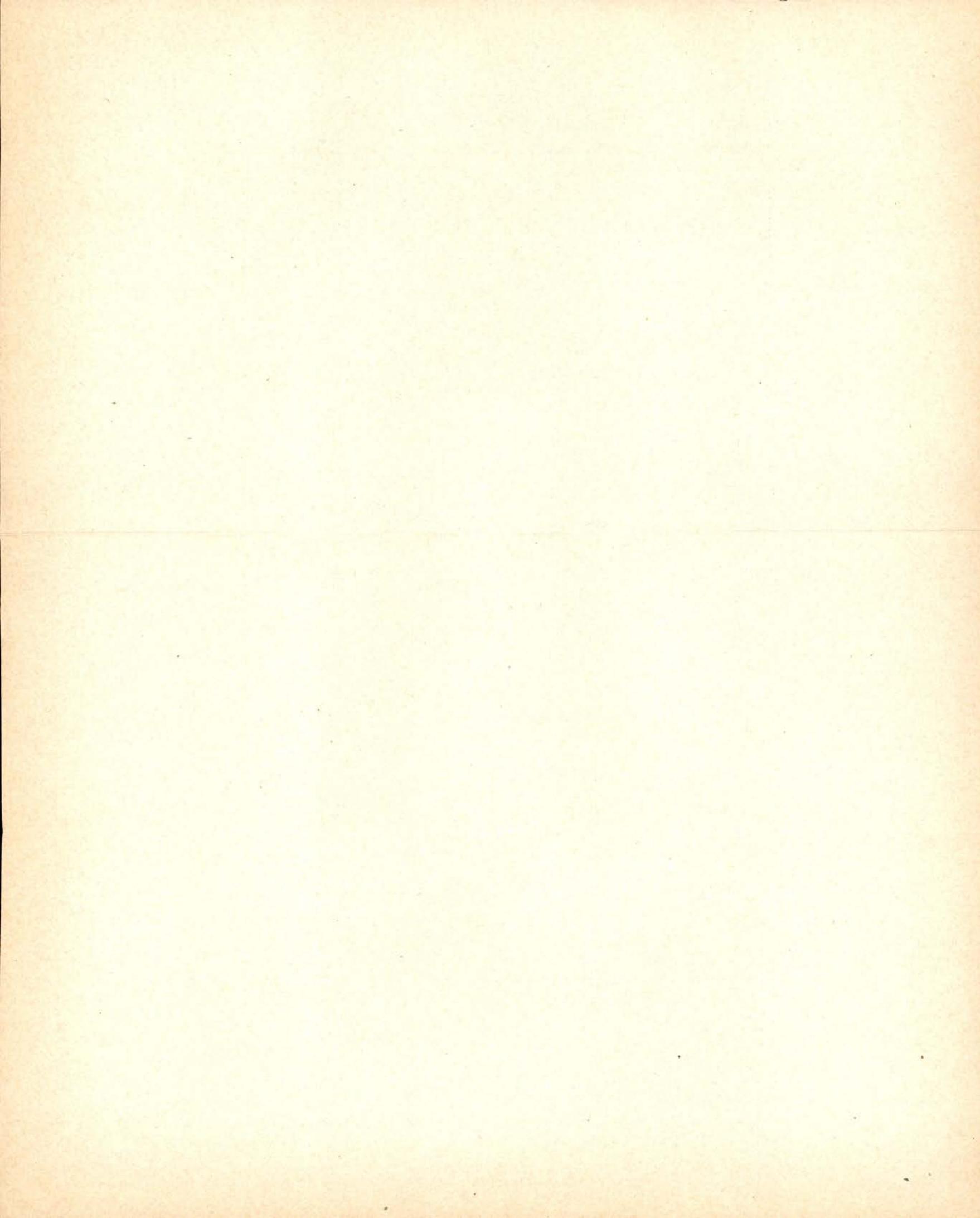
	${}^2\text{H}$	${}^4\text{G}$	${}^2\text{G}_a$	${}^2\text{G}_b$	${}^4\text{F}$
${}^2\text{H}$	$-\frac{3}{5}b$	$\frac{2}{\sqrt{15}}a$	$\sqrt{\frac{11}{15}}a$	$\frac{\sqrt{11}}{5}b$	0
${}^4\text{G}$		$\frac{1}{24}(3a+b)$	$\frac{\sqrt{11}}{12}(3a-2b)$	$-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{15}}a$	$\frac{\sqrt{11}}{8}(-a+b)$
${}^2\text{G}_a$			$a - \frac{b}{6}$	$\frac{1}{2\sqrt{15}}a$	$\frac{1}{4}(a+2b)$
${}^2\text{G}_b$				$\frac{1}{10}b$	$\frac{\sqrt{15}}{4}a$
${}^4\text{F}$					$\frac{1}{8}(11a+b)$

$J=3^{1/2};$

4G	4G	2G_6	4F	2F_6	2F_6	2F_6	4D_6	4D_6
$-\frac{1}{2}(3a+b)$	$\frac{\sqrt{35}}{24}(3a-2b)$	$-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{7}{3}}a$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{7}}(-a+b)$	$\frac{1}{56}\sqrt{\frac{5}{3}}a$	$-\frac{3}{7}\sqrt{5}a$	$-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{7}}(a+2b)$	0	0
2G_6	2G_6	2G_6	4F	2F_6	2F_6	2F_6	0	0
	$-\frac{5}{4}\left(a-\frac{b}{6}\right)$	$-\frac{5}{8}\frac{1}{\sqrt{15}}a$	$\frac{1}{8}(a+2b)$	$-\frac{1}{8\sqrt{21}}a$	$\frac{3}{\sqrt{7}}a$	$-\frac{\sqrt{3}}{8}(2a+b)$	0	0
2G_6		$-\frac{1}{8}b$	$\frac{\sqrt{15}}{8}a$	$\frac{\sqrt{35}}{8}b$	0	$\frac{3\sqrt{5}}{8}a$	0	0
4F			0	$-\frac{3}{8}\sqrt{\frac{5}{7}}a$	$-\frac{1}{\sqrt{7}}a$	$\frac{1}{8\sqrt{3}}(11a-2b)$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}(a-b)$	$-\frac{1}{3\sqrt{7}}(a-b)$
2F_6				$-\frac{3}{8}b$	0	$\frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{7}}a$	$\sqrt{\frac{6}{7}}a$	$\frac{\sqrt{3}}{7}a$
2F_6				$\frac{1}{2}b$		$\frac{1}{\sqrt{21}}a$	$\frac{5}{3}\frac{1}{\sqrt{14}}a$	$\frac{29}{21}a$
4D_6						$\frac{1}{24}(22a-b)$	$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}(a+2b)$	$\frac{1}{9}\sqrt{\frac{3}{7}}(a+2b)$
4D_6							$\frac{1}{18}(23a-5b)$	$\frac{\sqrt{14}}{18}(a-b)$
4D_6								$\frac{1}{9}(5a+4b)$

$J=2^{1/2}$

4G	4G	4F	2F_a	2F_b	2F_c	4D_a	4D_b	2D_a	2D_b	2D_c	4P
$-\frac{5}{8}(3a+b)$	$\frac{15}{8\sqrt{35}}(-a+b)$	$-\frac{7}{72}(11a+b)$	$\frac{1}{28}a$	$-\frac{6\sqrt{3}}{7}a$	$-\frac{3}{4\sqrt{7}}(a+2b)$	0	0	0	0	0	0
			$\frac{1}{4\sqrt{7}}a$	$-\frac{2\sqrt{15}}{9\sqrt{7}}a$	$\frac{\sqrt{5}}{36}(11a-2b)$	$-\frac{16}{9\sqrt{15}}(a-b)$	$-\frac{16}{9\sqrt{210}}(a-b)$	$-\frac{2}{9}(a+2b)$	$\frac{16}{3\sqrt{30}}a$	0	0
			$\frac{1}{2}b$	0	$-\frac{1}{2\sqrt{7}}a$	$\frac{2}{\sqrt{21}}a$	$\frac{\sqrt{6}}{21}a$	$\sqrt{\frac{5}{7}}a$	0	0	0
				$\frac{2}{3}b$	$-\frac{4}{3\sqrt{21}}a$	$\frac{5}{9\sqrt{7}}a$	$\frac{29\sqrt{2}}{63}a$	$-\frac{2}{3\sqrt{105}}a$	$-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{5}}b$	$-\frac{7}{\sqrt{30}}a$	0
					$-\frac{1}{18}(22a-b)$	$\frac{2}{9\sqrt{3}}(a+2b)$	$\frac{2}{9\sqrt{42}}(a+2b)$	$-\frac{\sqrt{5}}{9}(2a+b)$	$-\frac{8}{3\sqrt{6}}a$	0	0
						$-\frac{1}{108}(23a-5b)$	$-\frac{V^{14}}{108}(a-b)$	$\frac{14}{9\sqrt{15}}(2a+b)$	$\frac{7}{18\sqrt{2}}a$	$\frac{V^7}{6\sqrt{30}}(a-2b)$	$\frac{V^7}{12\sqrt{5}}(a-b)$
							$-\frac{1}{54}(5a+4b)$	$\frac{2}{9}\sqrt{\frac{7}{30}}(2a+b)$	$\frac{5\sqrt{7}}{18}a$	$-\frac{7}{6\sqrt{15}}(a-2b)$	$-\frac{7}{6\sqrt{10}}(a-b)$
								$\frac{1}{9}(8a+b)$	$-\frac{4}{3\sqrt{30}}a$	0	0
								$\frac{1}{6}b$	$\frac{7}{2\sqrt{105}}a$	$\frac{1}{6}(2a-b)$	$-\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{10}}a$
										$-\frac{1}{2\sqrt{6}}(a+2b)$	$\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{10}}a$
											$\frac{1}{4}(a+b)$



$J = 1/2$

	4D_a	4D_b	4P	2P_a	2P_b	2P_c	2S
4D_a	$-\frac{1}{12}(23a-5b)$	$\frac{\sqrt{14}}{12}(a-b)$	$\frac{1}{12\sqrt{3}}(a-b)$	$\frac{1}{6\sqrt{6}}(a+2b)$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a$	$\frac{5\sqrt{14}}{12}a$	0
4D_b		$-\frac{1}{6}(5a+4b)$	$-\frac{7}{6\sqrt{42}}(a-b)$	$-\frac{\sqrt{21}}{18}(a+2b)$	$-\frac{2\sqrt{7}}{3}a$	$\frac{1}{6}a$	0
4P			$-\frac{5}{12}(a+b)$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}(a-2b)$	$-\frac{2}{\sqrt{6}}a$	$\frac{7}{2\sqrt{42}}a$	$\frac{1}{3}(a+2b)$
2P_a				$-\frac{1}{6}(2a-b)$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}a$	$\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}a$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}(2a+b)$
2P_b					$-b$	0	$\frac{10}{3\sqrt{6}}a$
2P_c						$\frac{1}{2}b$	$\frac{\sqrt{21}}{3\sqrt{2}}a$
2S							0

Dans ces expressions a et b représentent les valeurs de l'intégral $\zeta_{nl} = \int_0^{\infty} \mathfrak{R}^2(nl) \zeta(r) dr$, $\zeta(r) = (1/(2m^2 c^2))(1/r)(\partial V(r)/\partial r)$, respectivement pour $l=2$ (électron d) et $l=1$ (électron p).

Les éléments de matrice de l'énergie d'interaction orbite-spin présentent la circonstance remarquable d'être de la forme $-ca + c'b$, $ca + c'b$ étant l'élément correspondant dans $d^s p$.

Le calcul a été fait en utilisant des fonctions d'ordre zero avec les mêmes Σm_l et Σm_s et la même ordre conventionnelle des fonctions utilisées dans le calcul précédent de $d^s p$, les deux types de fonctions ayant précisément les mêmes éléments de matrice de l'énergie d'interaction orbite-spin.

LES VALEURS DE L'ÉNERGIE

Chaque élément de la matrice complète de l'énergie est la somme des éléments correspondants de l'interaction électrostatique et de l'interaction orbite-spin (en négligeant l'interaction entre configurations).

L'équation séculaire a été traitée de la manière approximative suivante: On a négligé les éléments qui dépendent exclusivement de l'énergie d'interaction orbite-spin; de cette sorte l'équation s'est fractionnée dans un certain nombre d'équations dont la plupart est linéaire. On a appliqué la méthode des moindres carrés au système constitué par les équations linéaires et par la somme des racines de chacune des équations du deuxième degré, les termes indépendants étant les valeurs empiriques respectives; on n'a pas ajouté à ce système la somme des racines de chacune des équations du troisième degré.

On a obtenu les valeurs suivantes des paramètres:

F_2	1079,407
F_4	85,34666
F'_2	311,6613
G_1	349,5577
G_3	9,861646
a	130,8642
b	214,5534.

Ces valeurs des paramètres ont été substituées dans le système d'équations dérivées de l'équation séculaire et l'on a cherché les valeurs de l'énergie qui satisfont à ce système. On a rencontré ainsi la solution qu'on présente immédiatement, chaque valeur calculée de l'énergie étant accompagnée de la valeur empirique correspondante:

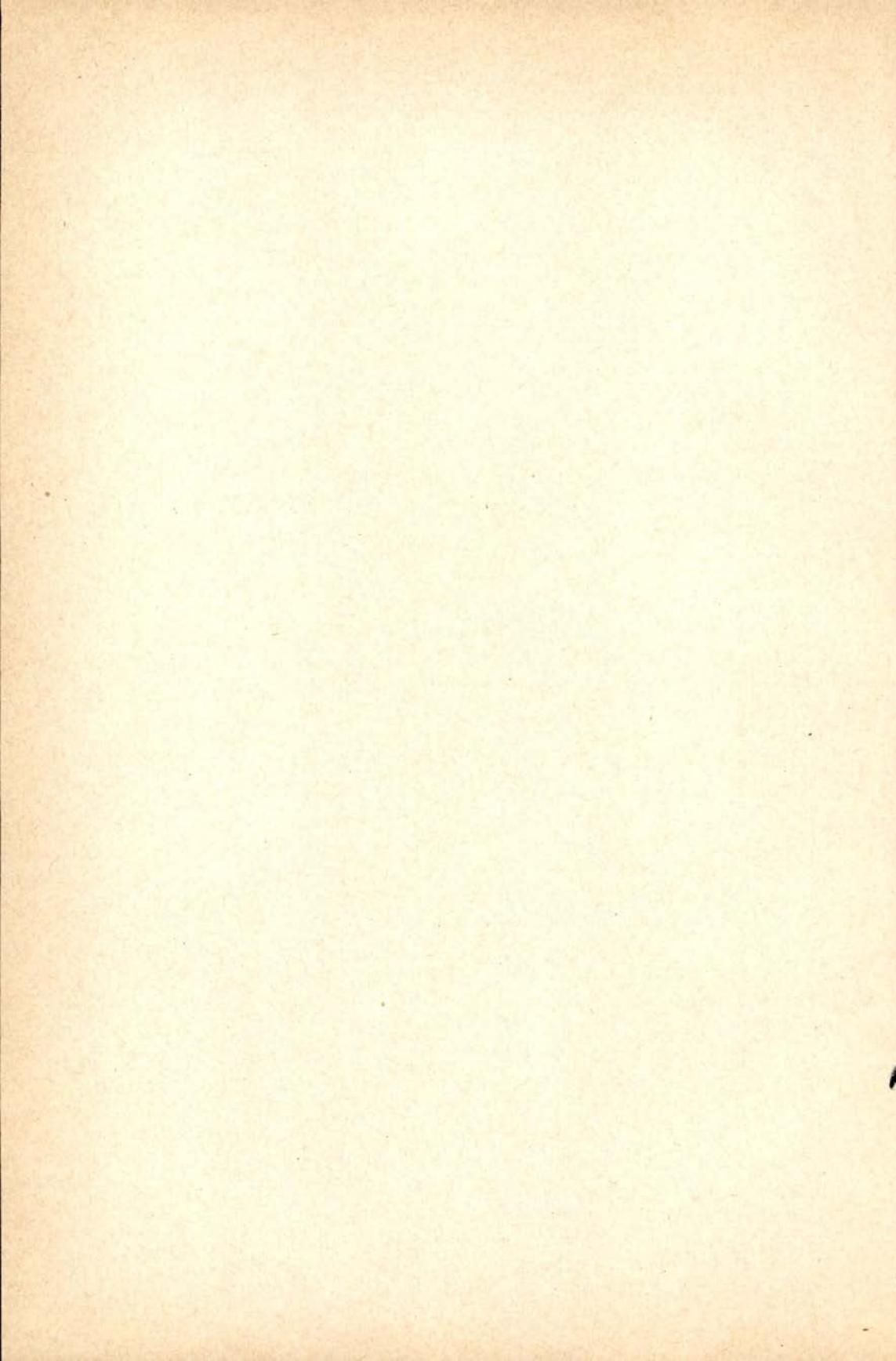
Énergie dans la configuration électronique $3d^2 4p$ de Ti II
Valeurs calculées et valeurs empiriques

Termes	J	Valeurs empiriques cm ⁻¹	Valeurs calculées cm ⁻¹	Termes	J	Valeurs empiriques cm ⁻¹	Valeurs calculées cm ⁻¹
² H	5 1/2	45909	45909	⁴ D _b	3 1/2	40798	40546
	4 1/2	45674	45673		2 1/2	40582	40396
⁴ G	5 1/2	30241	30227		1 1/2	40426	40254
	4 1/2	29968	29949	1/2	40330	40168	
	3 1/2	29734	29721	² D _a	2 1/2	32026	32591
	2 1/2	29544	29544		1 1/2	31757	32293
² G _a	4 1/2	34748	34519	² D _b	2 1/2	39477	41514
	3 1/2	34543	34297		1 1/2	39233	41353
² G _b	4 1/2	43781	44019	² D _c	2 1/2	44902	45228
	3 1/2	43741	43979		1 1/2	44915	45277
⁴ F	4 1/2	31301	31325	⁴ P	2 1/2	42209	42216
	3 1/2	31114	31118		1 1/2	42069	42072
	2 1/2	30959	30957		1/2	41997	41985
	1 1/2	30837	30843	² P _a	1 1/2	39603	40886
² F _a	3 1/2	31491	31889		1/2	39675	41153
	2 1/2	31207	31608	² P _b	1 1/2	45549	46176
² F _b	3 1/2	40075	41053		1/2	45473	45953
	2 1/2	39927	40839	² P _c	1 1/2	—	67630
² F _c	3 1/2	47467	48684		1/2	—	67413
	2 1/2	47625	48855	⁴ S	1 1/2	40027	39986
⁴ D _a	3 1/2	32767	32982		² S	1/2	37431
	2 1/2	32698	32860				
	1 1/2	32603	32773				
	1/2	32532	32720				

Le résultat précédent surpasse les expectatives habituelles dans les calculs de cette nature. Il suffit évidemment pour confirmer les attributions faites par Russell¹ des valeurs empiriques de l'énergie de Ti II aux termes de $3d^2 4p$.

CENTRO DE ESTUDOS DE FÍSICA DO I. A. C.
FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA

¹ Astrophys. Jour., 66, 1, 1927.



ANALYSE DE SPECTRES β DE RAIES

par A. GIBERT (À LISBONNE)

(Juin 1942)

1. Plusieurs faits font penser que le phénomène de la conversion interne ne peut pas être dû exclusivement à un effet photo-électrique identique à ce que, par opposition, on a appelé depuis l'effet photo-électrique externe. Nous présenterons ici deux de ces faits, les plus généralement cités.

En 1926, dans sa thèse, Thibaud [1] a remarqué que la raie de 1334 ekV du spectre β naturel du RaC n'apparaissait pas dans le spectre excité ce qui fut confirmé plus tard par Ellis. Ceci montrait qu'une telle raie devrait correspondre à un coefficient de conversion unité, c'est-à-dire, qu'elle devrait provenir d'une radiation γ que se serait convertie totalement. D'ailleurs, dans le cas du ThC, la raie γ de 40 ekV indiquée comme très intense d'après le spectre β naturel n'a pas été retrouvée par Valadares [2] par spectrographie cristalline. Des cas analogues à ceux-ci sont assez fréquents dans la famille de l'actinium, ainsi que le montre l'analyse de Frilley [3]. D'autre part, dans cette même famille, et encore d'après Frilley [3], des anomalies d'un autre type apparaissent: les raies intenses du RaAc de 50 ekV et de 240 ekV et la raie de 144 ekV de l'AcX n'ont pas pu être identifiées par spectrographie β et ne sont connues que par la spectrographie cristalline. Ceci indiquerait, pour ces raies là, un coefficient d'absorption anormalement petit, nul même.

Ces deux cas extrêmes, inconnus dans le phénomène photo-électrique externe, ainsi que le fait que la probabilité de conversion interne est beaucoup plus grande que celle de la conversion externe, font douter de la légitimité de l'hypothèse qui attribuerait uniquement à un effet photo-électrique les phénomènes de conversion interne.

Mais ce n'est pas tout, et un autre fait semble bien difficile d'expliquer si l'on n'accepte pas qu'il existe, en dehors de l'effet photo-électrique interne, une autre cause, au moins, capable de justifier les spectres β naturels. En effet, si nous examinons le tableau donné par Ellis (page 362, Proc. Roy. Soc. 143, 1934) nous trouverons, non classées,

plusieurs raies très intenses, parmi lesquelles la raie Aa_3 , intensité 20, est l'exemple le plus frappant. D'autre part, parmi les raies classées, il y en a une dont l'intensité est 3, deux dont l'intensité est 4 et plusieurs dont l'intensité est 8. La raie Ha_1 , dont l'intensité est 11, est encore un exemple parmi tant d'autres. Nous verrons plus loin comment on peut expliquer quelques unes de ces raies au moyen d'une nouvelle hypothèse sur l'émission des spectres β naturels.

2. L'explication des spectres β secondaires sur l'hypothèse d'un effet photo-électrique interne se fait de la manière suivante: un photon d'énergie $h\nu$, émis par le noyau excité, transmet son énergie à un électron extra-nucléaire (conversion), celui-ci prenant alors une énergie cinétique $h\nu - E_x$, où E_x est le travail d'extraction de l'électron du niveau X duquel il a été arraché.

Dans ces conditions toutes les raies du spectre β devraient donc être dues à des électrons dont les énergies auraient nécessairement l'une des valeurs possibles $h\nu - E_x$. Cependant, quoique l'accord soit excellent entre cette hypothèse et de très nombreux résultats expérimentaux, il arrive que certaines raies ne peuvent pas être classées dans le cadre de cette hypothèse.

En 1933, Stahel [4] a vérifié que les énergies de quelques unes des raies non classées étaient sensiblement égales à certaines valeurs calculées du type $h\nu - 2E_x$ ou $h\nu - E_x - E_y$.

Pour interpréter ces faits, qui ne trouvaient pas d'explication dans l'effet photo-électrique simple, Stahel fit l'hypothèse de l'existence d'un effet de couplage entre le noyau excité d'un atome et les électrons extra-nucléaires, conçue de la façon suivante: Une partie de l'énergie $h\nu$ mise en jeu, serait utilisée dans le transfert d'un électron dans un niveau externe (d'énergie négligeable), et la partie restante serait un quantum d'énergie $h\nu - E_x$, X étant le niveau d'où l'électron a été arraché. Ce quantum pourrait, à son tour, se convertir, de la façon ordinaire, dans un autre niveau (ou dans le même) donnant ainsi naissance à des rayons β d'énergie $h\nu - E_x - E_y$ ou $h\nu - 2E_x$.

On pourrait penser qu'il s'agirait encore d'un effet photo-électrique, qui serait *double*. Mais ceci est assez difficile d'admettre si l'on considère l'effet interne analogue à l'effet photo-électrique externe. En effet, pour celui-ci, la probabilité d'un effet simple n'est pas très grande et, par suite, la probabilité d'un effet double doit être bien moindre encore. Remarquons d'ailleurs que, dans les spectres β secondaires excités par les rayons X, on n'a jamais observé un phénomène analogue à cet effet *double*.

3. D'autre part il existe encore un autre fait curieux qui nous semble aussi digne d'attention. On observe des raies β dont l'énergie correspond à des valeurs $\frac{h\nu}{2} - E_x$, où $h\nu$ est l'une des valeurs de l'énergie d'excitation du noyau. On pourrait penser que ces raies seraient dues à des quanta d'énergie $h\nu' = \frac{h\nu}{2}$ et, en effet, dans certains, cas peu nombreux, il en est ainsi. Comme exemple nous ne citerons que le cas de la transformation $\text{ThC} \rightarrow \text{ThC}''$. En effet, du schéma des niveaux nucléaires du ThC'' [2] on déduit que les quanta émis lors des transitions $\alpha_2 - \alpha_4$ ou $\alpha_4 - \alpha_5$ ont une énergie qui est la moitié de celle qui est mise en jeu dans les transitions $\alpha_2 - \alpha_3$ ou $\alpha_0 - \alpha_2$. Dans ce cas il existe donc nécessairement des raies d'énergie $\frac{h\nu}{2} - E_x$, la relation numérique existant entre les différences énergétiques étant possiblement due au hasard.

Mais il y a de nombreux cas qui ne peuvent pas être expliqués par la relation $h\nu' = \frac{h\nu}{2}$, d'autant plus qu'on ne connaît pas de raisons théoriques qui rendraient probable une telle relation. Nous ferons ci-dessous l'analyse de ces cas. Ces faits nous ont fait penser que l'on pouvait admettre que, dans chaque transition nucléaire, l'énergie d'excitation d'un noyau, serait transmise aux électrons extra-nucléaires parmi lesquels elle serait distribuée d'une façon continue. La structure discrète du spectre secondaire s'expliquerait par le fait que cette distribution continue de l'énergie $h\nu$ se ferait d'après une loi de probabilité qui rendrait certaines répartitions de l'énergie beaucoup plus probables que les autres.

Bien que nous ne méconnaissions pas toutes les difficultés qui surgissent du point de vue théorique, nous pensons que cette hypothèse pourrait peut-être servir de base à l'explication des différents cas, vérifiés expérimentalement, que nous indiquons à la suite. Dans cet énoncé, nous supposons, pour simplifier, que des cas tels que $h\nu - 2E_x$ et $h\nu - E_x - E_y$ ne sont pas distincts.

1° — Si toute l'énergie $h\nu$ est transmise à un seul électron, on a les raies $h\nu - E_x$.

2° — Si toute l'énergie $h\nu$ est transmise également à deux électrons du même niveau, on a les raies $\frac{h\nu}{2} - E_x$ (§ 9).

3° — Si une partie de l'énergie est utilisée dans le déplacement d'un électron profond vers une couche extérieure, tandis que la partie res-

tante, donne lieu à l'expulsion d'un électron, on a les raies $h\nu - E_x - E_y$. Ce cas en comprend encore deux :

- a) La transmutation est une transformation β — Cas de Stahel (§§ 4 et 5).
 - b) La transmutation est une transformation α . On peut encore distinguer deux cas :
 - b_1) Structure fine de la radiation α (§§ 7 et 8).
 - b_2) Particules α de long parcours (§§ 6 et 8).
- 4° — Si l'énergie n'est transmise à aucun électron, on a la radiation γ .

Aux paragraphes suivants on trouvera des exemples de ces différents cas, à l'exception du 1^{er} et du 4°, bien connus, et l'on fait la discussion des résultats obtenus.

4. Examinons tout d'abord, de plus près, l'hypothèse de Stahel et des données qui en sont à la base.

D'après l'auteur, si l'effet de couplage existe, il doit avoir lieu, en particulier, pour les raies γ les plus intenses, ce que l'on peut vérifier en recherchant des raies β d'énergie donnée par $h\nu - 2E_x$ ou $h\nu - E_x - E_y$.

S'appuyant sur les données d'Ellis [5], Stahel trouve sept exemples pour la transformation $\text{Th B} \rightarrow \text{Th C}$. Ces cas sont reproduits dans le tableau I.

TABLEAU I

Nom	$h\nu$	raie β observée	$(h\nu - E_x - E_y)$ calculé
C ₁	237,9	58,0	$h\nu - 2E_K = 57,9$
Db	249,4	69,5	$h\nu - 2E_K = 69,4$
Eb ₂	299,0	118,6	$h\nu - 2E_K = 119,0$
Ed	249,4	144,9	$h\nu - E_K - E_L = 143,1$
F ₁	249,4	155,8	$h\nu - E_K - E_M = 155,4$
G ₁	299,0	192,4	$h\nu - E_K - E_L = 192,7$
Jb ₂	299,0	267,3	$h\nu - 2E_L = 266,4$

Cependant Sze Shih-Yuan [6] rattache la raie G₁ (d'après Sze, de 195,0 ekV) à la transformation $\text{Th C}'' \rightarrow \text{Th D}$. Plus tard, Arnoult [7] confirme l'existence d'une raie de 192,2 ekV (désignée toujours par G₁) et confirme aussi la raie G₂ de 194,9 (ou 194,1) ekV découverte par Surugue [8]. Or cette raie avait été attribuée par Surugue à la transformation $\text{Th C}'' \rightarrow \text{Th D}$ et par suite il ne paraît illogique de penser que

la raie G_1 attribuée par Arnoult à Sze n'est autre que la raie G_2 de Surugue.

Quoiqu'il en soit, la raie de 192,4 ekV (d'Ellis) confirmée plus tard avec la valeur de 192,1 ekV par Arnoult, n'a été classée par aucun de ces auteurs et il est donc plausible d'accepter pour elle l'explication de Stahel. La raie E_a est de même attribuée par Sze à la transformation $\text{Th } C'' \rightarrow \text{Th } D$ et ce classement est confirmé par Surugue (144,9 ekV) et par Arnoult (143,5 ekV). Remarquons que cette dernière valeur coïncide exactement avec la valeur calculée de Stahel. On pourrait donc penser que deux radiations, aussi bien celle de 249,4 ekV du $\text{Th } B$, que celle de 231,6 ekV du $\text{Th } C''$ sont responsables de la même raie β , de 143,5 ekV, bien que par des processus différents. D'autre part Ellis [9] a étudié le $\text{Th } C''$ isolé et a ainsi obtenu des raies qui ne peuvent être attribuées qu'à la transformation $\text{Th } C'' \rightarrow \text{Th } D$, et il ne donne pas la raie en question. On ne peut donc pas en conclure à un rejet de l'hypothèse de Stahel quant à l'origine de la raie E_a .

La raie C_1 , confirmée par Surugue, n'est pas retrouvée par Arnoult et n'a pas encore été classée. La raie Db attribuée par Sze (71,47 ekV) à la transformation $\text{Th } B \rightarrow \text{Th } C$ est plus tard confirmée par Surugue (69,74 ekV) et par Arnoult (69,10 ekV). La raie Eb_2 est attribuée par Sze (123,1 ekV) à la transformation $\text{Th } C'' \rightarrow \text{Th } D$, mais Surugue (119,1 ekV) en voit l'origine dans la transformation $\text{Th } B \rightarrow \text{Th } C$ tandis que Arnoult (120,0 ekV) ne la classe pas. La raie F_1 n'est pas citée par Sze mais Surugue la trouve (157,0 ekV) et Arnoult la confirme (154,8 ekV) mais aucun de ces auteurs ne la classe.

Sze trouve la raie Jb_2 (273,4 ekV) mais ne l'attribue pas au $\text{Th } B$, tandis que Surugue qui la retrouve (271,9 ekV) l'attribue à la transformation $\text{Th } C'' \rightarrow \text{Th } D$. Plus tard Arnoult à la suite d'une correction (264,3 ekV) ne peut pas accepter cette interprétation.

On vérifie ainsi, après cette analyse un peu longue, que les mesures qui ont suivi celles d'Ellis (qui sont à la base des calculs de Stahel) ne permettent pas d'exclure définitivement l'hypothèse de Stahel.

Cellui-ci donne encore, comme exemples deux raies de la transformation $\text{Ra } B \rightarrow \text{Ra } C$, de 116,0 ekV et de 61,7 ekV [10]. D'après des mesures plus récentes, la 1^{ère} de ces raies doit avoir la valeur 114,12 ekV. Stahel attribue cette raie, qui n'est pas encore classée, à un effet $h\nu - 2E_k$ du quantum de 296,6 ekV, dont la valeur récente est de 294 ekV. On aurait ainsi d'après les mesures récentes et d'accord avec Stahel, une raie β de $294 - 181 = 113$ ekV. L'accord est aussi bon que le primitif. Quant à l'autre raie, les mesures récentes d'Ellis [11] qui s'en rapprochent le plus ont les valeurs 52,64 ekV et 65,62 ekV.

Or, bien que la différence soit alors plus grande, la valeur la plus basse est la plus probable, à moins d'admettre qu'Ellis n'a pas observée la raie en question. Il faut maintenant, pour le quantum correspondant considéré par Stahel, prendre la valeur de 240,6 ekV ce qui donnerait pour la raie β une énergie de 60,0 ekV. Une telle raie n'apparaît pas dans la longue énumération donnée par Ellis, ce qui ne veut pas dire qu'elle ne puisse pas exister. D'autre part nous n'avons pas pu observer d'autres cas de ce type, dans le cas de la transformation $Ra B \rightarrow Ra C$, d'après les résultats d'Ellis [11].

En présence de ces faits, il nous semble que la meilleure conclusion à en tirer est que les données expérimentales dont nous disposons actuellement ne permettent pas de prendre une décision quant à la consistance numérique de l'hypothèse de Stahel.

5. Cependant n'importe lequel des cas cités par Stahel, comme nous l'avons remarqué plus haut, appartient au type des transformations radio-actives dans lesquelles l'émission γ est accompagnée de l'émission β . Il y a encore deux types d'émission γ en relation, tous les deux, avec l'émission α : quanta liés aux particules α de long parcours et quanta liés à la structure fine des particules α . Dans chaque cas le mécanisme de l'émission γ est distinct des autres et nous avons par cette raison, trouvé intéressant d'analyser, du point de vue dans le quel nous nous sommes placés, chacun des cas mentionnés. Particulièrement dans le cas de la transformation $Ra C \rightarrow Ra C'$ (particules α de long parcours) on disposait d'un système de niveaux énergétiques nucléaires très complet, déduit par Ruthford, Lewis et Bowden de l'analyse des particules α de long parcours [12], système permettant une étude plus parfaite.

En suivant, dès le début, les idées de Stahel nous avons procédé de la manière suivante: après avoir exclu toutes les raies β que l'on pouvait interpréter au moyen d'un effet photo-électrique interne simple, nous avons essayé d'expliquer les autres raies en ayant recours à l'effet de «couplage» pour les raies γ les *plus intenses* du spectre. Cependant cette marche ne nous a conduit à aucun cas remarquable.

Par la suite nous accepterons que quelques raies des spectres β secondaires naturels peuvent être dues à une transmission directe aux électrons extra-nucléaires, de l'énergie du noyau excité, quoique d'autres raies puissent être expliquées en acceptant que la conversion interne est due à un effet photo-électrique.

Remarquons encore une fois que l'hypothèse que cet effet est double, dans certains cas, n'est pas à exclure définitivement, mais elle apparaît comme très peu probable.

6. En présence de ces faits et une fois admise la possibilité que certaines raies β ne soient pas dues à la conversion interne de la radiation γ , nous avons pensé qu'il ne serait pas absurde d'admettre que ces raies correspondaient justement aux transitions α moins probables. Nous avons alors fait les calculs pour tous les $\gamma\gamma$ déduits des travaux précités de Rutherford, Lewis et Bowden. Nous avons réuni dans le tableau II les résultats qui nous ont semblé intéressants. Nous avons indiqué dans ce tableau, à la colonne désignée par la lettre I, les intensités des raies respectives. L'attribution des raies (dernière colonne) est celle d'Ellis. Dans l'avant dernière colonne à la suite du nom des raies, nous avons marqué du signe + les raies non comprises par Ellis dans son analyse de la radiation γ . Dans la première colonne sont indiquées les valeurs des $\gamma\gamma$ en ekV, les points d'interrogations indiquent les $\gamma\gamma$ dont, d'après les auteurs, les raies correspondantes n'ont pas été trouvées.

On constate ainsi que, sur un total de 136 différences α , dont 66 sont en relation avec l'émission γ , 21 correspondent aux émissions électroniques sans conversion interne et, parmi ces dernières, 8 semblent être les responsables de deux types d'émission (avec et sans conversion). Il est clair que, si les raies β indiquées dans ce tableau, ont réellement l'origine que nous leur supposons, elles doivent être toutes attribuées à la transformation $\text{Ra C} \rightarrow \text{Ra C}'$. Ellis lui-même, tout en attribuant au Ra B quelques unes des raies marquées d'un +, remarque qu'il considère ce choix arbitraire et provisoire.

Voici donc un premier exemple qui ne semble pas en désaccord avec l'hypothèse que nous avons posée relativement à l'énergie d'excitation liée à l'émission de particules α de long parcours.

Un autre cas d'émission γ associée à des particules α de long parcours est celui de la transformation $\text{Th C}' \rightarrow \text{Th D}$.

En utilisant les valeurs d'Ellis (pag. 337 — Tab. IX) nous avons obtenu pour la transition $\alpha_{\text{III}} - \alpha_0$ de 840 ekV la valeur suivante: $840 - 2E_k = 840 - 176 = 664$, qui peut être la raie G_1 de 664,6 ekV non classée. Pour les transitions $\alpha_1 - \alpha_{\text{II}}$ (1090 ekV) et $\alpha_1 - \alpha_0$ (1780 ekV), il n'est pas possible de tirer des conclusions du travail d'Ellis, étant donné qu'il ne trouve pas des raies β entre 868 ekV et 2531 ekV.

7. Considerons maintenant un cas de structure fine, celui de la transformation $\text{Th C} \rightarrow \text{Th C}''$. Nous employerons les plus récentes déterminations de Lewis et Bowden [13] et, pour la raie α_3 , nous prendrons la valeur de Rosenblum et Valadares [14] corrigée par comparaison avec celles de Lewis et Bowden (5580 ekV). Les valeurs adoptées pour les

TABLEAU II

$h\nu$	$h\nu - 2E_K$	$h\nu - E_K - E_L$	β observée	I	Nom	Attribuée à
251	65		65,6	6	Cg+	Ra B \rightarrow C
301 ?	115		114,12	5	Da+	»
340	154		155,78	0,5	F ₁ +	Ra C \rightarrow C'
426	240		240,6	3	Ga ₃ +	Ra B \rightarrow C
441 ?	255		254,27	0,5	Ga ₁ +	RaC \rightarrow C'
475 ?	289		288,37	11	Ha ₁ +	Ra B \rightarrow C
475 ?		365	365,60	0,5	Ia ₂ +	Ra C \rightarrow C'
498	312		309,88	0,5	Ha ₁ +	»
498		388	387,54	8	Ia ₁ +	Ra B \rightarrow C
535 ?	349		348,95	8	Ia ₁	»
678	492		490,61	0,5	Nc ₂ +	Ra C \rightarrow C'
742 ?	556		556,72	2,6	O ₁ +	»
776 ?	590		589,89	9,0	P	»
786 ?	600		599,45	1,6	P ₁	»
1027 ?	841		840,84	4,1	Q	»
1249 ?	1063		1062,8	1,0	R ₁ +	»
1372	1186		1186,6	0,85	S ₁ +	»
1407	1221		1222,1	0,85	Sa	»
1673	1487		1486,9	0,4	Ua ₃ +	»
1747 ?	1561		1559,8	0,2	Ua ₆ +	»
1747 ?		1637	1635,5	0,7	Ub+	»
1931 ?	1745		1745,6	0,95	Vb	»
2138 ?	1952		1951,2	0,2	Vc ₁ +	»
2697	2511		2513,2	0,2	Wa ₆ +	»

différences énergétiques ont été alors les suivantes (en eKV): 19,4; 40,0; 128; 144,6; 148; 164; 287,8; 292; 327,8; 432,4; 451,8; 472,4; 491,8; 580; 620.

Nous avons, avec ces valeurs, élaboré le Tableau III, analogue au Tableau II et d'un lequel les raies β observées sont celles qu'Ellis [4]

TABLEAU III

$h\nu$	$h\nu - 2E_K$	$h\nu - E_K - E_L$	$h\nu - 2E_L$	β observée	I	Nom	Attribuée à
128		28		27,3 ¹	2	Ab	Th C \rightarrow C''
128			97	98,3	2,3	E	Th B \rightarrow C
164		64		62,89	0,7	Da	?
288	118			118,56	0,04	Eb ₂	?
288		188		188,68	3,2	G	Th C'' \rightarrow Pb
288			257	257,7	—	Ja ₃	?
292	122			122,95	0,3	Ec	?
292		192		192,4	—	G ₁	?
292			261	260,86	0,65	Jb	Th C'' \rightarrow Pb
328	158			155,84	0,05	F ₁	?
432	262			260,86	0,65	Jb	Th C'' \rightarrow Pb
452	282			282,80	0,75	Jc	Th B \rightarrow C

¹ Valeur corrigée plus tard [11] par Ellis.

fournit dans le Tableau II. Nous n'avons pas fait de distinction entre différences énergétiques et $\gamma\gamma$, comme dans le tableau II, car le spectre β de cette transformation n'est pas bien connu.

Il est à remarquer que dans l'appréciation des résultats dont ce tableau fait état, nous ne pouvons pas nous laisser guider par les considérations habituelles sur l'intensité des raies, étant donné la possibilité pour quelques unes de ces raies d'être dues à plus d'un processus de conversion.

8. On sait, en ce qui concerne l'énergie d'excitation γ , dans les transmutations accompagnées d'émission α , que les valeurs de cette énergie sont des différences de valeurs de niveaux énergétiques.

Ainsi, étant donnés trois niveaux énergétiques $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, on a

TABLEAU IV

$\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3$	β_2	β_3	$\beta_2 + \beta_3 + 2E_K$	β_1	Différence	Désignation
678 - 426 + 251	240,6	65,6	492,2	490,6	+1,6	Nc ₂ - Ga ₃ + Cg
742 - 441 + 301	254,27	114,12	554,4	556,7	-2,3	O ₁ - Ga ₄ + Da
776 - 475 + 301	288,37	114,12	588,5	589,9	-0,4	P - Ha ₁ + Da
786 - 535 + 251	348,95	65,6	600,6	599,5	+1,1	P ₁ - Ia ₁ + Cg
1027 - 776 + 251	589,89	65,6	841,5	840,8	+0,7	Q - P + Cg
1249 - 776 + 475	589,89	288,37	1064	1062,8	+1,2	R ₁ - P + Ha ₁
1673 - 1372 + 301	1186,6	114,12	1486,7	1486,9	-0,2	Ua ₃ - S ₁ + Da
2697 - 1673 + 1027	1486,9	840,84	2513,7	2513,2	+0,5	Wa ₆ - Ua ₃ + Q

TABLEAU V

$\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3$	β_2	β_3	Valeur calculée	β_1	Différence	Désignation
328 - 164 + 164	62,9	62,9	156,8 ¹	155,8	+1,0	F ₁ - Da + Da
292 - 164 + 128	62,9	27,3	190,2 ²	192,4	-2,2	H ₁ - Da + Ab
452 - 288 + 164	118,6	62,9	281,5 ²	282,8	-1,3	Jc - Eb ₂ + Da

¹ $\beta_2 + \beta_3 + 2E_L$.

² $\beta_2 + \beta_3 + E_K + E_L$.

$\alpha_0 - \alpha_2 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_1 - \alpha_2$ et, si ces transitions sont permises, les énergies respectives d'excitation se trouveront liées de façon analogue. Par ailleurs il arrive souvent que la différence de deux niveaux soit égale à celle de deux autres niveaux et, de l'ensemble de ces deux circonstances, il en résulte que les relations de la forme $\gamma_1 = \gamma_2 + \gamma_3$ entre énergies d'excitation sont courantes. Supposons que ces trois énergies se convertissent toutes, de la façon ordinaire, sur le niveau K. Nous

aurons alors $\beta_i = \gamma_i - E_k$ ($i=1, 2, 3$) et, par suite, $\beta_1 = \beta_2 + \beta_3 + E_k$. Il est clair que le contrôle de ce fait est bien plus efficace sur les raies β que sur les raies α , parce qu'il est possible de mesurer avec une plus grande rigueur les énergies des premières. Il en est de même pour le cas $\beta_i = \gamma_i - 2E_k$.

Nous allons donc en faire l'étude aussi bien pour la transformation $Ra C \rightarrow C'$ que pour la transformation $Th C \rightarrow C''$. Nous avons résumé les résultats obtenus dans le tableau IV pour le premier cas et dans le tableau V pour le second. Nous croyons que tous les deux sont suffisamment clairs pour être compris sans difficulté.

9. Finalement nous allons envisager le cas $\frac{h\nu}{2} - E_x$, en prenant particulièrement en considération, encore une fois, la transmutation $Ra C \rightarrow C'$. Pour les valeurs de $h\nu$ comprises dans l'intervalle $2E_L < h\nu < 2E_x$, on a pris pour E_x la valeur E_{L_1} . On n'a pas tenu compte des sous-niveaux L, étant donné la précision des valeurs expérimentales utilisées. Pour des valeurs de $h\nu > 2E_k$, nous avons systématiquement pris pour E_x la valeur E_k . Nous n'avons pas tenu compte d'autres niveaux parce que, dans le spectre γ de la transformation $Ra C \rightarrow C'$, les valeurs $h\nu < 2E_L$ n'ont pas été observées. En outre pour toutes les valeurs de $h\nu$ qui ont donné des raies β du type $\frac{h\nu}{2} - E_k$, nous avons calculé la valeur $\frac{h\nu}{2} - E_L$. Cependant nous n'avons pas obtenu ainsi de nouvelles raies β .

Nous avons, enfin, recherché des cas correspondants à des valeurs $\frac{h\nu}{2} - E_x - E_y$, mais, comme dans le cas ci dessus, nous n'avons trouvé aucune nouvelle raie β . Ces processus sont évidemment très peu probables.

Dans le tableau VI nous avons comparé les valeurs $\frac{h\nu}{2} - E_x$ avec les énergies des raies β qui s'en rapprochent le plus. Le matériel expérimental utilisé est le même qui nous avait déjà servi ([11] et [12]).

Dans ce tableau les valeurs de $\frac{h\nu}{2} - E_x$ marquées d'un * correspondent au niveau L_1 ($E_x = E_{L_1}$). Pour le reste la nomenclature est celle qui a été adoptée pour les tableaux précédents.

On doit remarquer que la raie D est obtenue à partir d'une valeur

TABLEAU VI

$h\nu$	$\frac{h\nu}{2} - E_x$	β observée	I	Nom	Atribuée à
123 ?	44,6 *	44,39	20	Aa ₃ +	Ra B → C
129 ?	47,6 *	46,92	8	Aa ₄ +	»
245	105,6 *	104,97	11	D+	»
340	77 ?	79,06	3	Cj+	»
349	82				
475 ?	144,5	144,62	0,5	Da ₁ +	Ra C → C'
498	156 ?	155,78	0,5	F ₁ +	»
559 ?	186,5	186,57	1,0	Fb ₁ +	»
595 ?	204,5	(203,64)	(480)	(G)	Ra B → C
742 ?	278	(277,41)	(64)	(Ha)	»
776 ?	295	293,43	2,6	Ha ₂ +	Ra C → C'
786 ?	300	299,19	8	Ha ₃ +	Ra B → C
804 ?	309	309,88	0,5	Ha ₄ +	Ra C → C'
853 ?	333,5 ?	333,43	1,6	I ₁	»
915 ?	364,5	365,60	0,5	Ia ₂ +	»
936	375	376,07	8	Ia ₃ +	Ra B → C
957 ?	385,5 ?	387,54	8	Ia ₄	»
995	404,5 ?	404,82	0,5	Nb	Ra C → C'
1078 ?	446	447,35	1,0	Nc+	»
1335	572,5	572,03	2,6	O ₂ +	»
1663 ?	738,5	738,42	2,1	Pa ₁ +	»

Les valeurs de $\frac{h\nu}{2} - E_x$ marquées d'un ? sont celles pour lesquelles $\frac{h\nu}{2}$ a la valeur d'un autre γ d'énergie $h\nu' = \frac{h\nu}{2}$.

$h\nu > 2E_k$ quoique calculée en prenant pour E_x la valeur E_l . Nous avons ainsi fait parce que la différence $\frac{h\nu}{2} - E_k$ pour la valeur respective de $h\nu(245)$ est inférieure (28) à la raie de moindre énergie du spectre mesuré (36). Néanmoins il s'agit très probablement d'une simple coïncidence car aucune paire de raies $\frac{h\nu}{2} - E_k$ et $\frac{h\nu}{2} - E_l$ n'a été trouvée. D'ailleurs, il ne faut pas s'en étonner parce que si de telles raies existaient elles seraient très probablement attribuées à un quantum $h\nu = \frac{h\nu}{2}$.

Les valeurs, indiquées entre () dans le tableau VI, sont celles des raies très intenses qui peuvent cacher d'autres qui seraient en bon accord avec les valeurs respectives calculées.

La paire de valeurs donnée à Cj se justifie si l'on se souvient de l'incertitude avec laquelle les $\gamma\gamma$ sont connus.

Nous voulons exprimer toute notre reconnaissance au Dr. M. Valadares qui nous a suggéré ce travail et dont les conseils ont été pour nous une aide précieuse.

Résumé. Après avoir présenté quelques faits, d'ordre expérimental, qui ne semblent pas facilement expliquables, si l'on considère un effet photo-électrique interne comme la seule cause des spectres β de raies, on cite les observations de Stahel sur un effet de couplage entre le noyau et les électrons extra-nucléaires pour les transformations β -radioactives. Il a été ensuite indiqué que d'autres anomalies existent encore. On a résumé dans un tableau les cas dont l'existence a été contrôlée — raies β : $h\nu - E_x$, $h\nu - E_x - E_y$ (émissions β et α) et $\frac{h\nu}{2} - E_x$; $h\nu$ est l'énergie d'excitation du noyau et E_x le travail d'extraction d'un électron du niveau X.

On fait aussi une analyse détaillée du travail de Stahel où l'on montre que ses résultats numériques sont en bon accord avec les mesures les plus récentes.

Des exemples, dûment documentés, sont donnés par la suite pour chacun des autres cas dont nous avons parlé.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. THIBAUD — *Ann. de Phys.*, 5, 113, 1926.
- [2] M. VALADARES — *Ann. de Phys.*, 2, 197, 1934.
- [3] M. FRILLEY — *J. de Physique*, 34, 1940.
- [4] E. STAHEL — *Die Naturwiss.*, 43, 1933.
- [5] C. D. ELLIS — *Proc. Roy. Soc.*, 138, 318, 1932.
- [6] SZE SHIH — Yuan — *Ann. de Phys.*, 19, 59, 1933.
- [7] R. ARNOULT — *Ann. de Phys.*, 12, 241, 1939.
- [8] J. SURUGUE — *Ann. de Phys.*, 8, 484, 1937.
- [9] C. D. ELLIS — *Proc. Roy. Soc.*, 136, 396, 1932.
- [10] E. RUTHERFORD, J. CHADWICK, C. D. ELLIS — *Radiations from Radioactive Substances*, p. 362, 1930 (Cambridge).
- [11] C. D. ELLIS — *Proc. Roy. Soc.*, 143, 350, 1934.
- [12] E. RUTHERFORD, W. B. LEWIS, B. V. BOWDEN — *Proc. Roy. Soc.*, 142, 347, 1933.
- [13] W. B. LEWIS, B. V. BOWDEN — *Proc. Roy. Soc.*, 145, 235, 1934.
- [14] S. ROSENBLUM, M. VALADARES — *C. R.* 194, 967, 1931.

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE L'OPÉRATEUR DE PROJECTION $\varepsilon(I)$

par RUY LUÍS GOMES (À PORTO)

(Septembre, 1942)

$\varepsilon(\lambda)$, résolution de l'identité, est un opérateur de projection avec les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & \varepsilon(\lambda') \leq \varepsilon(\lambda''), \quad \lambda' \leq \lambda'' \\ \beta) \quad & \varepsilon(\lambda) = \varepsilon(\lambda + 0) \\ \gamma) \quad & \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \varepsilon(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \varepsilon(\lambda) = 1. \end{aligned}$$

$\alpha)$ nous permet d'associer à chaque intervalle fermé $I[\lambda' \leq \lambda \leq \lambda'']$, de R_1 , une projection $\varepsilon(I) = \varepsilon(\lambda'') - \varepsilon(\lambda')$ et, par conséquent, à chaque élément φ de l'espace d'Hilbert, H , une fonction additive et non-négative d'intervalle $U_\varphi(I) = \|\varepsilon(I)\varphi\|^2$. $U_\varphi(I)$, de son côté, peut être le point de départ pour une mesure extérieure $U_\varphi^*(A)$, définie comme la limite inférieure de $\sum U_\varphi(I_n)$ sous la condition $A \subset \sum I_n^0$.

Or, dans ce travail, notre but principal est : 1) de démontrer l'existence d'un opérateur de projection — $E(A)$ — tel que

$$U_\varphi^*(A) = \|E(A)\varphi\|^2,$$

pour chaque ensemble A de R_1 et pour tous les éléments φ de H ; 2) d'étudier leur principales propriétés; et 3) d'en faire une application à la Statistique Quantique.

1. Définition et construction de l'opérateur $E(A)$ ¹. Nous considérons successivement le cas d'un ensemble ouvert G , d'un G_δ et d'un ensemble quelconque A .

¹ Ce fut Monsieur le Professeur Mira Fernandes qui m'a suggéré d'étudier le problème de l'existence d'un opérateur $E(A)$; auparavant j'avais étudié seulement les autres propriétés de U_φ^* . Après avoir écrit cette note j'ai trouvé dans «Japanese Journal of Mathematics» — Tokyo — Vol XV (1939) — pag 27 un travail de Y. Mizoguti — *Abelsche Gruppe und Funktionensystem* où ce même opérateur est l'objet d'une étude systématique; mais la méthode et le but de l'auteur sont différents de ceux que j'ai en vue.

a) Ensemble ouvert G .

Dans ce cas, on peut écrire $G = \sum_n I_n$, $\{I_n\}$ étant une famille dénombrable d'intervalles fermés qui n'empiètent pas les uns sur les autres. Et $\varepsilon(\lambda)$, n'ayant qu'un nombre fini ou infini dénombrable de points de discontinuité, il est permis de supposer que U_φ est une fonction continue¹ dans les points extrêmes de tous les intervalles I_n .

Dans ces conditions, nous obtenons²

$$U_\varphi^*(I_n) = U_\varphi(I_n)$$

et, par conséquent,

$$U_\varphi^*(G) = \sum_n U_\varphi(I_n) = \sum_n \|\varepsilon(I_n)\varphi\|^2$$

ou encore

$$U_\varphi^*(G) = \|\sum_n \varepsilon(I_n)\varphi\|^2,$$

vu que $\varepsilon(I_n)$, $n=1, 2, \dots$ sont des projections orthogonales.

La projection demandée — $E(G)$ — est donc la somme $\sum_n \varepsilon(I_n)$.

b) Ensemble G_δ .

En considérant G_δ comme la limite d'une succession monotone décroissante d'ensembles ouverts — $G_\delta = \prod_n G_n$, $G_n \subset G_{n-1}$ — nous obtenons

$$U_\varphi^*(G_\delta) = \lim_n U_\varphi^*(G_n) = \lim_n \|E(G_n)\varphi\|^2$$

d'où

$$U_\varphi^*(G_\delta) = \|E(G_\delta)\varphi\|^2, \quad E(G_\delta) = \lim_n E(G_n),$$

car $\{E(G_n)\}$ est une succession monotone décroissante de projections.

c) Ensemble quelconque A .

$U_\varphi^*(A)$ étant une mesure extérieure de A , il est possible de déterminer un ensemble $G_\delta^{(\varphi)}$ tel que

$$G_\delta^{(\varphi)} \supset A, \quad U_\varphi^*(A) = U_\varphi^*(G_\delta^{(\varphi)}).$$

Mais, si on assujettit φ à parcourir une famille dénombrable $\{\varphi_n\}$, on peut construire un ensemble G_δ tel que

$$G_\delta \supset A, \quad U_{\varphi_n}^*(A) = U_{\varphi_n}^*(G_\delta),$$

pour tous les éléments de $\{\varphi_n\}$.

¹ S. Saks — *Theory of the Integral* — Cap. III — (2.2) Theorem.

² S. Saks — *Theory of the Integral* — Cap. III — (6.2) Theorem.

Il suffit de déterminer des ensembles $G_{\delta}^{(n)}$ tels que

$$G_{\delta}^{(n)} \supset A, \quad U_{\varphi_n}^*(A) = U_{\varphi_n}^*(G_{\delta}^{(n)})$$

et d'en prendre le produit $G_{\delta} = \prod_n G_{\delta}^{(n)}$.

Supposons maintenant que $\{\varphi_n\}$ soit une famille dense dans tout l'espace H . Nous aurons

$$U_{\varphi}^*(A) = U_{\varphi}^*(G_{\delta}) = \|E(G_{\delta})\varphi\|^2$$

pour tous les éléments φ de H .

En effet, si on détermine un nouvel ensemble $G_{\delta;\varphi}$ tel, que

$$G_{\delta;\varphi} \supset A \quad \text{et} \quad U_{\varphi}^*(A) = U_{\varphi}^*(G_{\delta;\varphi}), \quad U_{\varphi_n}^*(A) = U_{\varphi_n}^*(G_{\delta;\varphi}),$$

on aura

$$U_{\varphi}^*(A) = \|E(G_{\delta})\varphi\|^2,$$

vu que $E(G_{\delta})$ et $E(G_{\delta;\varphi})$ coïncident en $\{\varphi_n\}$, donc, dans tout l'espace et, en particulier, pour l'élément φ qui figure comme argument de $G_{\delta;\varphi}$.

Nous pouvons, donc, énoncer le résultat fondamental de ce travail : à chaque ensemble A de R_1 correspond un opérateur de projection bien déterminé — $E(A)$ — tel que $U_{\varphi}^*(A) = \|E(A)\varphi\|^2$, pour tous l'espace d'Hilbert; et la construction de $E(A) = E(G_{\delta})$ se fait à partir d'une succession quelconque — $\{\varphi_n\}$ — dense en H , par le procédé antérieurement développé.

2. Propriétés principales.

$$(2.1) \quad A \subset B \rightarrow E(A) \leq E(B),$$

A et B étant des ensemble de R_1 .

En effet, nous avons $U_{\varphi}^*(A) \leq U_{\varphi}^*(B)$, c'est à dire, $\|E(A)\varphi\|^2 \leq \|E(B)\varphi\|^2$, d'où $E(A) \leq E(B)$, vu que φ est un élément arbitraire de H .

$$(2.2) \quad E(A) \cdot E(B) = E(B) \cdot E(A).$$

Il suffit de rappeler la définition de E et le fait que $\mathcal{E}(I) \cdot \mathcal{E}(I'') = \mathcal{E}(I'') \cdot \mathcal{E}(I)$, I' et I'' étant deux intervalles fermés quelconques de R_1 .

$$(2.3) \quad E(A) \cdot E(B) = E(B) \cdot E(A) = E(AB),$$

A et B étant deux ensembles mesurables U_{φ}^* pour tous les φ de H .

En effet, l'hypothèse sur A et B nous permet d'écrire

$$U_{\varphi}^*(A) + U_{\varphi}^*(B) = U_{\varphi}^*(A+B) + U_{\varphi}^*(AB)$$

pour tous les éléments φ de \mathbb{H} ; donc

$$E(A) + E(B) = E(A+B) + E(AB).$$

Et si on fait la multiplication des deux membres de cette identité par $E(A)$, on obtient

$$E(A) \cdot E(B) = E(AB).$$

En particulier, si les opérateurs $E(A)$ et $E(B)$ sont orthogonaux, l'opérateur $E(AB)$, associé au produit des deux ensembles A et B, est identiquement nul.

THÉORÈME. Soit J l'intervalle mi-ouvert $(\lambda' < \lambda \leq \lambda'')$; la mesure extérieure U_{φ}^* de J coïncide avec $U_{\varphi}(\bar{J})$, c'est à dire, $U_{\varphi}^*(J) = U_{\varphi}(\bar{J})$.

En effet, si on écrit

$$(\lambda' + \varepsilon \leq \lambda \leq \lambda'') \subset (\lambda' < \lambda \leq \lambda'') \subset (\lambda' < \lambda'' + \varepsilon)$$

et si on fait intervenir des propriétés bien connues¹ de la fonction $U_{\varphi}(I)$, considérée en rapport avec la mesure extérieure correspondante U_{φ}^* on obtient

$$\| \int \varepsilon(\lambda'') - \varepsilon(\lambda') \varphi \|^2 \leq U_{\varphi}^*(J) \leq \| \int \varepsilon(\lambda'' + \varepsilon) - \varepsilon(\lambda') \varphi \|^2,$$

d'où, à la limite pour $\varepsilon = 0$;

$$U_{\varphi}^*(J) = \| \int \varepsilon(\lambda'') - \varepsilon(\lambda') \varphi \|^2 = U_{\varphi}(\bar{J}),$$

vu que $\varepsilon(\lambda)$ est une fonction continue de λ à droite de tous les points de \mathbb{R}_1 .

COROLLAIRE. La mesure U_{φ}^* de l'espace \mathbb{R}_1 coïncide avec $\| \varphi \|^2$; l'ensemble vide a une mesure nulle pour tous les φ .

Pour ce qui se rapporte à \mathbb{R}_1 , il suffit d'écrire

$$U_{\varphi}^*(J) = \| \int \varepsilon(\lambda'') - \varepsilon(\lambda') \varphi \|^2 \leq U_{\varphi}^*(\mathbb{R}_1) \leq \| \varphi \|^2$$

et d'en prendre la limite pour $\lambda' = -\infty$, $\lambda'' = +\infty$, vu que

$$\lim \varepsilon(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \lambda = +\infty \\ 0 & \text{pour } \lambda = -\infty \end{cases} \quad (\text{propriété } \gamma).$$

¹ S. Saks. loc. cit. (6.2) Theorem.

Et si on prend pour λ' un point de continuité de $\varepsilon(\lambda)$ et si on écrit

$$U_{\varphi}^*(J_n) = \|\|\varepsilon(\lambda_n) - \varepsilon(\lambda')\|\varphi\|^2, \quad J_n \equiv (\lambda' < \lambda \leq \lambda_n), \quad \lambda_n > \lambda',$$

on obtient, à la limite $\lambda_n \rightarrow \lambda'$,

$$U_{\varphi}^*(0) \leq \lim_n U_{\varphi}^*(J_n) = 0, \quad \text{d'où} \quad U_{\varphi}^*(0) = 0.$$

Ces deux résultats expriment encore que: $E(0) = 0$, $E(R_1) = 1$.

L'opérateur E jouit donc d'un ensemble de propriétés

$$\begin{aligned} A \subset B &\rightarrow E(A) \leq E(B) \\ E(A) \cdot E(B) &= E(B) \cdot E(A) \\ E(0) &= 0, \quad E(R_1) = 1 \end{aligned}$$

qui correspondent à α), β) et γ) — opérateur $\varepsilon(\mathbf{I})$.

THÉORÈME. La mesure extérieure U_{φ}^* d'un point λ de R_1 est égale à

$$\|\|\varepsilon(\lambda - 0)\|\varphi\|^2.$$

En effet, si on prend pour J l'intervalle mi-ouvert (λ_n, λ) , avec $\lambda_{n-1} < \lambda_n < \lambda$, on obtient, à la limite $\lambda_n \rightarrow \lambda$,

$$U_{\varphi}^*(\lambda) = \lim_n U_{\varphi}^*(J_n) = \|\|\varepsilon(\lambda) - \varepsilon(\lambda - 0)\|\varphi\|^2.$$

Il s'en suit, en particulier, que les points de continuité de $\varepsilon(\lambda)$ sont les seuls points de R_1 qui ont une mesure U_{φ}^* , nulle pour tous les φ de H .

3. Application à la Statistique Quantique. Soit un élément de norme unitaire et représentons par ε la grandeur physique qui admet $\varepsilon(\lambda)$ comme résolution de l'identité.

J. von Neumann, dans son livre *Mathematische Grundlagen der Quanten-Mechanik*, p. 104, prend $U(J) = \|\|\varepsilon(\lambda'') - \varepsilon(\lambda')\|\varphi\|^2$ comme probabilité de la valeur λ de ε , λ étant un point quelconque de l'intervalle mi-ouvert $(\lambda' < \lambda \leq \lambda'')$, et l'état physique de ε coïncidant avec φ .

Or, en égard aux propriétés de U_{φ}^* , on peut généraliser cette définition, qui se rapporte à des ensembles d'un type très particulier, les intervalles J , et arriver ainsi à donner une signification précise à la probabilité d'obtenir comme valeur de ε un point d'un ensemble A , assujetti à la seule condition d'être mesurable U_{φ}^* pour tous les φ de H .

Il suffit de prendre pour valeur de cette probabilité la mesure extérieure de l'ensemble A , c'est à dire, $U_{\varphi}^*(A)$.

En effet, les propriétés caractéristiques d'une notion de probabilité sont satisfaites; et on vérifie immédiatement la coïncidence des deux définitions lorsque l'ensemble A se réduit à un intervalle mi-ouvert J .

Note. L'introduction de l'opérateur $E(A)$ avec toutes ces propriétés — celles que nous avons énoncé ici et d'autres encore (en rapport étroit avec les conditions sous lesquelles un ensemble A est mesurable U_{φ}^*) nous permet de refaire l'étude des intégrales du type

$$\int_{R_1} F(\lambda) dU_{\varphi}^*, \quad \int_{R_1} F(\lambda) dV_{\varphi, \psi}^*$$

$V_{\varphi, \psi}(I)$ étant la fonction de variation limitée $(\varepsilon(I)\varphi, \psi)$. Il suffit d'y appliquer la théorie générale des intégrales de Radon-Stieltjes, sous la forme adoptée par S. Saks dans l'ouvrage déjà cité.

BIBLIOGRAPHIE

- S. SAKS — *Theory of the Integral* — New-York — 1937 (pour ce qui se rapporte aux propriétés générales d'une mesure extérieure et, en particulier, d'une mesure U^*).
- J. VON NEUMANN — *Mathematische Grundlagen der Quanten Mechanik* — Berlin — 1932 pour ce qui se rapporte aux propriétés de l'opérateur ε et aux principales notions de la Mécanique Quantique).
- H. STONE — *Linear Transformations in Hilbert Space* — New-York — 1932 Cap. VI pour ce qui se rapporte aux intégrales Radon-Stieltjes, pourtant selon une forme très différente).

LA LOI PHOTOÉLECTRIQUE D'EINSTEIN ET LE PHÉNOMÈNE DE CONVERSION INTERNE

par MANUEL VALADARES¹ (À LISBONNE)

(Octobre, 1942)

§ 1. Parmi les différentes méthodes utilisées pour l'étude du spectre du rayonnement γ il y en a deux qui permettent d'obtenir des mesures précises des longueurs d'onde : — la spectrographie cristalline et l'analyse du spectre β de conversion interne.

Voyons de plus près quelles sont les causes d'erreur qui interviennent dans ces deux méthodes. La spectrographie cristalline est basée sur la formule de Bragg

$$n\lambda = 2d \sin \theta$$

et, par conséquent, l'erreur dans la détermination de la longueur d'onde λ provient, outre l'erreur dans la détermination des grandeurs géométriques qui conduisent à l'évaluation de θ , de la précision avec laquelle on connaît la distance réticulaire «*d*» du cristal employé dans le spectrographe.

Dans l'analyse du spectre β on détermine expérimentalement le produit $H\rho$ de l'intensité du champ magnétique H par le rayon de courbure ρ . Cette mesure vient affectée naturellement par les erreurs commises soit dans la détermination magnétique de H soit dans la détermination de la longueur ρ . Après avoir déterminé le produit $H\rho$ on calcule l'énergie correspondante des particules β par la formule

$$E = m_0 c^2 \left[\left\{ 1 + \left(\frac{H\rho e}{m_0 c} \right)^2 \right\}^{1/2} - 1 \right]$$

et on introduit ainsi des nouvelles erreurs provenant de l'imprécision des valeurs attribuées à «*e*», «*m*₀», «*c*».

Le faisceau β dont on a déterminé l'énergie correspond aux électrons d'un certain niveau de l'atome, niveau pour lequel le travail d'extraction est W . Ce travail d'extraction est calculé d'après la longueur d'onde, déterminée par spectrographie cristalline de la discontinuité d'absorption

¹ Boursier de l'«Instituto para a Alta Cultura».

du spectre de rayons X de l'élément qui émet le rayonnement γ ; le travail W et la longueur d'onde correspondante λ_w sont liés par la formule

$$h \frac{c}{\lambda_w} = W$$

λ_w ayant été déterminée par la formule de Bragg. La précision dans la valeur de W dépend, par conséquent, de la précision de «d», «h», «c», outre celle de l'angle de Bragg qui a conduit à évaluer λ_w . Finalement la longueur d'onde du rayonnement γ sera obtenue par application de la loi photoélectrique d'Einstein

$$h\nu = E + W$$

$$\frac{hc}{\lambda} = E + W.$$

Il est évident que la comparaison des valeurs obtenues par les deux méthodes pour la longueur d'onde d'un rayonnement γ permet de contrôler la précision avec laquelle la loi photoélectrique d'Einstein est valable pour le phénomène de conversion interne.

Cette vérification a été faite d'abord par Thibaud [1] pour un rayonnement de 52 U. X. (transmutation Th B \rightarrow Th C) et plus tard par Frilley [2] qui a montré que la loi d'Einstein est valable jusqu'à la longueur d'onde 16 U. X.

Nous avons, en 1932, essayé de réaliser des mesures plus précises du rayonnement γ par spectrographie cristalline dans le but d'attendre, au moins, la même précision qu'on possédait dans le domaine de la spectrographie magnétique β . Dans ce but nous avons repris la mesure d'un rayonnement γ émis dans la transmutation Ra B \rightarrow Ra C et pour lequel Frilley avait déterminé la longueur d'onde 232 U. X. Nos mesures [3] ont porté à la valeur $232,7 \pm 0,4$ U. X.

Pour la comparaison avec les données de la spectrographie magnétique, une difficulté s'est présentée, pourtant. On avait comme mesures plus précises du spectre β émis dans cette transmutation celles de Ellis et Skinner [4]; or Ellis [5] a annoncé, précisément en 1932, que ses anciennes mesures présentaient une erreur systématique dont l'ordre de grandeur était de $7 \frac{0}{00}$ sur la valeur de $H\phi$. Comme Ellis n'avait pas encore fait de nouvelles mesures de cette région du spectre β , la comparaison était difficile d'autant plus qu'on n'avait pas à l'époque des données précises sur le rapport de l'unité X au centimètre (L'unité X est définie comme étant une longueur telle que la distance réticulaire 1.0.0 du sel gemme, à 18° C, est 2814,00 U. X.).

En 1934 Ellis [6] a publié les résultats de nouvelles mesures sur le spectre β de conversion interne émis dans la transmutation $\text{Ra B} \rightarrow \text{Ra C}$, et récemment Harper et Roberts [7] ont donné aussi les valeurs des énergies de quelques raies fondamentales de ce spectre.

Par ailleurs, on connaît aujourd'hui avec une bonne précision la distance réticulaire des cristaux exprimée en centimètres. Il nous a paru, alors, intéressant de voir de nouveau jusqu'à quelle précision on pouvait considérer vérifiée la formule d'Einstein, d'autant plus que les valeurs de certaines constantes fondamentales ont, depuis 1933, assez varié.

§ 2. Spectrographie magnétique β . En employant les valeurs de $H\beta$ données par Ellis et Skinner (1924), Ellis (1934), Harper et Roberts (1941) et adoptant pour les constantes les valeurs [Birge-Décembre 1941]

$$e/m_0 = 1,7592 \times 10^7 \text{ U. E. M.}$$

$$c = 2,99776 \times 10^{10} \text{ cm/s} \quad c^2 = 8,98657 \times 10^{20} \text{ (cm/s)}^2$$

nous avons recalculé les énergies des différentes lignes du spectre β . On présente ces valeurs dans le tableau I

TABLEAU I

Raie	Ellis et Skinner		Ellis		Harper et Roberts	
	$H\beta$ G. cm	Énergie keV	$H\beta$ G. cm	Énergie keV	$H\beta$ G. cm	Énergie keV
A	660,9	37,07	657,66	36,72	658,9	36,86
Aa	670,0	38,07	663,45	37,35	665,0	37,52
Aal	687,0	39,95	683,99	39,62
B	768,8	49,58	762,66	48,83	766,1	49,25
Ba	764,66	49,07	768,4	49,53
Bal	769,25	49,64
C	793,1	52,62	787,25	51,88	790,4	52,28
Ca	799,1	53,47	793,13	52,62

Ensuite pour calculer l'énergie du quantum γ il faut connaître les travaux d'extraction des électrons d'un atome à numéro atomique 83 (transmutation $\text{Ra B} \rightarrow \text{Ra C}$). Nous avons employé les valeurs données récemment par Cauchois [8] pour les discontinuités d'absorption du bismuth (numéro atomique 83). Ces discontinuités sont données par Cauchois en U. X.; nous avons converti les unités X en centimètres prenant

$$1 \text{ U. X.} = 1,00203 \times 10^{-11} \text{ cm}$$

selon les mesures de Bearden [9], Backlin et Soderman. Ensuite nous avons calculé les énergies correspondantes en adoptant pour h la valeur

$$h = 6,622 \times 10^{-27} \text{ erg} \times \text{s}$$

donnée par les tables de constantes de Kaye et Laby [10].

Le tableau II contient les valeurs de Cauchois et les résultats de nos calculs faits comme nous venons d'indiquer.

TABLEAU II
Numéro atomique 83

Niveau	Longueur d'onde		Énergie keV
	U. X.	cm $\times 10^{-11}$	
L _I	754,56	756,09	16,38 ₂
L _{II}	787,14	788,73	15,70 ₄
L _{III}	921,50	923,37	13,41 ₄
M _I	3088,0	3094,3	4,00 ₃
M _{II}	3339,4	3346,2	3,70 ₂
M _{III}	3882,9	3890,8	3,18 ₃
N _I	13085	13112	0,94 ₅
O _I	73096	73244	0,16 ₉

Le tableau III contient les valeurs de $E+W$, c'est-à-dire, la valeur de $h\nu$ en admettant la loi d'Einstein

TABLEAU III

Ellis et Skinner		Ellis		Harper et Roberts	
E+W	$h\nu$	E+W	$h\nu$	E+W	$h\nu$
37,07+16,38	53,45	36,72+16,38	53,10	36,86+16,38	53,24
38,07+15,70	53,77	37,35+15,70	53,05	37,52+15,70	53,22
39,95+13,41	53,36	39,62+13,41	53,03
49,58+ 4,00	53,58	48,83+ 4,00	52,83	49,25+ 4,00	53,25
.....	49,07+ 3,70	52,77	49,53+ 3,70	53,23
.....	49,64+ 3,18	52,82
52,62+ 0,94	53,56	51,88+ 0,94	52,82	52,28+ 0,94	53,22
53,47+ 0,17	53,64	52,62+ 0,17	52,79
Moyenne	53,56	Moyenne	52,90	Moyenne	53,23

En employant les constantes déjà citées on trouve pour la longueur d'onde de ce rayonnement γ la valeur

Ellis et Skinner .	$231,3 \times 10^{-11}$ cm
Ellis	234,1
Harper et Roberts	232,7.

Le calcul des erreurs dans ces trois mesures est difficile à établir mais il paraît acceptable d'admettre pour la mesure d'Ellis une erreur de $1,0 \times 10^{-11}$ cm et pour celle d'Harper et Roberts $0,5 \times 10^{-11}$ cm.

Ajoutons que bien qu'aucun autre auteur ait mesuré cette région du spectre β émis dans la transmutation $Ra B \rightarrow Ra C$ des mesures effectuées dans d'autres régions et pour d'autres transmutations poussent à admettre les valeurs de Harper et Roberts [Rogers, Phys. Rev., 51 (1937) p. 588; Scott, Phys. Rev., 46 (1934) p. 633; Surugue, Ann. Phys., 8 (1937) p. 484].

§ 3. Spectrographie cristalline γ . Frilley a déterminé pour le rayonnement γ en question la longueur d'onde 232 ± 1 U. X.; il employait un spectrographe Bragg muni d'un cristal de sel gemme.

Nous nous sommes servis du même spectrographe mais en étudiant le spectre dans des ordres supérieurs nous avons pu augmenter la précision de la mesure et trouver la valeur $232,7 \pm 0,5$ U. X.

Réduisant ces nombres à centimètres on trouve

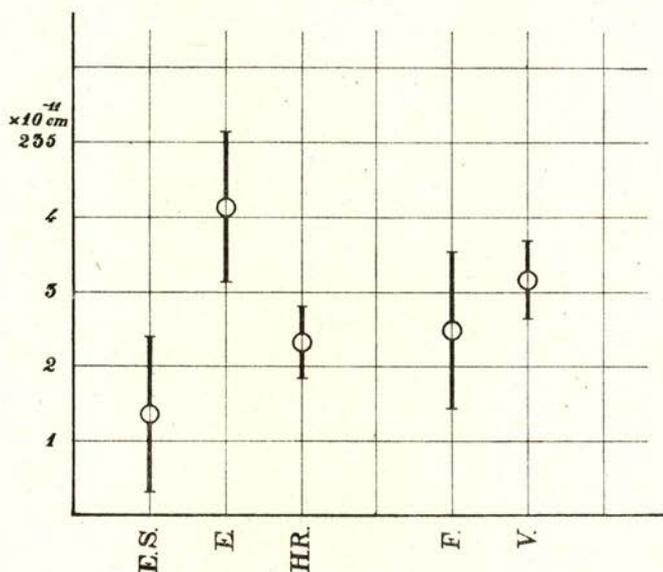
Frilley . .	$232,5 \pm 1,0 \times 10^{-11}$ cm
Valadares	$233,2 \pm 0,5 \times 10^{-11}$ cm .

§ 4. Comparaison des résultats. Le tableau IV contient l'ensemble des valeurs obtenues pour la longueur d'onde du rayonnement γ soit par spectrographie magnétique du rayonnement β dû à la conversion interne soit par diffraction cristalline du rayonnement γ .

TABLEAU IV

Spectre β		Spectre γ	
Auteur	10^{-11} cm	Auteur	10^{-11} cm
Ellis et Skinner	231,3	Frilley	$232,5 \pm 1,0$
Ellis	$234,1 \pm 1,0$	Valadares	$233,2 \pm 0,5$
Harper et Roberts	$232,7 \pm 0,5$		

Pour faciliter la comparaison nous avons aussi représenté ces valeurs dans le diagramme suivant :



E. S (Ellis et Skinner, 1924).

E. (Ellis, 1934).

H. R. (Harper et Roberts, 1941).

F. (Frilley, 1928).

V. (Valadares, 1933).

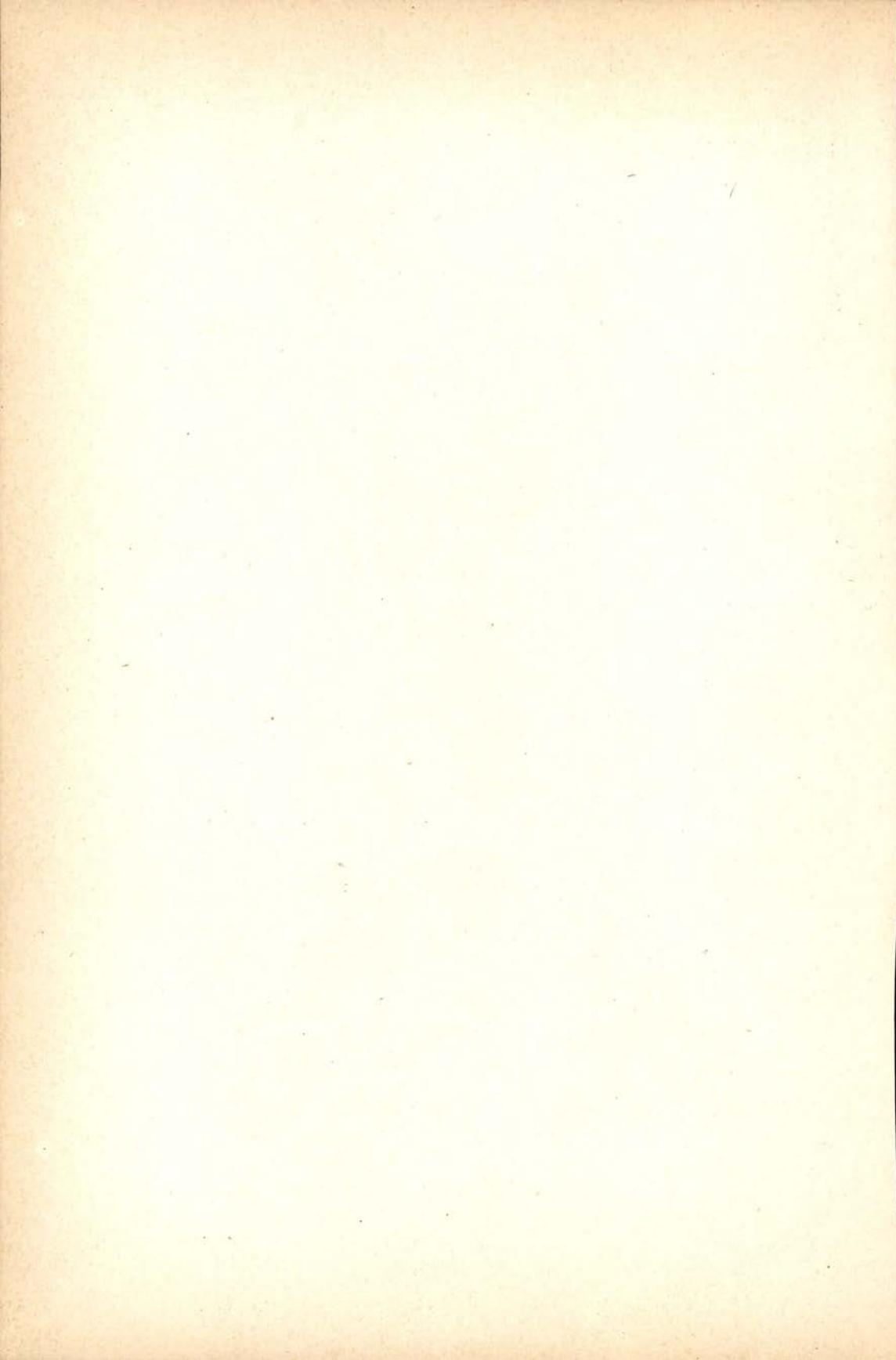
La comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes montrent que dans la précision actuelle des mesures (de l'ordre de deux pour mille) la loi photoélectrique d'Einstein est valable dans le phénomène de conversion interne du rayonnement γ .

Nous poursuivons maintenant des recherches dans le but d'augmenter la précision des mesures du rayonnement γ par diffraction cristalline.

LABORATOIRE DE PHYSIQUE
FACULTÉ DES SCIENCES
LISBONNE.

BIBLIOGRAPHIE

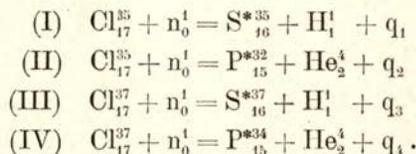
- [1] J. THIBAUD — *Ann. de Phys.*, [10], 5 (1926) p. 73.
- [2] M. FRILLEY — *Thèse*, Paris, 1928.
- [3] M. VALADARES — *Thèse*, Paris, 1933.
- [4] C. D. ELLIS and H. W. B. SKINNER — *Proc. Roy. Soc.*, A 105 (1924) p. 60.
- [5] C. D. ELLIS — *Proc. Roy. Soc.*, A 138 (1932) p. 318.
- [6] C. D. ELLIS — *Proc. Roy. Soc.*, A 143 (1934) p. 350.
- [7] A. F. A. HARPER and N. F. ROBERTS — *Proc. Roy. Soc.*, A 178 (1941) p. 170.
- [8] Y. CAUCHOIS — *Cahiers de Physique*, n° 8 (1942) p. 25.
- [9] J. A. BEARDEN — *Jour. Appl. Phys.*, 12 (1941), p. 395.
- [10] G. W. C. KAYE and T. H. LABY — *Tables of physical and chemical constants*, ninth edition (1941) Ed. Longmans, Green and Co. London.
- [11] R. T. BIRGE — *Phys. Rev.*, 60 (1941) p. 766.



SUR LES MASSES DE Cl^{35} ET Cl^{37} par A. GIBERT¹, F. ROGGEN et J. ROSSEL (à ZURICH)

(Août, 1943)

Lorsqu'on étudie au moyen d'une chambre d'ionisation associée à un amplificateur proportionnel les réactions induites dans le chlore par les neutrons, il y a lieu de considérer les quatre cas suivants :



Le bombardement du chlore pur gazeux (sous 5 atm. env.) par neutrons rapides (neutrons (d, d) de 2,87 MeV) nous a livré une statistique des déviations enregistrées mettant en évidence un certain nombre de réactions difficilement identifiables² (voir courbe 1).

Par contre, l'irradiation par neutrons lents nous a fourni la courbe 2, indiquant l'existence d'un seul processus bien défini. Ce résultat est en accord avec celui de Kamen [1] et, de même que cet auteur, la mesure de la période de l'activité consécutive à la réaction nous a permis de l'identifier avec (I). Un compte-rendu détaillé de nos expériences est en cours de publication [2].

Connaissant l'énergie maxima du spectre bêta de S^{*35} [3], on peut, indépendamment des masses de Cl^{35} et S^{35} , calculer la valeur de l'énergie de réaction q_1 . On obtient ainsi $q_1 = 0,65 \pm 0,02$ MeV, tandis que la valeur déduite de notre courbe 2 est de $0,52 \pm 0,04$ MeV.

Nous avons voué un soin particulier à la pureté du chlore utilisé, ainsi qu'à la détermination de l'énergie libérée dans la chambre d'ionisation [2]. C'est pourquoi nous pensons pouvoir expliquer la différence

¹ Boursier de l'Etat portugais (Instituto para a Alta Cultura).

² Les résultats relatifs aux neutrons rapides (non publiés) nous ont été aimablement communiqués par J. Rossel et A. Süssstrunk.

de $0,13 \pm 0,06$ MeV par l'existence d'un rayon gamma provenant du passage de l'état excité de S^{*35} dans lequel ce noyau prendrait naissance, à l'état fondamental. Nous tenons à remarquer que la courbe 1 relative aux neutrons rapides, et dont la précision est inférieure à celle

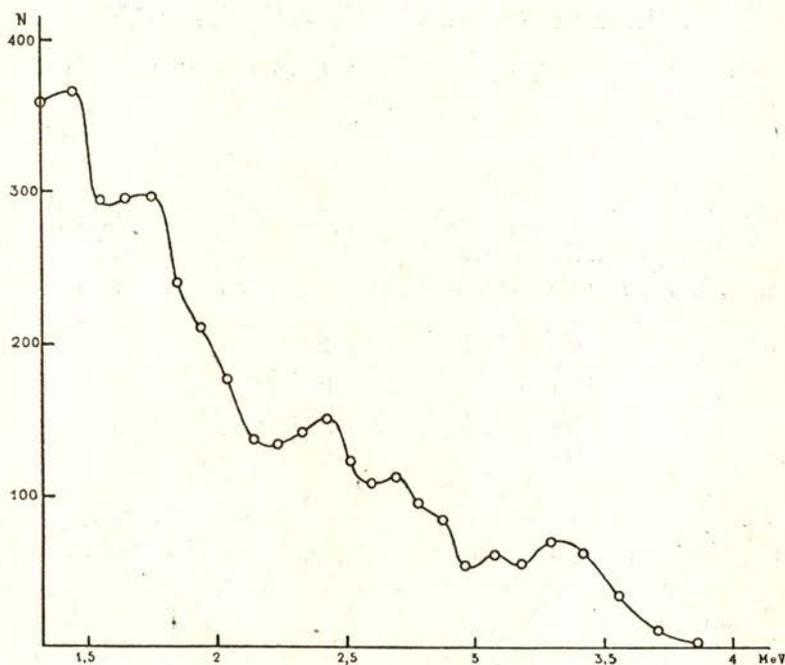


Fig. 1 — Mesures avec neutrons rapides (2,87 MeV). En abscisses est portée l'énergie mesurée et en ordonnées le nombre de réactions correspondant à cette énergie. L'énergie des réactions (maxima de la courbe) s'obtient en soustrayant de l'abscisse l'énergie des neutrons incidents

de la courbe 2, indique pour les énergies de réaction possibles q_1 une valeur maxima extrapolée de $0,86 \pm 0,30$ MeV.

Si l'on accepte donc, pour borne supérieure des q_1 , la valeur 1,16 MeV, soit 0,00125 U. M.¹, il nous est possible de donner des limites supérieures pour les valeurs des masses de Cl^{35} et Cl^{37} , dont les différentes déterminations ne s'accordent pas encore de façon satisfaisante.

Puisque l'on connaît avec une assez grande certitude la masse de P^{32} , nous pouvons assigner à la masse de Cl^{35} la limite supérieure suivante (réaction II)

¹ Par U. M. (unité de masse), nous représentons le 1/16 de la masse de l'atome neutre d'oxygène, O^{16} , c'est-à-dire, $1,660 \cdot 10^{-24}$ g, soit, encore, 0,931 MeV.

$$\text{Cl}_{17}^{35} < \text{P}_{15}^{32} + \text{He}_2^4 - n_0^1 + 0,00125, \text{ soit [4]}$$

$$\text{Cl}^{35} < 31,98437 + 4,00386 - 1,00894 + 0,00125 = 34,98054 \text{ U. M.},$$

valeur qui s'accorde plutôt avec les déterminations récentes de spectrographie de masse qu'avec celles qu'on peut déduire d'autres réactions nucléaires.

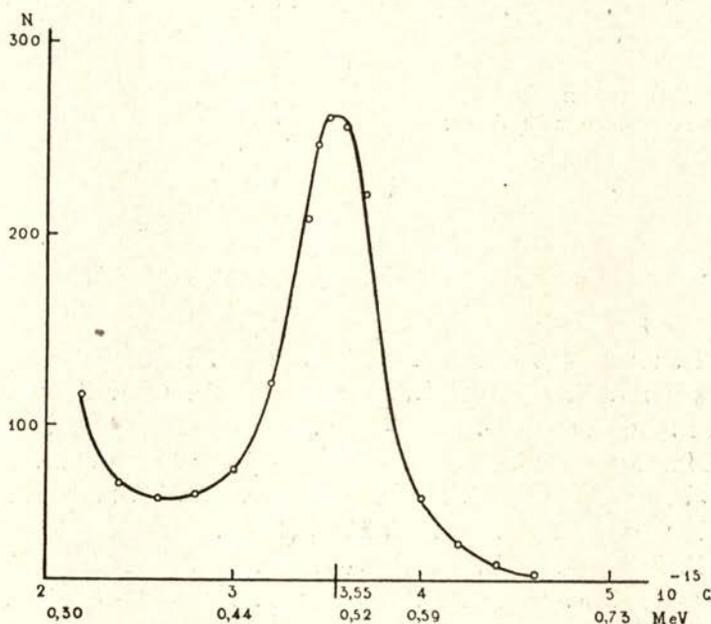


Fig. 2— Mesures avec neutrons lents. Mêmes coordonnées que pour la fig. 1. L'énergie au maximum de la courbe est de 0,52 MeV. On a aussi donné en abscisses une échelle des charges libérées dans la chambre d'ionisation (en unités 10^{-15} C).

En effet, d'après le bilan énergétique de la réaction $\text{S}^{32}(\alpha, p)\text{Cl}^{35}$, Brasefield et Pollard [5] ont trouvé, en 1936, la valeur 34,9810 U. M. pour la masse de Cl^{35} . A partir de la réaction $\text{Cl}^{35}(d, p)\text{Cl}^{36}$, Pollard [6], en 1940 déduit la valeur 34,98107 U. M. et, en 1941, Schrader et Pollard mesurent, pour la réaction $\text{Cl}^{35}(d, \alpha)\text{S}^{33}$, une énergie conduisant à la valeur 34,98093 U. M. [7].

D'autre part, Okuda, Ogata, Aoki et Sugawara [8], en 1940, ont trouvé, par spectrographie de masse, les valeurs ¹ 34,97884 U. M. pour la masse de Cl^{35} et 36,97769 U. M. pour la masse de Cl^{37} .

¹ Corrigées par Mattauch et Flüggé (loc. cit.) d'après les valeurs les plus récentes des masses spectrographiques étalon (H^1 et C^{12}).

Si nous admettons la cohérence interne des mesures japonaises, ce sont donc ces valeurs qui semblent préférables, puisque les autres déterminations de Cl^{35} tombent au-dessus de la limite supérieure imposée par nos résultats.

Nous sommes heureux de remercier ici M. le professeur P. Scherrer, Directeur de l'Institut, pour l'intérêt qu'il a porté à notre travail.

INSTITUT DE PHYSIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE
ZÜRICH

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. D. KAMEN — *Phys. Rev.* 60, 537, (1941).
- [2] A. GIBERT, F. ROGGEN et J. ROSSEL — *Helv. Phys. Acta*, (1943).
- [3] W. F. LIBBY et D. D. LEE — *Phys. Rev.* 55, 245, (1939).
- [4] J. MATTAUCH et S. FLÜGGE — *Kernphysikalische Tabellen*, (1942).
- [5] C. J. BRASEFIELD et E. POLLARD — *Phys. Rev.* 50, 296, (1936).
- [6] E. POLLARD — *Phys. Rev.* 57, 1186, (1940).
- [7] E. F. SCHRADER et E. POLLARD — *Phys. Rev.* 59, 277, (1941).
- [8] T. OKUDA, K. OGATA, K. AOKI et Y. SUGAWARA — *Phys. Rev.* 58, 578, 1940.

SUR LA MYOPIE ET LE PRESBYTISME NOCTURNES

par J. PALACIOS

Professeur à l'Université de Madrid

(Septembre 1943)

Sur la myopie nocturne. Dans les travaux d'Otero et Durán, parus dans plusieurs numéros des «Anales de Física y Química de Madrid»; on étudie un phénomène qu'on a appelé *myopie nocturne*, et qui se produit de la manière suivante :

Quand on contemple un objet placé à l'infini avec l'illumination justement indispensable pour qu'on puisse le voir avec netteté, l'œil se comporte comme s'il avait une myopie de -2 dioptries relativement à la manière dont il se comporte avec une illumination parfaite.

Tout se passe comme si, dans la semi-obscurité, le système optique oculaire se modifiait en vue d'augmenter sa convergence, précisément comme si l'on avait placé devant lui une lentille convergente dont la puissance augmente quand la lumière diminue, et qui atteint les $+2$ dioptries quand on arrive à la limite de visibilité. De cette manière l'œil normal se transforme en myope et devrait utiliser des lentilles de correction de $-2D$, en même temps que l'œil hypermétrope voit son défaut allégé et celui qui était déjà myope pendant le jour se rend plus myope encore quand le crépuscule arrive. Ces prévisions se confirment de manière impressionnante quand on contemple le ciel étoilé à travers des lentilles de puissance variable.

Mr. Durán a consulté l'abondante littérature relative à l'Optique Physiologique et il n'a rencontré rien qui se rapporte à la myopie nocturne, avec la seule exception d'une observation faite par Piéron quand celui-ci agissait en qualité de médecin militaire pendant la guerre de 1914-18. Selon cette observation, mentionnée dans le «Traité d'Ophthalmologie» de Piéron, les soldats les plus habiles pour les découvertes nocturnes n'étaient pas ceux doués de vue normale, mais les hypermétropes avec

1 ou 2 dioptries. L'auteur se limite à la constatation du fait sans en déduire des conséquences ni chercher son explication. Avec la myopie nocturne l'explication est immédiate, parce que nous avons déjà vu qu'un œil hypermétrope avec $+2D$ se comporte comme émetrope à la lumière crépusculaire.

Différentes explications de la myopie nocturne. a) *L'hypothèse d'Otero et Durán*. Ceux qui ont découvert la myopie nocturne en ont, eux mêmes, donné au début une explication simple et convaincante. Le manque de lumière se traduit dans un agrandissement de la pupille, et il est tout-à-fait naturel de penser que tout se réduit au fait que dans l'obscurité on utilise des portions du cristallin plus grandes qu'en plein jour. En effet, si l'œil se comportait comme un système infra-correcté, sa distance focale se rendrait plus courte en vertu de l'aberration sphérique, au fur et à mesure que se dilate la pupille; les différentes zones formeraient leurs images dans des plans différents et, en supposant que l'image paraxiale se forme sur la rétine, toutes les autres se formeraient devant celle-ci, de sorte que l'œil devrait être myope, en acceptant qu'il utilisait une image intermédiaire entre toutes.

Cette explication était susceptible de confirmation expérimentelle. En effet il suffisait d'étudier l'aberration sphérique de l'œil accommodé à l'infini et vérifier s'il se comportait comme un système infra-correcté dans la quantité nécessaire pour expliquer la myopie nocturne. Les mesures réalisées avec le plus grand soin dans l'Instituto de Alonso de Santa Cruz ont donné un résultat franchement négatif, en accord avec celles qui ont été faites antérieurement par Ames et Proctor. On a utilisé pour cela des personnes avec la pupille dilatée par l'action de l'atropine, et on mettait devant celle-là des diaphragmes d'ouverture variable. Quand on utilise des faisceaux lumineux de petite section, l'œil atropinisé se présente infra-correcté, et il se produit une translation du plan de projection qui ne dépasse pas $1/2$ dioptrie; mais avec de grandes ouvertures l'œil se montre ultra-correcté, c'est-à-dire, il est le contraire de ce qu'il devait être pour que la myopie nocturne restât immédiatement expliquée. Avec ces résultats les auteurs ont cru avoir des raisons suffisantes pour abandonner l'hypothèse selon laquelle l'aberration sphérique était la cause du phénomène. Il faut remarquer, cependant, que leur déduction s'appuie sur l'hypothèse de que dans l'œil atropinisé le cristallin a la même forme, que quand il est à l'état normal et focalisé à l'infini.

Après cela Otero et Durán ont investigué si l'aberration chromatique était la cause de la myopie nocturne. Dans ce but ils ont employé des

lumières de couleurs différentes, obtenues avec les filtres de Zeiss, et ils ont observé que la myopie nocturne se produisait toujours mais en quantité variable. On obtient la vision nette avec la moindre quantité de lumière quand on place devant l'œil, approximativement, $-1,0D$ avec la lumière rouge (filtre L_I), $-2,0D$ avec la lumière jaune (filtre L_{II}) et $-3,0D$ avec la lumière bleue (filtre L_{III}). Par conséquent l'œil est myope pour toutes les couleurs quand la lumière est en petite quantité; et les variations relativement au jaune ne dépassent pas $1D$ dans les deux sens. Alors les auteurs concluent que l'aberration chromatique n'est pas, elle aussi, la cause de la myopie nocturne.

Après avoir rejeté les aberrations de sphéricité et d'achromatisme, les auteurs sont obligés d'admettre, par exclusion, que la myopie nocturne est due à «un état d'adaptation de l'œil à $-2D$ ». Si cette conclusion est correcte, ce qui se passe c'est qu'en absence du stimulant lumineux, le cristallin reste dans l'état de déformation correspondant à la distance de vision de 50 cm .

b) *Explication de Ronchi*. Le professeur Vasco Ronchi, président de l'Associazione Ottica Italiana; s'occupe de la myopie nocturne dans le numéro de Février de l'année courante de la revue «Ottica». Il rapporte que, pour confirmer la découverte, il a utilisé des jumelles de 7×100 , avec pupille de sortie de 7 mm de diamètre, et il a en premier lieu contemplé un paysage illuminé par la Lune en mettant les deux oculaires à 0 dioptries, qui est la focalisation optimale pour sa vue en plein jour. Dans ces circonstances la vision a été nette; cependant elle a été considérablement améliorée en modifiant la localisation, et atteignit une netteté particulièrement bonne quand il a mis $-2D$ dans les deux oculaires. Il a résumé ses impressions dans la phrase suivante: «L'expérience a été si claire, qu'elle ne laisse aucun doute en ce qui concerne l'existence de la myopie nocturne».

Ronchi considère suffisantes les raisons présentées par Otero et Durán pour ne pas prendre en considération l'aberration sphérique et, sans repousser l'hypothèse que l'accommodation intervienne, il pense qu'on doit chercher l'explication dans la combinaison de l'aberration chromatique avec le phénomène de Purkinje. Nous devons remarquer que le professeur italien ne connaissait pas, à ce moment les mesures effectuées par Otero et Durán, avec les filtres L de Zeiss, qui ont fait abandonner l'aberration chromatique comme cause de la myopie nocturne.

Voici comment Ronchi développe son idée. Bien que les mesures d'aberration chromatique dans l'œil n'aient pas donné des résultats concordants, l'on peut admettre que l'œil normal est émetrope pour le jaune, légèrement hypermétrope pour le rouge ($+1,5D$), et notable-

ment myope ($-3D$) pour le violet. D'autre part le phénomène de Purkinje fait qu'en lumière crépusculaire la sensibilité visuelle la plus grande correspond au bleu-indigo. De cette sorte, la refraction de l'œil accommodé à l'infini, qui est capable de porter sur la rétine le foyer des rayons jaunes, est excessive pour les rayons bleus dont le foyer est devant la rétine; et comme le phénomène de Purkinje fait que ce soient ces rayons-ci ceux qu'on utilise dans la vision crépusculaire, l'œil se rend myope dans ces circonstances.

L'assertion de Ronchi, selon laquelle l'ensemble de l'aberration chromatique et du phénomène de Purkinje fait que l'œil se rend myope dans l'obscurité est évidemment correcte. Cependant nous démontrerons bientôt qu'à côté de la myopie nocturne, on déduit des expériences de Otero et Durán d'autres conséquences encore, et que celles-ci ne peuvent pas être expliquées seulement avec le mécanisme proposé par Ronchi.

c) *Opinion de A. Kühn*. La «Gesellschaft zur Förderung des Optischen Instituts» de l'École Technique Supérieure de Berlin s'est occupée récemment de la myopie nocturne; nous connaissons le contenu par une longue lettre adressée par le Dr. W. Stipa à Mr. Otero. Dans la discussion, les représentants de la maison Buchs, le Directeur Martin et le Dr. Flügge, ont dit qu'ils avaient déjà remarqué la variation de la focalisation optimum dans les oculaires quand la nuit approche, ayant rencontré des variations entre $-0,5$ et $1,5$ dioptries. Le professeur A. Kühn, de Jena, a adopté une opinion sceptique, et a déclaré ce qui suit:

«On ne me fera pas croire avec facilité dans la myopie nocturne. Au contraire je suis de l'opinion que l'œil s'accorde pour évaluer le contraste optimum; et il y a des raisons pour que celui-ci coïncide, non avec le foyer parfait, mais avec un autre dans lequel les lignes se présentent un peu diffuses; alors le contraste est plus grand que quand l'image est bien focalisée et l'objet visé sera perceptible avec plus de facilité».

Voici une nouvelle hypothèse, séduisante par sa simplicité, selon laquelle il faut une petite défocalisation pour apercevoir les objets quand il y a peu de lumière. Pourtant l'on peut réfuter l'opinion du professeur Kühn avec la seule observation que la défocalisation mentionnée peut être obtenue en tournant dans l'un ou l'autre sens les oculaires des jumelles et, cependant, tout le monde est d'accord que l'amélioration, dans la vision crépusculaire, s'obtient quand la défocalisation s'effectue précisément dans le sens des dioptries négatives, comme il convient à un œil myope.

Sur l'existence, en plus de la myopie nocturne, d'une presbytie nocturne. Voici que Ronchi d'une part, et Otero et Durán d'autre arrivent à des conclusions contradictoires en se basant dans les mêmes expériences. Ce fait nous donne du courage pour présenter notre opinion sur la myopie nocturne en nous appuyant dans l'étude minutieuse des résultats expérimentaux d'Otero et Durán avec lesquels nous pourrions, peut-être, résoudre le problème, et, à la fois, présenter le phénomène dans toute son ampleur.

Otero et Durán ont utilisé le diaphanomètre de Ronchi, qui est un instrument destiné à mesurer le rendement optique des lunettes quand on suppose que l'œil en fait partie. Dans la forme employée par Otero et Durán l'appareil est constitué par un colimateur et par une lunette dont le foyer se détermine avec une échelle en dioptries placée dans l'oculaire. Le colimateur donne du test placé au foyer une image à l'infini qu'on observe avec la lunette ; le rôle de celle-ci consiste dans la formation d'une autre image dont la distance varie avec la focalisation. Quand l'échelle de la lunette indique 0 dioptries, tout se passe comme si on avait placé le test à l'infini et l'on aurait regardé directement avec un angle visuel qui dépend de l'amplification angulaire de la lunette. Une focalisation de $-2D$, par exemple, équivaut à l'emplacement du test à un $1/2$ mètre de l'œil, comme il convient à un œil myope dont le *punctum remotum* se trouve à cette distance.

Quand on focalise dans l'échelle des dioptries positives, tout se passe comme s'il y avait un objet virtuel placé derrière l'œil, où se trouve le *punctum remotum* d'un œil hypermétrope.

Otero et Durán ont utilisé un test formé par deux lignes perpendiculaires très fines, et leur méthode de mesure consistait à mettre l'oculaire dans une focalisation déterminée et à diminuer l'éclat jusqu'à ce que le test n'était plus visible (minimum visible). En prenant comme ordonnée la focalisation de la lunette exprimée en dioptries et comme abscisse la valeur limite correspondante de l'éclat mesuré en asb, on obtient des courbes qui ont l'aspect de celle qu'on représente dans la fig. 1. À 0 dioptries correspondent 0,05 asb comme limite de l'éclat parce qu'au-dessus de cette valeur on ne voit plus le test. Avec $-1D$ la limite se réduit à un peu plus de 0,02 asb et ensuite, en augmentant plus encore la divergence du système, c'est-à-dire, en diminuant progressivement la longueur de la lunette, la limite de l'éclat croît. La courbe qu'on obtient de cette manière, divise le plan de représentation en deux régions : dans celle de gauche on ne voit pas le test par défaut de lumière ; la région à la droite est la *région de visibilité*.

Étant donné que l'image du test produite par le colimateur se trouve

dans l'infini, il suffit d'appliquer la formule des lentilles pour se convaincre que l'échelle en dioptries de l'oculaire mesure l'inverse de la distance entre l'œil et l'image définitive produite par la lunette, comptée positivement quand l'image est placée devant l'œil. Nous avons mis dans la figure, à côté de l'échelle en dioptries, l'échelle des distances en mètres.

On sait que dans les instruments optiques, quand on néglige les pertes par absorption et par réflexion, l'image a le même éclat que

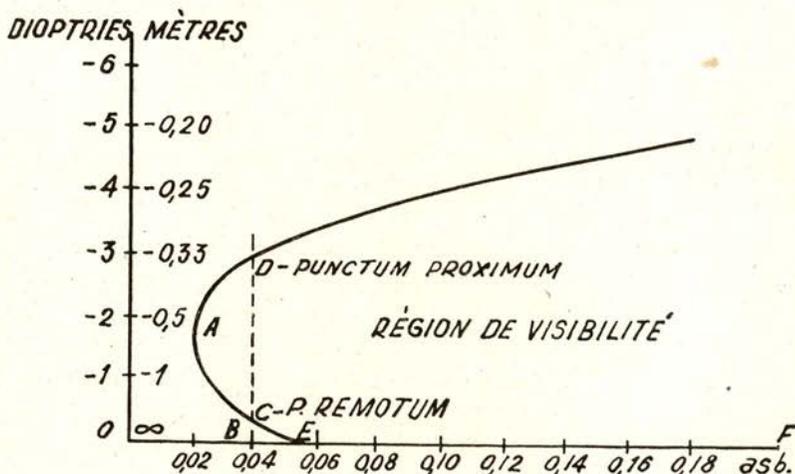


Fig. 1 — Courbe de la limite d'éclat.

l'objet. Donc, tout se passe dans le diaphanomètre comme si l'on observait à l'œil un des objets avec l'éclat indiqué dans les abscisses de la figure, et mis à la distance marquée sur l'échelle des ordonnées, mais avec la condition qu'on les voit tous sous le même diamètre apparent.

Supposons maintenant qu'on maintient constante l'illumination du test, de sorte que l'éclat soit constant, par exemple 0,04 asb. Un objet placé à l'infini (point B) sera invisible parce qu'il se rencontre en dehors de la région de visibilité. Pour qu'on le voit, nous devons l'approcher de nous jusqu'à la position correspondante au point C ($-1/2 D$, c'est-à-dire 2 mètres) d'où l'on déduit la conséquence que, pour un œil normal, le *punctum remotum* qui était à l'infini quand l'éclat était égal ou supérieur à 0,05 asb, s'est rapproché jusqu'à 2 mètres quand on diminue l'éclat jusqu'à 0,04 asb. Si l'on rapproche l'objet encore plus il pénètre dans la région de visibilité et nous le verrons jusqu'au point D ($-3,3 D$, qui correspondent à 33 cm); pour les distances encore

plus petites la vision est impossible parce que l'objet est placé en dehors de la région de visibilité. Le point D correspond, par conséquent au *punctum proximum*. En résumant: chaque ligne parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe de la limite de l'éclat en deux points: le supérieur est le *punctum proximum* et l'inférieur le *punctum remotum*. La distance entre les deux, mesure, comme on sait, le pouvoir d'accommodation.

Les considérations précédentes, qui pourraient, peut-être, paraître triviales, nous permettent déduire des mesures d'Otero et Durán la conséquence suivante :

Au fur et à mesure que décroît l'éclat, décroît aussi le pouvoir d'accommodation jusqu'à l'annihilation quand on atteint la limite de visibilité. Comme la perte totale ou partielle du pouvoir d'accommodation se dénomine presbytie, nous pouvons dire que *l'œil se rend presbyte dans obscurité.*

Tous ceux qui se sont occupés de la myopie nocturne ont été attirés par la branche F E C A de la courbe de la limite d'éclat; cette branche montre que le *punctum remotum* se rapproche graduellement au fur et à mesure que manque la lumière, ce qui est un des symptômes de la myopie. Mais la myopie simple consiste dans un excès de convergence du cristallin sans perte du pouvoir d'accommodation, ce qui se traduit par un rapprochement aussi bien du *punctum proximum* que du *punctum remotum*. Dans la vision nocturne il y a, par conséquent, une myopie combinée avec une presbytie.

En regardant la courbe complète on voit que quand la lumière décroît, le *punctum remotum* rapproche et le *punctum proximum* s'éloigne jusqu'à ce que les deux coïncident en un seul point situé à $-2D$ (50 cm) de l'œil.

Sur les courbes de la limite d'illumination. Les mesures d'Otero et Durán ont été faites avec des illuminations très petites ce qui n'a pas permis de tracer complètement la courbe qui limite la région de visibilité; cependant nous pouvons prédire la forme de la courbe complète avec de grandes probabilités de réussite.

Un œil normal ne peut pas être focalisé à l'infini quand il regarde à travers une lentille convergente, ce qui signifie que la branche inférieure de sa courbe ne peut pas passer au dessous de l'axe des abscisses mais doit se prolonger en suivant cet axe, le plus vraisemblable étant que l'union entre la partie courbe et la partie rectiligne se fait par tangence et non par point anguleux. En ce qui concerne l'autre

branche, l'on doit espérer qu'elle continue à monter monotoniquement jusqu'à ce que le pouvoir d'accommodation atteigne la valeur correspondante à l'œil normal en plein jour (par exemple 10 dioptries, qui correspondent à un *punctum proximum* placé à 10 cm). Par conséquent les courbes complètes de la limite d'éclat en fonction de la distance devront avoir l'allure représentée schématiquement dans la fig. 2, dans laquelle nous avons tracé aussi les courbes qui, probablement, correspondent à un œil myope et à un œil hypermétrope qui conserveraient intact leur

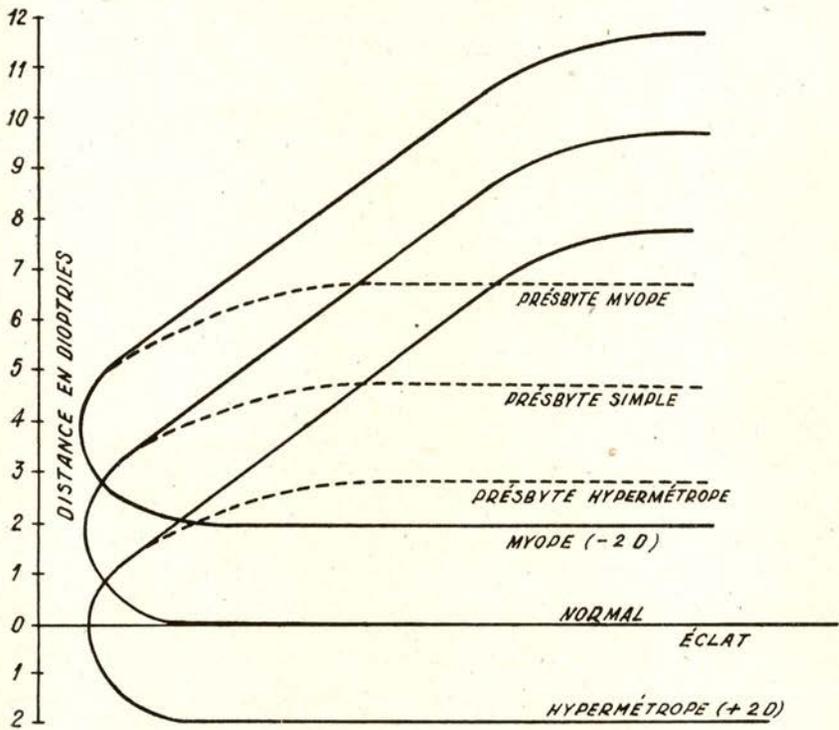


Fig. 2—Courbes complètes de la limite d'éclat hypermétrope pour différents cas typiques (schématiques).

pouvoir d'accommodation avec la lumière diurne. Dans les individus présbytes la branche de la courbe située au-dessous de la limite minimum A, se conservera inaltérée, mais la branche supérieure descendra de la quantité correspondante à la perte du pouvoir d'accommodation, comme on indique avec les lignes pointillées.

Sur l'action de l'atropine. On accepte généralement que les midriatiques paralysent le mécanisme de l'accommodation. Mais, s'il en était

ainsi, les deux branches de la courbe de la limite d'éclat devraient s'ajouter pour former une courbe unique, et la visibilité ne serait possible que pour une distance déterminée qui pourrait être constante ou variable avec l'illumination. Les expériences d'Otero et Durán, d'après notre interprétation, démontrent conclusivement que cela n'a pas lieu. Comme on voit dans la fig. 3, l'atropine fait descendre la courbe, les deux branches respectives conservant la même séparation. *L'atropine produit donc une hypermétropie transitoire, d'une ou deux dioptries sans altération du pouvoir d'accommodation.* Tout mène à croire que cette

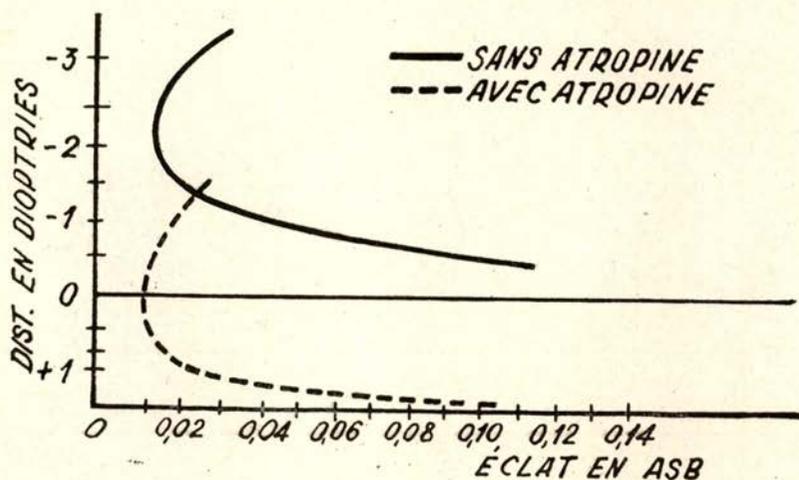


Fig. 3 — Une personne myope se rend hypermétrope par l'action de l'atropine mais elle conserve son pouvoir d'accommodation.

hypermétropie provient d'une altération du cristallin, qui diminue de 2 dioptries sa convergence. Évidemment cette conclusion aura une importance très grande en Ophthalmologie.

L'interprétation qu'Otero et Durán ont donné de ces expériences s'appuie dans la conviction que l'atropine n'altère pas la forme et la structure du cristallin et paralyse le mécanisme de l'accommodation. Si notre point de vue est correct, c'est justement le contraire qu'a lieu et il faut faire une révision de leurs conclusions.

Révision des hypothèses relatives à la myopie nocturne. Ronchi a expliqué la myopie nocturne, c'est-à-dire, le rapprochement progressif du *punctum remotum* au fur et à mesure que fait défaut la lumière, en combinant l'aberration chromatique avec le phénomène de Purkinje.

Cette explication, aussi simple qu'ingénieuse, ne supporte pas l'épreuve expérimentelle. En effet, Otero et Durán ont déterminé les courbes de

la limite d'éclat en utilisant une lumière monochromatique dans toute la région du spectre visible, obtenue avec les filtres S de Zeiss, pour l'œil normal et pour l'œil atropinisé. L'examen de toutes les courbes nous indique immédiatement que *la myopie nocturne se présente aussi en lumière monochromatique*. Avec le filtre S-75, qui correspond à l'extrémité rouge du spectre, le *punctum remotum* de l'œil sans atropine se rapproche jusqu'à $-1,5 D$ ($0,67 m$) quand la lumière fait défaut, fig. 4, ce qui ne peut pas être attribué ni à l'aberration chromatique ni au phénomène de Purkinje.

Selon Otero et Durán, l'explication de la myopie nocturne doit être

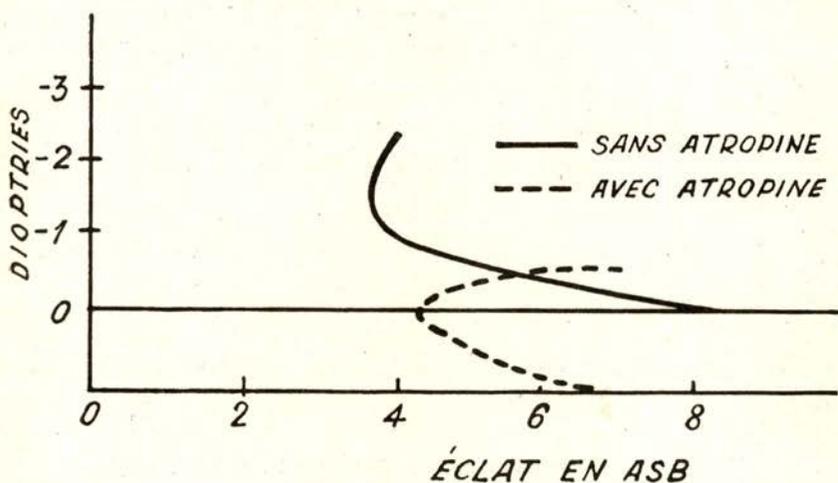


Fig. 4—La myopie nocturne s'observe aussi en lumière monochromatique.

cherchée dans le mécanisme d'accommodation. En plein jour l'œil non accommodé est focalisé à l'infini et, au fur et à mesure que fait défaut la lumière, l'œil reste accommodé à des distances de plus en plus courtes. Nous avons vu, cependant, que le défaut de lumière paralyse l'accommodation. L'hypothèse de l'accommodation se heurte aussi contre l'objection suivante faite par Stipa :

«Des graphiques d'Otero et Durán résulte que l'aberration sphérique de l'œil ne peut pas transporter le plan de projection de plus de $1/2 D$ quand l'œil est accommodé pour l'infini. On est obligé d'admettre que dans l'accommodation à $50 cm$ l'œil possède une aberration sphérique telle que le plan de projection souffre une translation de $2D$ quand on passe de la vision diurne (pupille de $4 mm$ de diamètre) à la vision crépusculaire (pupille de $8 mm$ de diamètre). Si ce n'était pas le cas on devrait admettre qu'aussi bien avec de la lumière du jour qu'avec de la

lumière crépusculaire on obtiendrait le maximum d'acuité visuelle en plaçant les jummelles avec la même focalisation».

Nous supposons que la clef du mystère se rencontre immédiatement quand on considère qu'Otero et Durán ont rejeté l'aberration sphérique comme cause de la myopie nocturne en s'appuyant dans le fait que les yeux atropinisés se comportent comme des systèmes ultra-correctés et en concluant que quand les dimensions de la pupille augmentent l'œil doit se rendre, non myope, mais hypermétrope. Les mêmes auteurs, en se basant dans l'opinion des ophtalmologistes, ont admis que le cristallin n'est pas modifié par l'atropine et en ont déduit que l'œil normal focalisé à l'infini est aussi un système ultra-correcté, ce qui oblige à ne pas considérer l'aberration sphérique comme étant responsable de la myopie nocturne.

Cependant, en nous appuyant dans les mêmes expériences d'Otero et Durán, nous avons démontré que l'atropine modifie le cristallin et rend l'œil hypermétrope. L'ultra-correction rencontrée par Otero et Durán doit, donc, être attribuée à l'atropine, et alors il n'y a pas de raison pour nier que l'aberration sphérique n'intervienne dans le rapprochement du *punctum remotum*.

D'autre part nous avons vu que l'œil perd dans l'obscurité la faculté d'accommodation et il est naturel de penser que le cristallin possède alors ce qu'on peut appeler sa forme naturelle. Par conséquent, si le cristallin possède dans le minimum A de la limite d'éclat (fig. 1) ce que nous avons appelé sa forme naturelle, et si la même chose se vérifie quand il regarde l'infini en plein jour (portion EF de la courbe), il semble plausible d'admettre que cela arrive encore entre les points A et E. C'est-à-dire, à notre avis le cristallin conserve sa forme naturelle dans toute la branche AEF de la courbe de limite d'éclat (branche correspondante au *punctum remotum*); dans celle-ci il n'y a pas d'accommodation.

D'après ces considérations nous pouvons résumer notre point de vue de la manière suivante :

Quand le cristallin possède sa forme naturelle et travaille en pleine ouverture, il focalise sur la rétine un objet situé à 50 cm et illuminé avec la lumière qui, en vertu du phénomène de Purkinje, produit la sensibilité maximum avec le minimum d'éclat; si l'on ferme la pupille on focalisera un objet situé dans l'infini et illuminé avec de la lumière rouge-jaune.

Par conséquent dans le rapprochement du *punctum remotum* intervient l'aberration sphérique, et aussi, comme Ronchi le suppose, l'aber-

ration chromatique combinée avec le phénomène de Purkinje. En ce qui concerne l'importance relative de ces causes, nous croyons que presque tout l'effet est dû à l'aberration sphérique parce que, comme le fait remarquer Durán, le phénomène de Purkinje transporte la sensibilité maxima de l'œil de 580μ à 520μ , ce qui représente seulement

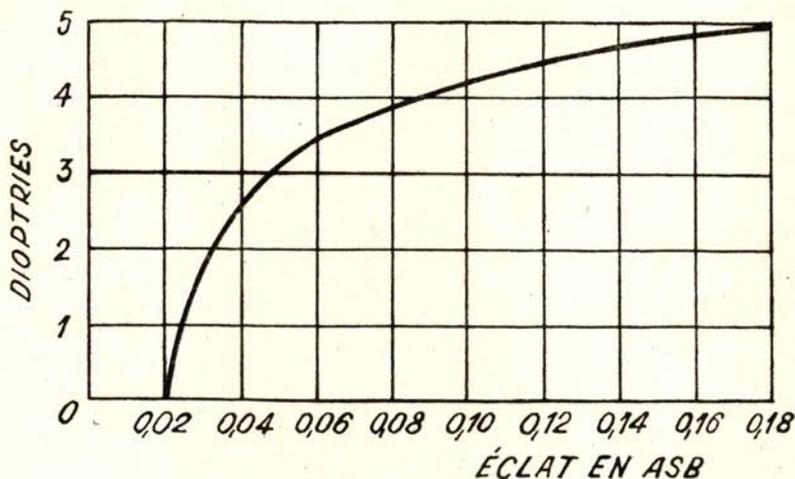


Fig. 5—Pouvoir d'accommodation en fonction de l'éclat.

0,1 dioptres pour le rapprochement du *punctum remotum*, au lieu des 2 dioptres observées.

Voici maintenant comment, d'après nous, on doit répondre à la question formulée par Stipa :

Quand on regarde l'infini en lumière naturelle abondante, le cristallin a la même forme qu'il possède quand on regarde à 50 cm avec peu de lumière ; son aberration sphérique est la cause du changement de projection excepté dans la petite partie attribuable à l'aberration chromatique combinée avec le phénomène de Purkinje.

En résumant tout ce qu'on vient de dire nous pouvons affirmer que :

La myopie nocturne ou rapprochement du punctum remotum dans la vision crépusculaire, est due fondamentalement à l'aberration sphérique ; ce qu'il y a de nouveau c'est que simultanément, le mécanisme d'accommodation se paralyse et apparaît la presbytie nocturne qui, combinée avec l'aberration de sphéricité, est la cause de l'éloignement du punctum proximum.

SUR UN NOUVEAU TYPE D'ÉLECTRON

par A. PROCA

(Septembre, 1943)

1. Dès les débuts de la mécanique ondulatoire¹, on s'est préoccupé de généraliser les équations fondamentales de manière à leur permettre de satisfaire aux conditions d'invariance de la théorie de la relativité; cependant, pour des raisons dont le sens n'est apparu que beaucoup plus tard, cette généralisation n'a pas conduit aux résultats importants que l'on aurait pu escompter tout d'abord.

Dirac montra quelle était la manière correcte d'atteindre l'invariance relativiste dans le cas de l'électron; il découvrit ainsi le fait remarquable que cette invariance seule suffisait pour conférer à la particule une propriété nouvelle, déjà découverte expérimentalement, à savoir l'existence d'un spin de valeur $1/2$. Ce n'était pas tout; l'électron ainsi défini jouissait de propriétés nouvelles qui se manifestaient mathématiquement par l'apparition d'un double signe de l'énergie. On sait comment l'interprétation de Dirac a dégagé le sens physique de cette nouvelle caractéristique et de quelle manière l'expérience a vérifié la théorie.

Ainsi donc, la seule hypothèse de l'invariance relativiste de l'équation fondamentale entraîne automatiquement l'existence de propriétés physiques nouvelles de l'électron théorique.

Dans ces conditions, on peut se demander si l'analyse rappelée plus haut rend compte de *toutes* les propriétés nouvelles introduites par la relativité.

Les considérations suivantes semblent indiquer que la réponse à cette question devrait être négative. En d'autres termes, il semble que la relativité suggère l'existence d'une particule nouvelle qui diffère de l'électron de Dirac, tout en ayant d'ailleurs même masse, même charge et en un certain sens même spin. Un quatrième élément, correspondant précisément à une nouvelle propriété, semble nécessaire pour définir complètement un électron relativiste.

¹ Cf. Schrödinger, Ann. der Physik, 81, 1926, p. 109, Par. 6.

2. En effet, considérons le Lagrangien ou, plus simplement, l'équation relativiste d'un électron en l'absence de champ

$$(1) \quad \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{2\pi mc}{h} \psi = 0, \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Dans cette équation, Dirac fait opérer, sur la fonction d'onde ψ à quatre composantes, l'opérateur $\gamma^\mu \partial_\mu$; le symbolisme adopté écrit cet opérateur sous forme d'invariant et l'on sait que cela correspond bien à une invariance effective de l'équation. Les γ^μ sont des opérateurs représentables par des matrices à 4 lignes et 4 colonnes; ils forment un système qui comprend outre l'unité 1, les γ^μ eux-mêmes et les produits

$$\gamma^\mu \gamma^\nu, \quad \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \quad \text{et} \quad \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4.$$

Or, il est évident que l'on obtiendra encore une équation *invariante*, et pour un ψ qui aura toujours 4 composantes, si l'on ajoute à l'opérateur du premier membre des termes de la forme

$$A_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu + B_{\lambda\mu\nu} \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu + C \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4.$$

Remarquons tout de suite que les termes qui font intervenir le pseudo-vecteur $\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu$ et le pseudo-scalaire $\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4$, ne sont pas *a priori* susceptibles de modifier profondément les caractéristiques de l'électron de Dirac. En effet, les grandeurs qui leur correspondent sont les duales de celles attachées au vecteur γ^μ et au scalaire 1, que l'équation de Dirac contient déjà. Par contre, l'adjonction d'un terme de la forme $A_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu$ *introduira des caractéristiques essentiellement nouvelles* et l'équation ainsi obtenue décrira une particule différente de l'électron ordinaire.

Précisons la forme de ce terme additif. $A_{\mu\nu}$ sera un tenseur anti-symétrique formé avec les éléments géométriques et dynamiques qui définissent la particule. Or, avec ces éléments, donc avec les coordonnées x_μ et les $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}$, le plus simple tenseur de ce type qu'on puisse former est

$$x_\mu^\nu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu.$$

La forme la plus simple du terme additif $A_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu$ sera donc

$$\alpha (x_\mu^\nu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu),$$

α étant une constante. En posant

$$m^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$$

la forme finale de l'équation généralisant celle de Dirac sera donc

$$\gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi + i \dot{\lambda} x_{\sigma} m^{\sigma \mu} \partial_{\mu} \psi + \frac{2\pi mc}{h} \psi = 0,$$

$\dot{\lambda}$ étant une constante ayant comme dimensions l'inverse d'une longueur. L'équation adjointe sera comme dans le cas de Dirac

$$\partial_{\mu} \psi^{\dagger} \cdot \gamma_{\mu} + i \dot{\lambda} x_{\sigma} \cdot \partial_{\mu} \psi^{\dagger} \cdot m^{\mu \sigma} - \frac{2\pi mc}{h} \psi^{\dagger} = 0$$

avec

$$\psi^{\dagger} = i \psi^* \gamma^4.$$

L'équation tout à fait générale contiendra aussi les termes duals; nous la laisserons de côté pour le moment.

3. L'équation introduit non seulement les éléments ∂_{μ} d'une translation, mais aussi ceux $x_{\mu} \partial_{\nu} - x_{\nu} \partial_{\mu}$ d'une rotation infinitésimales.

Le nouvel électron sera caractérisé non seulement par sa masse m , mais aussi par une nouvelle constante fondamentale, attaché à la particule, à savoir la longueur λ . Celle-ci permet de séparer deux régions de l'espace, l'intérieur et l'extérieur d'une sphère rayon $1/\lambda$. Lorsque cette sphère a un rayon infini ($\lambda=0$) et seulement dans ce cas, la particule se confond avec l'électron de Dirac.

4. La particule ainsi définie possède une charge constante. En effet, on peut définir, comme dans le cas de Dirac, un courant d'Univers

$$j^{\mu} = e \psi^{\dagger} \gamma^{\mu} \psi + i e \dot{\lambda} \cdot x_{\sigma} \psi^{\dagger} m^{\sigma \mu} \psi,$$

lequel est conservatif

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$$

en vertu des équations fondamentales.

5. On peut définir pour cette nouvelle particule un tenseur d'énergie — quantité de mouvement dont l'expression explicite est la suivante :

$$\begin{aligned} -\frac{2\pi}{hc} \Gamma^{\bar{ij}} = & i(\partial^i \psi^{\dagger} \cdot \gamma^j \cdot \psi - \psi^{\dagger} \cdot \gamma^j \cdot \partial^i \psi) + \dot{\lambda} x_{\sigma} (\psi^{\dagger} m^{\sigma i} \cdot \partial^j \psi - \partial^i \psi^{\dagger} \cdot m^{\sigma j} \cdot \psi) + \\ & + \dot{\lambda} x^i (\psi^{\dagger} \cdot m^j \sigma \cdot \partial_{\sigma} \psi - \partial_{\sigma} \psi^{\dagger} m^j \sigma \psi) + \partial_{\sigma} \left\{ \frac{1}{4} \psi^{\dagger} (m^{ik} \gamma^i + \gamma^i m^{ik}) \psi + \right. \\ & \left. + \frac{i\dot{\lambda}}{4} x_{\sigma} \cdot \psi^{\dagger} (m^{\sigma i} m^{jk} + m^{jk} m^{\sigma i}) \psi - \frac{3i\dot{\lambda}}{2} (x^j \delta^{ik} - x^i \delta^{jk}) \psi^{\dagger} \psi \right\}. \end{aligned}$$

Ce tenseur est symétrique en i et j . D'autre part, comme le lagrangien correspondant, il renferme explicitement les coordonnées x_μ et en particulier le temps. Donc, le schéma hamiltonien qui s'en déduit *ne représente pas un système conservatif* et en effet la loi différentielle de conservation de l'énergie-quantité de mouvement n'est pas satisfaite, la divergence de T_{ij} n'est pas nulle. On a :

$$\partial_j T^{ij} = 2\lambda \cdot x^i (\partial_k \psi^+ m^{ik} \partial_j \psi)$$

soit en général

$$(2) \quad \partial_j T^{ij} = x^i \partial_j \left(\frac{\partial L}{\partial x^j} \right)_e$$

où $\left(\frac{\partial L}{\partial x^j} \right)_e$ est la dérivée du lagrangien par rapport aux coordonnées x_j qui y apparaissent explicitement.

Pour $\lambda=0$, ce tenseur se réduit à celui de l'électron de Dirac.

6. *Le moment cinétique total de la nouvelle particule est une constante.* En effet, formons la densité de ce moment cinétique à la façon habituelle

$$m^{ijk} = x^j T^{ik} - x^i T^{jk}.$$

Or, cette expression vérifie une loi de conservation malgré que le système ne soit pas conservatif quant à l'énergie ; on a :

$$\partial_k m^{ijk} = (T^{ji} - T^{ij}) + x^j \partial_k T^{ik} - x^i \partial_k T^{jk} = 0$$

en vertu de la symétrie de T^{ij} et de la relation (2).

Le moment angulaire total

$$\int m^{ijk} dV = \int (x^j T^{ik} - x^i T^{jk}) dV$$

peut être transformé et mis sous la forme d'une somme de deux termes comme dans le cas de l'équation de Dirac. Comme dans ce dernier cas d'ailleurs, cette séparation ne doit pas correspondre à une réalité physique directement observable.

Dans le cas de Dirac, les deux termes sont le «moment d'orbite», expression dépendant directement et explicitement des coordonnées, et un «spin» qui ne dépend que de la valeur du champ, c'est-à-dire du ψ au point considéré. Une pareille séparation peut être effectuée également pour la nouvelle particule. Comme la précédente, elle est arbitraire, mais *il est raisonnable de considérer la partie qui ne dépend pas explicitement des coordonnées comme un moment angulaire propre à la*

particule c'est-à-dire comme un spin. Or, cette partie s'écrit, ainsi qu'on le voit immédiatement

$$\int \frac{ihc}{8\pi} \psi^+ (\gamma^4 \gamma^i \gamma^j - \gamma^j \gamma^i \gamma^4) \psi dV .$$

Elle a la même forme que celle qui apparaît dans le cas de l'électron de Dirac et correspond au spin de celui-ci. Le «moment d'orbite» dépend explicitement du «point sur l'orbite», c'est-à-dire des coordonnées et cela d'une manière qui diffère de celle de Dirac les x_μ ayant d'ailleurs des origines différentes. Cette différence assure la conservation du moment total malgré la non-conservation de l'énergie.

D'autres séparations en deux termes peuvent être faites, mais une analyse plus serrée est nécessaire pour définir le «spin» dans le cas de la particule actuelle.

7. En résumé, d'après la description précédente, le nouvel «électron» est une particule qui a droit à ce nom puisqu'il garde une charge électrique constante; il garde aussi un moment angulaire total constant et l'on peut raisonnablement lui attribuer un spin. Sa caractéristique la plus curieuse est le fait que, même libre, et malgré qu'il garde une charge électrique et un moment cinétique constants, son énergie varie; il en perd on en gagne suivant le signe de λ .

Si l'on observe globalement des électrons libres identiques issus d'une même source mais qui en sortent à des époques différentes quelconques de leur vie, on constatera que leurs énergies forment un spectre continu; ce spectre devra même être limité du côté des grandes énergies par la valeur de l'énergie maxima que possède l'électron au moment de sa création.

Un mécanisme de ce genre peut donc être utilisé pour rendre compte de phénomènes qui ne semblent pas obéir au principe de la conservation de l'énergie, — comme par exemple le spectre continu des rayons β du radium E, pour lequel on a été obligé d'imaginer l'hypothèse, passablement artificielle, de l'existence d'un *neutrino*.

Tout cela est évident une fois admise la non conservation de l'énergie, et non seulement le nouvel électron mais aussi tout mécanisme satisfaisant à cette condition peut être utilisé pour expliquer le phénomène ci-dessus. L'intérêt de la solution qu'offre la nouvelle particule proposée tient cependant à deux raisons.

En premier lieu, elle montre de quelle façon simple on peut attaquer les problèmes des corpuscules non-conservatifs: il suffit d'utiliser des lagrangiens qui contiennent explicitement les coordonnées de la manière

indiquée. L'emploi de tels lagrangiens a été écarté d'emblée chaque fois qu'il a fallu définir une nouvelle particule. Si forte est la conviction qu'une particule constitue un système *fermé* et que par conséquent, elle doit avoir une énergie constante, que même devant le témoignage expérimental fourni par le spectre continu du Ra E, on a préféré introduire le neutrino plutôt que d'y renoncer. Il n'y a naturellement jusqu'à présent aucune raison d'admettre que ce spectre continu soit précisément une manifestation des propriétés décrites du nouvel électron. Néanmoins, celui-ci offre un exemple de corpuscule qui n'est pas un système fermé et dont *une partie* de l'énergie varie, sans que cela entraîne cependant une altération du caractère conservatif de la charge ou du spin. Remarquons toutefois que cette non-conservation apparaît ici dans les conditions particulières dans lesquelles l'équation a été écrite, c'est-à-dire en relativité restreinte. Elle n'exclut pas a priori une compensation, de nature gravitationnelle par exemple, qui apparaîtrait dès qu'on se placerait dans le cadre de la relativité générale où le principe de conservation de l'énergie devrait être satisfait.

En second lieu, l'intérêt de cette solution consiste dans le fait qu'elle *n'est pas une solution ad hoc*, mais qu'elle découle automatiquement de l'application de la relativité restreinte au choix de l'équation d'onde. En suivant la voie ouverte par Dirac, laquelle conduit à des résultats vérifiés par l'expérience, et en appliquant intégralement les procédés utilisés, c'est-à-dire en tenant compte également des termes en $\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}$, on trouve que la solution la plus simple présente les caractères que nous avons décrits plus haut. Cette solution semble en quelque sorte imposée par la relativité. Pour cette raison il convient de l'analyser à fond, jusqu'à ses dernières conséquences, de façon à pouvoir nous rendre compte si, malgré son caractère inusité, elle n'est pas en mesure de nous conduire, même indirectement, à de nouveaux résultats expérimentaux.

NOTES

1. W. PAULI, dans le *Handbuch der Physik* t. XXIV/1, 1933, p. 233 remarque que les exigences de l'invariance relativiste ne déterminent l'équation de Dirac qu'à un terme additif en $\gamma^\mu \gamma^\nu$ près; il propose cependant comme coefficient possible de ce terme, le champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$ et supprime par conséquent ce terme en l'absence de champ.

2. P. A. M. DIRAC, *Annals of Mathematics*, t. 36, 1935, p. 657 considère un espace de Sitter, une sphère $x_\mu x^\mu = R^2$ plongée dans un espace à 5 dimensions ($\mu = 0, 1, 2, 3, 4$) et propose comme équation d'onde dans cet espace

$$\gamma^\mu \gamma^\nu (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \psi = k \psi.$$

La forme de cette équation est celle de notre terme additif: à cause de l'espace dans lequel elle est écrite, sa signification en est différente.

3. Le nouveau type d'électron proposé est le plus simple (il ne dépend que d'une seule constante arbitraire supplémentaire λ) et, semble-t-il, le plus intéressant. On peut cependant envisager d'autres particules, conservatives celles-la, caractérisées par un vecteur constant b_σ et définies par l'équation

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi + i b_\sigma m \gamma^\sigma \partial_\mu \psi + \frac{2\pi mc}{h} \psi = 0.$$

Leur étude sera entreprise ailleurs.

SPECTROGRAPHIE DU RAYONNEMENT γ ÉMIS PAR LE DÉPÔT ACTIF À ÉVOLUTION LENTE DU RADON

par LÍDIA SALGUEIRO (À LISBONNE)

(Janvier, 1944)

Le rayonnement γ émis dans la transmutation $\text{Ra D} \rightarrow \text{Ra E}$, a été étudié par absorption (soit dans un seul élément, soit par absorption selective), par spectrographie magnétique et par diffraction cristalline.

Nous allons exposer les résultats obtenus par ces différentes méthodes :

a) *Absorption* : Rutherford et Richardson [1] ont déterminé le coefficient d'absorption massique dans l'aluminium et ils ont obtenu la valeur $0,36 \text{ cm}^2/\text{g}$. Ce résultat est en bon accord avec celui donné par Curie et Fournier ($0,37 \text{ cm}^2/\text{g}$ [2]). Des mesures faites dans ce laboratoire et encore inédites ont conduit à la valeur $0,38 \text{ cm}^2/\text{g}$ (Gibert).

Des tables fournies par Compton et Allison [3] nous avons déduit que la longueur d'onde des rayons X correspondants à ce coefficient d'absorption massique est de l'ordre de 241 à 250 U. X.

b) *Spectrographie magnétique* : Les auteurs qui ont fait l'analyse du spectre β naturel du Ra D ont observé un groupe de raies qu'ils ont attribué à un seul rayonnement γ .

Le tableau suivant contient les résultats obtenus par les chercheurs qui ont étudié ce sujet :

Auteurs	Longueur d'onde (U. X.)
Danysz	261
Ellis	263
Meitner	262
Black	263
Curtiss	266

D'après les valeurs de $H\beta$ données par ces auteurs [4], nous avons calculé les énergies des différentes lignes du spectre β en employant les tables fournies par Mme. Curie [5]. Pour déterminer la longueur

d'onde du rayonnement γ , nous avons adopté pour les constantes les valeurs les plus récentes, à savoir :

$$h = 6,622 \times 10^{-27} \text{ erg. s}$$

$$c = 2,99776 \times 10^{10} \text{ cm/s}$$

$$\frac{e}{m_e} = 1,7592 \times 10^7 \text{ U. E. M.}$$

c) *Diffraction cristalline*: Frilley, en analysant par diffraction cristalline le spectre du rayonnement γ de la famille du radium, observa une raie de 265 U. X. qu'il a attribué au Ra D, comme suggeraient les résultats de la spectrographie magnétique. Il employa comme source des ampoules d'émanation de radium; on pourrait attribuer cette raie de 265 U. X., à un rayonnement émis dans une quelconque des transmutations qui mènent du radon au radium G.

d) *Absorption selective*: Les recherches, les plus récentes, ont été réalisées par Rasetti et Amaldi [7], qui étudièrent l'absorption dans les éléments cérium, praséodyme, néodyme, samarium et gadolinium.

Ils ont employé comme source radioactive des vieilles aiguilles d'émanation de radium.

De ces expériences, ils ont conclu que pendant la transmutation $\text{Ra D} \rightarrow \text{Ra E}$ il y aurait émission d'un rayonnement de longueur d'onde comprise entre 264 et 285 U. X. et d'un autre rayonnement de longueur d'onde comprise entre 285 et 295 U. X.

Ce nouveau rayonnement signalé par ces auteurs aurait pu passer inaperçu à Frilley car il doit tomber dans la région du spectre de deuxième ordre des raies intenses émises dans les transmutations $\text{Ra B} \rightarrow \text{Ra C}$ et $\text{Ra C} \rightarrow \text{Ra C}'$; par contre ce rayonnement devrait donner naissance par conversion interne, si le coefficient correspondant n'est pas trop petit, à des raies ne tombant sur aucune raie observée; pourtant on n'a trouvé, par spectrographie magnétique, aucune raie attribuable à un tel rayonnement.

D'autre part, d'après les valeurs du coefficient d'absorption, on serait conduit, soit à admettre une valeur plus petite que celle qu'indiquent les autres méthodes pour la longueur d'onde du rayonnement supposé monochromatique, soit à admettre que ce rayonnement est complexe et possède des composantes plus pénétrantes.

En vue d'éclaircir ces problèmes, nous avons décidé de reprendre l'étude de la transmutation $\text{Ra D} \rightarrow \text{Ra E}$ par diffraction cristalline.

Nous avons employé comme source radioactive des vieilles aiguilles d'émanation du radium. On élimine ainsi tout le spectre correspondant

aux transmutations du radon au radium D, qui se présentait dans les expériences de Frilley et on se place dans les mêmes conditions de Rasetti et Amaldi.

Dispositif expérimental. Nous avons employé un spectrographe de Bragg muni d'un cristal de sel gemme, dont les dimensions sont $3,5 \times 3$ cm.

On utilisa comme plans réflecteurs les plans parallèles à la face du cube [100]. Le cristal était couvert par une couche de vaseline pour le protéger contre l'action de l'humidité.

Le mouvement d'oscillation du cristal était produit par un moteur électrique de phono. Le rayonnement γ était canalisé par deux prismes en plomb légèrement divergents. Les faces des prismes du côté du cristal étaient recouvertes d'une plaque d'aluminium. Nous avons employé un châssis en aluminium avec une fenêtre de $7,5 \times 3,5$ cm recouverte par des plaques d'aluminium dont l'épaisseur variait d'après la région spectrale en étude.

Nous avons employé le film «Agfa» qui était parmi les films essayés le plus sensible et qui donnait un meilleur contraste. Le film était pressé contre deux écrans renforçateurs (Eastman Kodak), ce qui nous a permis de réduire le temps de pose.

On a calculé les longueurs d'onde des rayonnements d'après les grandeurs géométriques : distance cristal plaque (7,5 cm), position des raies sur le cliché et distance recticulaire du cristal.

Pour contrôler nos mesures nous avons remplacé la source radioactive par une source de rayons X, en employant un tube à anticathode démontable.

Le temps de pose a varié depuis 24 heures jusqu'à 480 heures.

Résultats. Nous présentons ici les premiers résultats de notre analyse pour la région spectrale depuis 100 U. X. jusqu'à 400 U. X..

Nous avons vérifié l'existence d'un rayonnement γ dont la longueur d'onde est 267 U. X. ; cette valeur est le résultat des mesures effectués en première, deuxième et troisième ordre aussi bien que par comparaison avec un spectre de rayons X (spectre K du Mo). Cette valeur s'accorde très bien avec les mesures de Frilley (265 U. X.), se place dans la région de 264 à 285 U. X. comme l'imposait les mesures par absorption sélective de Rasetti et Amaldi, et, dans la précision des mesures, se confond avec la détermination par spectrographie magnétique de Curtiss (266 U. X.).

Nous avons pris un soin particulier à chercher le rayonnement signalé par Rasetti et Amaldi et dont la longueur d'onde devrait se placer

entre les valeurs 285 et 295 U. X. Malgré que nous ayons fait des poses de 240 heures il nous a été impossible d'observer aucun rayonnement dans cette région et comme la raie de 267 U. X. est déjà nettement visible au bout de 24 heures, on peut affirmer que l'intensité d'un tel rayonnement, s'il existe, est inférieure à un dixième de l'intensité de la raie 267 U. X.; ce résultat est, en conséquence, incompatible avec le rapport 1:5 des intensités données par Rasetti et Amaldi pour ces deux rayonnements.

Finalement nous avons constaté l'existence d'un nouveau rayonnement dont la longueur d'onde présente la valeur 396 U. X.; cette raie ne peut pas être une raie correspondante à un spectre d'ordre supérieur et ceci pour deux raisons: d'abord parce que nous n'avons observé aucune raie de 198 U. X., ensuite parce que l'absorption dans l'aluminium d'un tel rayonnement est bien de l'ordre de grandeur auquel on devrait s'attendre d'après une longueur d'onde voisine de 400 U. X..

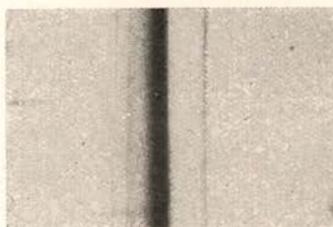
Nous ne pouvons pas donner la valeur de l'intensité de cette raie par rapport à la raie principale, mais d'après l'examen visuel et les temps relatifs de pose, nous croyons que l'intensité de ce rayonnement doit être de l'ordre de grandeur de 1:20; nous insistons sous le peu de précision de cette donnée que nous présentons seulement pour qu'on puisse, par spectrographie magnétique, essayer de trouver les rayonnements β de conversion interne de ce nouveau rayonnement gamma. Nous devons signaler que, comme notre source est constituée par des aiguilles anciennes de radon; où par conséquent le radium E et le polonium sont en équilibre avec le radium D, nous ne pouvons pas affirmer quelle est celle des transmutations qui conduisent du radium D au radium G, à laquelle appartient ce rayonnement γ .

Nous poursuivons notre analyse vers la région de fluorescence L, caractéristique de la transmutation $\text{Ra D} \rightarrow \text{Ra E}$.

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique de la Faculté de Sciences de Lisbonne. Je remercie M. le Prof. A. Cyrillo Soares, directeur du Laboratoire, de l'intérêt qu'il lui a porté et des moyens qu'il a mis à ma disposition. Je remercie aussi M. M. Valadares qui m'a proposé ce sujet de recherche et qui m'a beaucoup aidé de ses conseils pendant l'exécution.

Je tiens à remercier «l'Instituto para a Alta Cultura», qui m'a accordé une bourse pour la réalisation de cette recherche.

Raie 267 U. X. (1.^{er} ordre)



Faisceau directe



} Al
} 0,5 mm

} Al
} 2 mm



Raie 267 U. X. (2.^{ème} ordre)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] RUTHERFORD and RICHARDSON — *Phil. Mag.* 25, 723, (1913).
- [2] CURIE et FOURNIER — *C. R.* 176, 1301, (1923).
- [3] COMPTON et ALLISON — *X Rays in Theory and Experiment*,
D. Van Nostrand Company, Inc., (1935).
- [4] DANYSZ — *Le Radium*, 104, (1913).
D. C. ELLIS — *Proc. Cambr. Phil Soc.*, 21, 125, (1922).
M. MEITNER — *ZS. f. Phys.*, 11, 35, (1922).
BLACK — *Proc. Roy. Soc. A.*, 109, 166, (1925).
L. F. CURTISS — *Phys. Rev. (2)*, 27, 257, (1926).
- [5] M^{ME}. CURIE — *Radioactivité*, Hermann & C.^{ie}, Paris, (1935).
- [6] FRILLEY — *Thèse*, Paris, (1928).
- [7] RASETTI et AMALDI — *Ricerca Scientifica*, Anno X, n.^o 3, pag. 111.

LE SPECTRE L DE RAYONS X DU RADIUM D

par MANUEL VALADARES (À LISBONNE)

(Janvier, 1944)

1. Pour obtenir le spectre de rayons X du radium D nous avons activé dans une atmosphère de radon une anticathode d'un tube à rayons X démontable.

En effet, on aurait pu préparer l'anticathode soit par activation soit par dépôt électrolytique en partant d'une solution de Ra D + E + F. Cependant cette dernière méthode présente un inconvénient: la solution contient toujours du plomb provenant du verre des vieilles aiguilles de radon dont on s'est servi pour extraire le dépôt à vie longue et, par conséquent, après l'électrolyse il serait très difficile de savoir quelle était la quantité de plomb existante sur l'anticathode. Pour cette raison nous avons préféré préparer l'anticathode par activation ce qui nous assurait d'avance une surface exempte de plomb; on aura ainsi sur l'anticathode les isotopes à numero atomique 82, Ra D et Ra G, celui-ci, d'ailleurs, en faible proportion.

Nous avons procédé à l'activation de l'anticathode de la façon suivante. Dans un vase métallique «V» (fig.1) se trouve un sel de radium préparé de façon à bien dégager l'émanation au fur et mesure que celle-ci se forme; à la partie supérieure du vase s'adapte un cylindre en verre qui contient en haut l'anticathode «ac» à

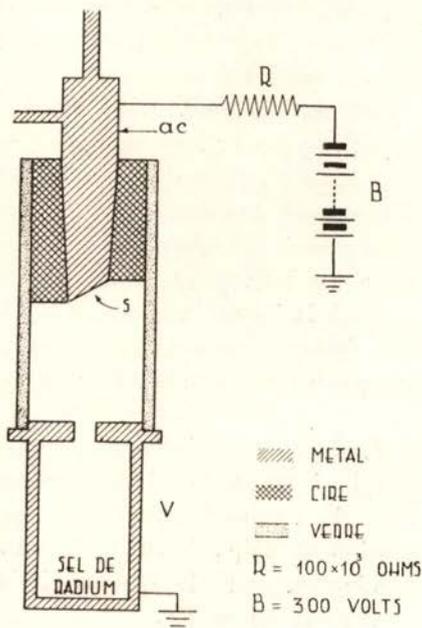


Fig. 1. Dispositif d'activation de l'anticathode

activer; on établit au moyen d'une batterie «B» une différence de potentiel entre l'anticathode et le vase métallique tout en introduisant dans le circuit une résistance de pro-

tection «R». On active ainsi la surface «s» qui, dans le tube à rayons X, va être soumise au bombardement électronique.

Dans nos expériences on disposait de 39 milligrammes de radium et on a activé une anticathode en nickel pendant quelques mois. On a mesuré, par comparaison avec une vieille aiguille de radon étalon, le radium D déposé; la mesure a été faite quelques jours après avoir enlevé l'anticathode pour être sûr que tout le radium B était désintégré. On a ainsi déterminé une quantité de 3×10^{-7} grammes de radium D déposé sur une surface de 150 mm^2 ; cependant, dans la production de rayons X n'intervient qu'un tiers de cette masse parce que la tache électronique sur l'anticathode n'a qu'une surface de 50 mm^2 .

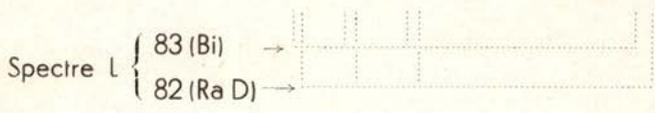
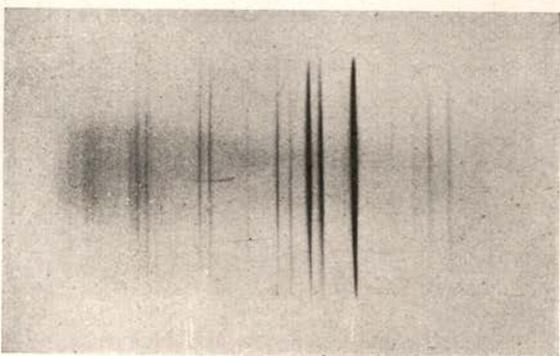
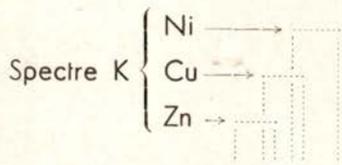
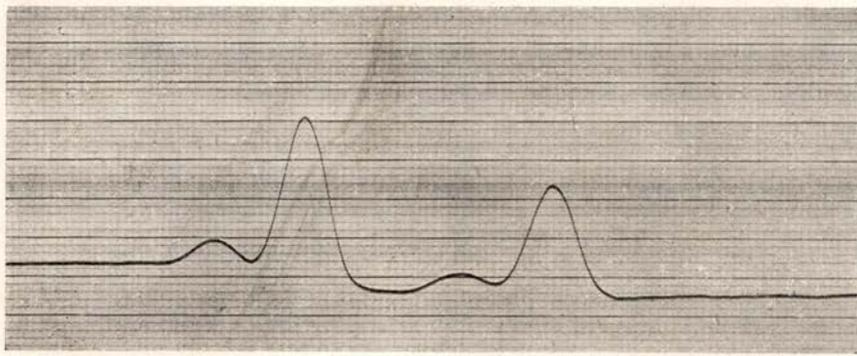
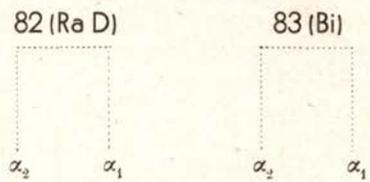
2. Pour la production des rayons X nous avons employé un tube à gas (type Shearer) à anticathode démontable. Le vide était fait à l'aide d'une pompe à diffusion à huile accouplée à une pompe préparatoire. La tension n'était pas stabilisée; on a travaillé à une tension maximum de 45 kV et une intensité de 4 mA. Un refroidissement intense de l'anticathode empêchait un échauffement trop intense de sa surface.

Pour de telles recherches, où l'on dispose d'une faible quantité de substance, le spectrographe le plus indiqué est, en raison de sa haute luminosité, celui à focalisation par transmission à travers un cristal courbé (système Cauchois). Nous avons employé deux spectrographes de ce type; le premier avec un rayon de courbure de 20 cm était équipé avec une lame de mica dont on utilisait les plans 201; l'autre était muni d'une lame de quartz courbée sous un rayon de 35 cm. Cette lame de quartz avait été coupée parallèlement à l'axe des ZZ et normalement à l'axe des YY; pour l'obtention des spectres on utilisait les plans normaux à la face d'incidence des rayons X, c'est-à-dire, les plans 1010. Les fenêtres des deux spectrographes avaient respectivement les dimensions suivantes: hauteur 1 cm, largeur 2 cm; hauteur 0,5 cm, largeur 2 cm.

3. Nos recherches ont été réalisées de préférence avec le spectrographe à rayon de 20 cm et cristal de mica. Si l'on travaille dans les conditions suivantes: distance fenêtre du tube à rayons X-cristal: 2 cm, tension 40 kVp, intensité 3 mA, on obtient, au bout d'une pose de 5 minutes, outre le spectre K du nickel, la raie $L\alpha_1$ d'un élément à numéro atomique 82.

Pour obtenir des raies plus fines et plus contrastées par rapport au fond (diminution du rayonnement parasite) on a diaphragmé le cristal et augmenté la distance anticathode-cristal. Une pose de 24 heures permet, alors, d'avoir le spectre L complet du radium D; sur les clichés

Spectre L





on voit en outre les spectres K du nickel, du cuivre et du zinc. Comme spectre de référence nous avons employé celui du bismuth. On aurait pu encore prolonger le temps de pose car la densité de noircissement du fond continu n'était pas trop intense.

Le fait qu'on observe des raies dont l'intensité est de l'ordre de grandeur du centième de l'intensité de la raie $L\alpha_1$ nous permet de conclure que même la quantité 10^{-9} du gramme de Ra D serait encore décelable par voie spectrographique de rayons X.

Sur la planche sont reproduits le microphotogramme d'un cliché obtenu avec cristal de mica et un cliché obtenu avec cristal de quartz.

4. Ces expériences prouvent qu'on peut obtenir le spectre d'émission L du radium D, lequel, que nous le sachions, est détecté pour la première fois, si l'on dispose d'une quantité de radium de l'ordre de 40 milligrammes. Alors, si l'on a un spectrographe à haute précision, on pourra réaliser l'expérience suivante: comparer le spectre du radium D avec celui du plomb ordinaire ou, même, du radium G. En effet, on a déjà comparé les spectres soit d'émission [1], soit d'absorption [2] du radium G (masse atomique 206) avec le spectre du plomb (isotopes plus abondants: 206, 207, 208) sans d'ailleurs, constater aucune différence; mais l'emploi de l'isotope 210 (radium D) permet de se placer dans de meilleures conditions expérimentales pour réussir à mettre en évidence un possible effet de noyau.

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique de la Faculté des Sciences de Lisbonne; jé remercie son Directeur, M. Le Professeur A. Cyrillo Soares, de l'intérêt bienveillant qu'il a apporté à ces recherches. J'exprime ma reconnaissance à M. Francisco Mendes qui a bien voulu se charger de la prise des microphotogrammes.

Je tiens encore à remercier l'«Instituto para a Alta Cultura» non seulement parcequ'il m'accorde depuis quelques années une subvention pour me permettre de poursuivre des recherches mais encore parcequ'il a bien voulu prêter au Laboratoire le sel de radium qui a servi aux expériences.

FACULTÉ DES SCIENCES
LISBONNE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] SIEGBAHN, M. et W. STENSTRÖM — *C. R.*, 165, (1917), p. 428.
[2] DUANE, W. and T. SHIMIZU — *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 5, (1919), p. 198.

L'AIMANTATION DU NICKEL PAR COMPRESSION UNILATÉRALE

par J. PALACIOS et L. LOZANO CALVO (À MADRID)

(Reçu le 4 Mai 1944)

§ 1. But du travail. L'explication des phénomènes ferromagnétiques et, en particulier, l'existence d'un travail d'aimantation, exigent, comme l'on sait,¹ une orientation déterminée des vecteurs élémentaires \vec{J} , représentatifs de l'aimantation, même en l'absence de champ extérieur.

L'existence d'une direction privilégiée est déterminée, entre autres par :

1. La forme du corps, dont dépend le facteur de désaimantation.

Dans un ellipsoïde, par exemple, tous les vecteurs \vec{J} manifestent une tendance à s'orienter suivant le grand axe, ce qui est tout à fait naturel, cette direction correspondant à un minimum ;

2. L'anisotropie cristalline, qui fait que les vecteurs \vec{J} manifestent une tendance à occuper des positions déterminées dans le réseau cristallin.² C'est ainsi qu'à l'intérieur d'un cristal de nickel le vecteur élémentaire \vec{J} tend à s'orienter dans la direction de l'une des quatre diagonales du cube quand il n'existe aucune autre cause d'orientation.

3. La déformation élastique produite par une action extérieure, qui se manifeste par la modification des courbes d'hystérésis d'un corps soumis à des efforts déterminés.

Dans presque tous les travaux étudiant expérimentalement cette dernière cause d'orientation de \vec{J} , on a utilisé l'accroissement de longueur d'un fil par traction. Cependant certains auteurs, comme par exemple S. Velayos³ et N. Menendez,⁴ ont étudié le cas d'une baguette de

¹ Voir, par exemple la thèse de doctorat de N. Menendez, «Rev. de la Acad. de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales» de Madrid, XXXV, 42, 1941. Un résumé de nos connaissances actuelles sur le ferromagnétisme se trouve, par exemple, dans le livre de R. Becker et W. Döring, Berlin, 1939.

² K. Beck, Diss. Zurich, 1918.

³ S. Velayos, Influence de la compression dans l'aimantation du nickel. Zeits. f. Physik, 116, 340, 1940; «Metalurgia y Electricidad», n.º 40, 20, 1940.

⁴ N. Menendez, loc. cit.

nickel soumise à une compression dans le sens de sa longueur ; leurs résultats ont, non seulement confirmé la théorie actuelle du ferromagnétisme, mais ont aussi conduit à des relations empiriques nouvelles très intéressantes, qui joueront sans doute un rôle très important dans le perfectionnement de cette théorie.

Dans le cas du nickel soumis à une traction, les vecteurs \vec{J} manifestent une tendance à se placer de biais par rapport à celle-ci ; il en résulte que cette direction est *moins favorable*, c'est-à-dire, que l'aimantation produite par un champ magnétique, est plus petite que celle qu'on obtiendrait avec le fil sans charge. Une autre conséquence est la suivante : si le fil possède une aimantation permanente dans le sens de la longueur, il suffira d'exercer une traction déterminée pour qu'il perde son aimantation.

On doit observer, naturellement, le phénomène inverse quand on comprime longitudinalement une baguette de nickel, ce que confirment d'ailleurs les expériences mentionnées de Velayos et de Menendez. Dans ce cas les vecteurs élémentaires \vec{J} tournent pour s'orienter dans la direction de la compression, et ils s'établissent finalement dans une direction moyenne imposée par l'anisotropie cristalline, par la forme extérieure, et par la compression mentionnée.

La direction de la baguette est, dans ce cas, *plus favorable* à l'aimantation ; et en effet, les courbes d'hystérésis présentent un accroissement plus rapide au fur et à mesure qu'augmente la compression.

On déduit encore des considérations précédentes que si la baguette présente une aimantation permanente dans le sens de sa longueur (ce qui se vérifie toujours, parce qu'il n'existe jamais une distribution parfaitement désordonnée des vecteurs \vec{J}) il suffit de la comprimer pour que l'aimantation augmente, sans qu'il soit nécessaire d'appliquer un champ extérieur. Cette prédiction a été entièrement confirmée par nos expériences.

La grande complication inhérente à tous les phénomènes ferromagnétiques augmente encore par le fait que, comme l'on sait, les conditions extérieures (forces mécaniques et champ magnétique) ne suffisent pas pour déterminer complètement l'aimantation ; en effet celle-ci dépend aussi de l'état initial du corps et de la manière selon laquelle ont été établies les conditions mentionnées. L'explication de ce fait se trouve dans ce qu'on appelle les sauts de Barkhausen.⁵

En ce qui concerne l'aimantation due à l'action d'un champ extérieur, il existe déjà un très grand nombre de résultats expérimentaux qui

⁵ Voir le livre mentionné de Becker et Döring, pag. 116.

peuvent être utilisés pour l'établissement et la vérification des théories du ferromagnétisme. Il n'en est pas de même en ce qui concerne l'influence des actions mécaniques sur l'aimantation et cela rend très intéressantes les expériences que Velayos et Menendez ont réalisé à l'Instituto Nacional de Física y Química de Madrid.

Nous présentons dans ce travail quelques résultats obtenus en discutant une expression proposée par Becker et Kersten lors de l'application des principes de la Thermodynamique aux phénomènes ferromagnétiques, et en la comparant avec l'expérience.

§ 2. Rapport entre la magnétostriction et l'aimantation due à des actions mécaniques. On sait que la magnétostriction consiste en une variation de dimensions d'un corps ferromagnétique quand on l'aimante par un champ. Dans le cas d'une baguette de longueur l plongée dans un champ H , la magnétostriction a la valeur

$$C = \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial H}.$$

Il est possible d'établir par des considérations thermodynamiques, une relation entre la magnétostriction et le changement d'aimantation produit par une traction longitudinale. La formule de Becker et Kersten est la suivante⁶

$$(1) \quad \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial H} = \frac{\partial J}{\partial \sigma},$$

dans laquelle σ est la tension appliquée à la baguette, c'est-à-dire, la force divisée par la section. De cette formule si simple reliant la magnétostriction à la grandeur $\partial J/\partial \sigma$ (qu'on peut appeler susceptibilité magnétique par traction) les auteurs ne déduisent que la conséquence suivante: la magnétostriction est nulle quand $H=0$ et la baguette ne possède pas d'aimantation permanente, parce que, dans ce cas on devrait avoir nécessairement $\partial J/\partial \sigma=0$ par raison de symétrie.

En essayant d'établir la formule (1) nous avons constaté qu'elle n'est qu'approximative. Il nous semble donc intéressant de publier ici la formule rigoureuse, et aussi, au moyen de quelques simplifications qui nous semblent plausibles, en tirer certaines conséquences et les comparer aux résultats expérimentaux.

Considérons une baguette de longueur l et de section s placée dans un champ magnétique dont l'excitation est H , dirigé selon l'axe de la

⁶ Cette formule a été mentionnée, sans démonstration, une première fois dans Zeits. f. Physik, 64, 660, 1930, et, plus tard dans le livre de Becker et Döring, loc. cit., page 283.

baguette. Dans toute transformation isotherme et réversible, l'accroissement de l'énergie libre dF est nécessairement égale au travail réalisé par les forces extérieures. Pour calculer ce travail nous remarquerons que lorsque la longueur de la baguette éprouve un accroissement dl , la tension effectue un travail $\sigma s dl$. En outre, le champ magnétique effectue un travail, chaque fois que croît le produit du volume par l'aimantation. En effet, on obtient l'énergie potentielle E_p contenue dans le volume v en intégrant l'expression ⁷

$$dE_p = \vec{H} \cdot d(v\vec{B})$$

dans laquelle \vec{H} est l'excitation magnétique et \vec{B} l'intensité du champ. Le point indique qu'il s'agit d'un produit scalaire. D'autre part, l'aimantation M , mesurée comme grandeur homogène à H , se définit par ⁸

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

où $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^9$ joule \times sec²/amp² \times cm² est la perméabilité du vide.

⁷ Nous employerons le nouveau système rationnel d'unités électromagnétiques, cm, g-sept (10⁷g), sec, amp, ou, ce qui est la même chose, cm, joule, sec, amp. Ce système, qui diffère de celui de Giorgi par la substitution du centimètre au mètre, a été proposé par Dellinger et Bennet en 1916, et a été adopté par Mie dans son récent livre sur l'Électricité et le Magnétisme. Pour d'autres détails, voir l'article de F. Planell dans «Mem. de la Academia de Ciencias y Artes» de Barcelona, XXV, n.º 10, 1935. En adoptant la nomenclature de Mie, nous appellerons le vecteur \vec{H} l'excitation magnétique (*Erregung*) et le vecteur \vec{B} l'intensité magnétique.

⁸ Dans le système usuel, on définit l'aimantation \vec{J} au moyen de l'expression

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{J}$$

et on mesure H en oersted et B en gauss sans qu'on ait besoin de distinguer entre les deux unités. S'il n'y a pas d'excitation on aura

$$\vec{J} = \vec{B}/4\pi \text{ gauss}$$

de sorte que, si l'on mesure B en gauss, on aura également J en gauss.

On définit la magnétisation \vec{M} , homogène à l'excitation \vec{H} , par l'expression

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

et, dans le nouveau système, on mesure H en amp/cm et B en joule \times sec/amp \times cm² de sorte que la nouvelle unité de champ, B , est égale à cent millions de gauss (10⁸). La perméabilité du vide, μ_0 , a dans ce système, la valeur $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9}$ joule \times sec/amp² \times cm.

En l'absence d'excitation H , la valeur de M en amp/cm s'obtiendra par la formule

$$\frac{10^{-8} B}{4\pi \cdot 10^{-9}} = \frac{10}{4\pi} B,$$

où l'on suppose B exprimé en gauss. En comparant cette valeur avec l'expression de J on remarquera qu'en multipliant par 10 la valeur de J en gauss on obtient celle de M en amp/cm.

Il en résulte que lorsque l'on fait varier l'aimantation ou les dimensions de la baguette en maintenant constante l'excitation H , le champ magnétique effectue un travail

$$dE_p = H\mu_0 d(vM)$$

où M est la projection de \vec{M} dans la direction de \vec{H} .

L'accroissement dF de l'énergie libre sera :

$$(2) \quad dF = \sigma s dl + \mu_0 H d(lsM).$$

En considérant seulement la partie réversible de la courbe d'aimantation, on vérifie que l'état de la baguette à température constante est déterminé par les variables indépendantes σ et H ; en exprimant dF en fonction de ces deux variables on obtient :

$$dF = \left[(\sigma s + \mu_0 H M s) \frac{\partial c}{\partial \sigma} + \mu_0 H s l \frac{\partial M}{\partial \sigma} + \mu_0 H M l \frac{\partial s}{\partial \sigma} \right] d\sigma + \\ + \left[(\sigma s + \mu_0 H M s) \frac{\partial l}{\partial H} + \mu_0 H s l \frac{\partial M}{\partial H} + \mu_0 H M l \frac{\partial s}{\partial H} \right] dH,$$

et il suffit de se rappeler que dF est une différentielle totale exacte pour qu'on obtienne :

$$(3) \quad \frac{\partial M}{\partial \sigma} + \left(\frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial \sigma} + \frac{1}{s} \frac{\partial s}{\partial \sigma} \right) M = \frac{1}{\mu_0} \left(- \frac{\partial s}{\partial H} \frac{\partial l}{\partial \sigma} + \frac{\partial s}{\partial \sigma} \frac{\partial l}{\partial H} \right) \frac{\sigma}{ls} + \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial H}$$

ou, ce qui est la même chose

$$(4) \quad \frac{\partial M}{\partial \sigma} + \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial \sigma} M = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial s}{\partial \sigma} \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial H} - \frac{1}{s} \frac{\partial s}{\partial H} \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial \sigma} \right) \sigma + \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial H}$$

qui est la formule rigoureuse que nous voulions obtenir.

Hypothèses simplificatrices. L'équation rigoureuse (4) est trop compliquée pour qu'on puisse facilement en déduire des conséquences.

Nous admettons donc que la magnétostriction de volume est nulle ce qui est très approximativement en accord avec les résultats expérimentaux.

Nous aurons dans ce cas :

$$\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial H} = 0; \quad \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial H} + \frac{1}{s} \frac{\partial s}{\partial H} = 0$$

et le facteur du second membre de (4) écrit entre parenthèses vaudra :

$$\frac{1}{s} \frac{\partial s}{\partial \sigma} \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial H} - \frac{1}{s} \frac{\partial s}{\partial H} \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial \sigma} = \left(\frac{1}{s} \frac{\partial s}{\partial \sigma} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial H} \right) \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial H} = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial H} = \frac{C}{K}$$

K étant le module de compression unilatérale :

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial \sigma}$$

et C la magnétostriction linéaire :

$$C = \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial H}$$

Par conséquent, la formule (4) prendra la forme

$$\frac{\partial M}{\partial \sigma} + \frac{M}{K} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\sigma}{K} + 1 \right) C.$$

Dans une baguette cylindrique on a $v = ls$; donc

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial \sigma} + \frac{1}{s} \frac{\partial s}{\partial \sigma} = \frac{1}{E} + \frac{2}{r} \frac{\partial r}{\partial \sigma};$$

et, étant donné que

$$\frac{\partial r}{\partial \sigma} = \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \sigma} = - \frac{r}{l} \varepsilon \frac{\partial l}{\partial \sigma} = - \frac{\varepsilon}{E} r,$$

(ε coefficient de Poisson) on obtient

$$\frac{1}{K} = \frac{1-2\varepsilon}{E}.$$

Le coefficient de Poisson ε est compris entre 1/2 et 1/4 de sorte que, dans le cas le plus défavorable, on peut écrire :

$$\frac{1}{K} = \left(1 - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{E} = \frac{1}{2E};$$

dans le nickel le module d'Young est de l'ordre de grandeur de 10^4 kg/mm² et nos compressions ne surpassent la valeur $\sigma = -10$ kg/mm²; par conséquent, le terme σ/K est très petit vis-à-vis de l'unité et on peut le négliger. On obtient alors

$$(5) \quad \frac{\partial M}{\partial \sigma} + \frac{M}{K} = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial H} = \frac{C}{\mu_0}$$

ce qui coïncide avec la formule de Becker et Kersten si l'on néglige le terme M/K .

L'intégrale générale de (5) pour $H = \text{constante}$ est

$$M\sigma H = \frac{l^{-\sigma/K}}{\mu_0} \left[\int_0^\sigma C l^{\sigma/K} d\sigma + B \right]$$

et, représentant par M_0H l'aimantation résiduelle pour $\sigma = 0$,

$$M_{\sigma H} = M_{0H} + \frac{1}{\mu_0} \int_0^\sigma C d\sigma.$$

En particulier, pour $H = 0$ on aura :

$$(6) \quad M_{\sigma 0} = M_{00} + \frac{1}{\mu_0} \int_0^\sigma C d\sigma.$$

Par des raisons de symétrie, on ne peut aimanter une baguette, initialement non aimantée par le seul fait de la compression ; la relation (5) donne nécessairement :

$$\left(\frac{\partial l}{\partial H} \right)_{H=0} = 0 \quad \text{si} \quad M_{00} = 0.$$

On voit qu'on obtient le même résultat que Becker et Kersten, mais on se rend compte maintenant qu'il n'est valable que dans le cas où la magnétostriction de volume est nulle. Étant donné que cela n'est pas rigoureusement vrai, on voit que la magnétostriction linéaire n'est pas, elle aussi, rigoureusement nulle pour $H = 0$ quand la baguette n'a pas d'aimantation initiale ; et en effet, les courbes obtenues par K. Honda et S. Shimizu⁹ ne présentent pas de tangente horizontale pour $H = 0$.

L'expérience montre que dans le nickel et pour $M_{00} = 0$, l'aimantation croît avec la compression longitudinale de la baguette, ce qui signifie, étant donné $d\sigma < 0$, que la magnétostriction linéaire est négative ; en d'autres termes la baguette se raccourcira sous l'action du champ et, en outre, s'allongera en même temps que croît l'aimantation résiduelle M_{00} . Les mesures effectuées jusqu'à ce jour ne permettent pas de confirmer cette prédiction parce qu'elles ont été toutes exécutées avec des baguettes préalablement désaimantées et avec des valeurs différentes de l'excitation H tandis qu'il s'agit ici de la magnétostriction correspondante à une excitation nulle et en fonction de l'aimantation résiduelle M_{00} .

⁹ Voir la fig. 198 du livre mentionné de Becker et Döring.

§ 3. Partie expérimentale. Il s'agit maintenant de mesurer l'aimantation longitudinale $M\sigma H$ d'une baguette de nickel en fonction de la pression longitudinale $-\sigma$, en prenant comme paramètre l'aimantation initiale de la baguette et en conservant constante l'excitation H .

D'après ce que nous verrons plus tard, nos expériences démontrent que, pour M_{00} quelque peu différente de zéro, la variation $\partial M/\partial\sigma$ est si grande qu'on peut négliger dans (5) le terme M/K , de sorte que nos valeurs expérimentales nous permettent de calculer la magnetostriction linéaire

$$(7) \quad C = \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial H} = \mu_0 \frac{\partial M}{\partial \sigma}$$

pour des charges différentes et diverses valeurs de l'aimantation résiduelle M_{00} .

Dans ce premier travail nous nous limiterons au cas de l'absence de tout champ extérieur ($H=0$): nous avons l'intention de répéter les expériences avec des champs différents.

La baguette de nickel employée dans ces expériences est la même que celle que Menendez appelle «2^a muestra» (2^{me} échantillon), dans sa thèse de doctorat; on décrit dans cette thèse les caractéristiques élastiques de la baguette et le dispositif expérimental employé dans la plupart des manipulations; pour cette raison nous nous limiterons ici à la description exclusive des caractéristiques propres de nos expériences.

En utilisant l'enroulement spécial du grand solénoïde, on a commencé par compenser la composante verticale du champ magnétique terrestre pour que toutes les mesures correspondent à une excitation H nulle. Ensuite, on a soumis la baguette à l'action d'un champ magnétique uniforme obtenu en faisant circuler un courant électrique dans l'enroulement principal du solénoïde et, après avoir stabilisé le cycle d'hystérésis par des inversions répétées du courant, on a supprimé le champ; de cette manière la baguette conservait une certaine aimantation (rémanente) M_{00} .

On sait qu'une partie de la densité magnétique M_{00} se perd spontanément, rapidement d'abord et ensuite avec une lenteur telle qu'on peut la considérer constante pendant tout le temps que dure l'expérience. Pour nous convaincre qu'il en était réellement ainsi, nous avons attendu au moins un jour dans toutes les séries de mesures, depuis l'établissement de l'aimantation rémanente à la baguette, jusqu'au commencement des expériences.

La mesure de l'aimantation rémanente M_{00} était faite en entourant la baguette d'une bobine qui occupait à peu près dix centimètres de la

portion centrale, et en plaçant l'ensemble à l'intérieur du grand solénoïde qui constitue, comme nous avons déjà fait remarquer, une enceinte où le champ magnétique est nul parce que le champ terrestre y avait été compensé. Si alors on tire rapidement la bobine jusqu'à ce qu'elle reste en dehors du champ magnétique de la baguette, le flux à travers la bobine subira un changement $\Delta\Phi = \mu_0 nsM$, n étant le nombre des spires de la bobine et s la section de la baguette.

Étalonnage du galvanomètre. Pour obtenir la valeur de l'aimantation M quand on connaît la déviation θ du spot lumineux du galvanomètre, il faut réaliser l'étalonnage de celui-ci, c'est-à-dire, déterminer la déviation que produit un changement connu du flux magnétique. Pour cela, nous avons utilisé un solénoïde étalon de Hartmann et Braun lequel donnait une excitation de

$$H = 6,003 \cdot i \text{ oersted} = 6,003 \times \frac{10}{4\pi} i \text{ amp/cm}$$

pour un courant de i ampères.

Dans la région centrale de ce solénoïde étalon il existe un autre enroulement ayant $n' = 1000$ spires et une section $s' = 9,870 \text{ cm}^2$ de sorte que lorsqu'on renverse le courant dans le primaire il se produit dans le secondaire un changement de flux

$$\Delta\Phi' = 2n' s' \mu_0 H = 0,001185 i' \text{ joule} \times \text{sec/amp.}$$

En représentant par θ' la déviation pour cette variation de flux du galvanomètre, et par θ celle qu'on obtient quand on utilise la baguette on a :

$$\frac{\theta}{\theta'} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Phi'} = \frac{\mu_0 nsM}{0,001185 i'};$$

la section de la baguette étant $0,2827 \text{ cm}^2$, on obtient finalement

$$M = \frac{3,336 \cdot 10^5}{n} \cdot \frac{i'}{\theta'} \cdot \theta \text{ amp/cm.}$$

Pour embrasser tout l'intervalle des mesures qui va de $M = 53 \text{ amp/cm}$ jusqu'à la saturation (1960 amp/cm) nous avons dû employer une série de bobines avec les nombres de tours suivants : $n = 194, 800, 3485$ et 7105 .

On a déterminé pour chaque mesure le quotient i'/θ' entre l'intensité i' du courant dans le solénoïde étalon, et la déviation θ' produite dans le galvanomètre quand on renverse le courant.

Aimantation par pression unilatérale. Il s'agit maintenant de mesurer les accroissements de l'aimantation initiale M_{00} quand on comprime la

baguette sans modifier l'excitation H. Pour faire la compression on dispose de l'appareil décrit par Menendez dans sa thèse de doctorat.

Quand on comprime la baguette, son aimantation subit un accroissement ΔM ; il y a variation de flux, ce qui origine production d'un courant induit dans la bobine; ce courant fait déplacer le galvanomètre balistique.

On répète cette opération en variant la charge de kg en kg jusqu'à 10 kg/mm², qui est la limite au-dessus de laquelle commencent les déformations permanentes.

Ajoutant la valeur initiale de M_{00} aux accroissements M, on obtient l'aimantation en fonction de la pression pour un champ constant. Les résultats ont été réunis dans le Tableau I.

TABLEAU I

Aimantation du nickel par compression unilatérale dans un champ magnétique nul.
(L'aimantation M en amp/cm)

K_0/mm^2 M_{00}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
53	53	53	53	53	53	53	53	53	53	53
397	408	416	423	425	425	423	422	420	417	407
508	527	551	574	589	606	608	615	614	616	613
759	795	856	912	963	1007	1058	1101	1137	1156	1165
1031	1091	1159	1225	1235	1426	1351	1392	1412	1444	1502
1351	1410	1494	1564	1645	1718	1768	1810	1852	1883	1925
1521	1599	1718	1806	1912	1999	2078	2129	2211	2263	2311
1756	1851	1966	2084	2212	2320	2418	2462	2509	2549	2589
1960	2098	2249	2433	2609	2774	2893	3035	3123	3212	3267

Précautions spéciales. Une précaution très importante est celle d'éviter que la baguette subisse un choc pendant l'opération ce qui donnerait lieu à la perte d'une partie de son aimantation faussant totalement les résultats. D'autre part la période du galvanomètre impose la condition que l'opération du chargement de la baguette soit faite rapidement.

Pour satisfaire à ces deux conditions antagoniques, nous avons modifié l'appareil de compression de telle sorte que le levier s'appuyait sur un excentrique et était éloigné du bout de la baguette de moins d'un millimètre; il suffisait de tourner l'excentrique de 90° pour que le levier s'appuyât sur la baguette avec une percussion insignifiante.

Si la baguette était parfaitement élastique, on pouvait faire chaque fois deux mesures, l'une en chargeant, l'autre en déchargeant la baguette.

Cependant les effets d'inertie élastique se manifestent avec une telle ampleur dans cette dernière opération que les mesures en sont faussées, le temps que prend la baguette pour reprendre sa longueur et son aimantation primitives dépassant de beaucoup la période du galvanomètre.

Le même effet d'inertie élastique se manifeste toujours lorsqu'on répète une mesure sans que la baguette ait été déchargée pendant un temps suffisant. Étant donné que ce temps dépend de la charge avec laquelle on opère, nous avons adopté le procédé suivant : Après avoir laissé la baguette déchargée pendant un jour, au moins, on faisait une première mesure, θ_1 ; on répétait la mesure immédiatement en obtenant une déviation θ_2 . Ayant déchargé la baguette, on attendait cinq minutes, et l'on faisait une autre mesure θ_3 comprise entre les deux premières. On effectuait ainsi toute une série de mesures avec la même charge en augmentant toujours de temps de repos jusqu'à obtenir une déviation qui coïncidait sensiblement avec la première. Si les mesures successives augmentent régulièrement et tendent vers θ_1 , il en résulte que l'opération a été bien réalisée, c'est-à-dire, qu'il n'y a pas eu des percussions perturbatrices. Avec la charge maxima de 10 kg/mm² il faut un temps de repos minimum de quinze minutes.

Démonstration de la réversibilité. Il est essentiel de démontrer expérimentalement la réversibilité du phénomène parce qu'elle constitue l'hypothèse fondamentale de la partie théorique de ce travail.

Il s'agit de vérifier si, après avoir déchargé la baguette et avoir attendu le temps suffisant, l'aimantation acquiert la valeur qu'elle avait avant la charge. Pour cela, on a déterminé l'aimantation dans chacune des neuf séries de mesures avant la charge et après avoir exécuté les dix opérations de charge et décharge ; nous avons trouvé dans toutes les séries, des résultats concordants. Cette manière d'agir nous a permis encore de reconnaître certaines perturbations dans la marche de l'opération (par exemple un coup inattendu) qui se traduisent dans une aimantation finale nettement différente de l'aimantation initiale ; dans ce cas il faut répéter la mesure.

Dans la première colonne du Tableau I figure la moyenne des valeurs de l'aimantation M_{00} obtenues avant et après chacune des séries de mesures. Une différence de 1 0/0 entre les deux valeurs suffisait pour qu'on rejetât la série.

Discussion des résultats expérimentaux. Le but principal de nos mesures est la recherche de la fonction C de (6) qui en général, dépend des variables σ et H. Nous avons conservé H constant (mieux, H=0) ;

par conséquent notre C est seulement fonction de σ . Sa valeur, donnée par (7),

$$C = \mu_0 \frac{\partial M_{\sigma H}}{\partial \sigma}$$

nous indique que les tangentes aux courbes $M(\sigma)$ donnent la magnétostriction C pour des valeurs différentes de H , de σ et du paramètre M_{00} .

Dans la figure 1 on voit que $M(\sigma)$ croît avec la pression— σ ; on en

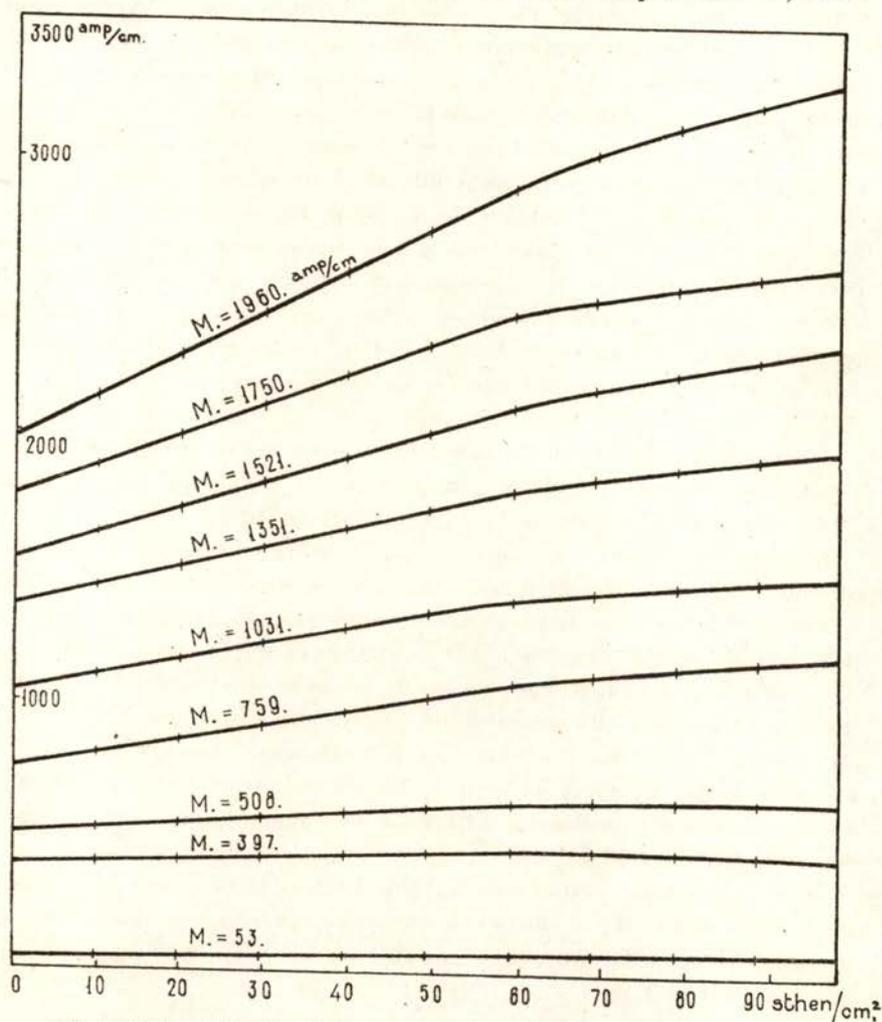


FIG. 1. L'aimantation du nickel par compression unilatérale dans un champ nul.

déduit en accord avec les prévisions, que la magnétostriction C est négative. La barre de nickel se raccourcit par l'action du champ et d'autre

part les courbes que donnent M en fonction de σ sont sensiblement rectilignes pour des valeurs de la pression qui ne sont pas trop rapprochées de la limite élastique; on en déduit que la magnétostriction du nickel pour un champ nul est indépendante de la pression; en d'autres termes le raccourcissement qu'elle subit est le même qu'elle soit déchargée ou qu'elle supporte une charge de 10 kg/mm^2 .

Nota. Pour effectuer le calcul numérique il faut remarquer que la pression a été mesurée en kg/mm_2 , tandis que dans le nouveau système, l'unité de pression est le sthen/ cm_2 . Étant donné que

$$1 \text{ kg/mm}_2 = 9,80 \text{ sthen/cm}_2$$

on aura, en représentant par R la valeur de $\Delta M/\Delta\sigma$ donnée par les graphiques :

$$\frac{C}{\mu_0} = \frac{\Delta M}{\Delta\sigma} = R \frac{\text{amp} \times \text{mm}_2}{\text{cm} \times \text{kg}} = \frac{R}{9,80} \cdot \frac{\text{amp} \times \text{cm}_2}{\text{cm} \times \text{sthen}}$$

de sorte que

$$C = \frac{4\pi \times 10^{-9}}{9,80} R \frac{\text{cm}}{\text{amp}}$$

Dans la figure 2 on a représenté les valeurs de la magnétostriction, en fonction de l'aimantation initiale M_{00} , obtenues en appliquant la rela-

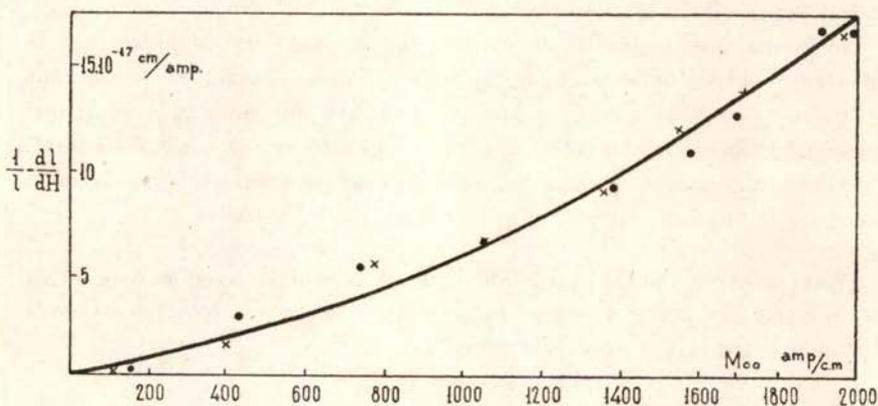


FIG. 2. La magnétostriction en fonction de l'aimantation initiale.

tion (7), c'est-à-dire, en partant de l'aimantation par compression. Les résultats peuvent se traduire avec une précision suffisante au moyen de la formule empirique suivante :

$$(8) \quad C = 32 \times 10^{-6} \cdot M_{00} + 10^{-17} \cdot 52,45 \cdot M_{00}^2 - 10^{-21} \cdot 326,4 \cdot M_{00}^3$$

Le Tableau II contient les valeurs de la magnétostriction linéaire du nickel en fonction de l'aimantation initiale M_{00} . Dans la dernière colonne figurent les valeurs de C calculées par la formule (8).

TABLEAU II

La magnétostriction du nickel déduite de l'aimantation par compression

M amp/cm	R = $\Delta M / \Delta \sigma$ amp \times mm ² cm \times kg	Magnétostriction	
		C cm/amp C = $1,29 \times 10^{-9}$ R	Fórm. (8)
53	0	0	0
397	- 4,3	-0,05 $\cdot 10^{-7}$	-0,08 $\cdot 10^{-7}$
508	- 19	-0,24	-0,24
759	- 43	-0,54	-0,31
1031	- 53	-0,68	-0,55
1351	- 70	-0,90	-0,91
1521	- 93	-1,20	-1,20
1756	-110	-1,42	-1,39
1960	-122	-1,57	-1,76

Mesure directe de la magnétostriction. La vérification parfaite de la formule (7) exige qu'on mesure directement la magnétostriction linéaire de la baguette de nickel qu'on a utilisée dans les expériences antérieures.

Pour faire cette démonstration expérimentale nous avons utilisé une méthode qui coïncide essentiellement avec celle proposée par Honda¹⁰ et qui est la suivante :

On place une baguette de nickel sur un support de laiton qui la conserve centrée dans le champ uniforme d'un solénoïde. On visse dans la baguette une pièce de laiton qui s'appuie sur un axe cylindrique horizontal de rayon r ; cet axe entraîne un miroir dans son mouvement.

Quand la baguette s'aimante, sa longueur se raccourcit de Δl et la pièce de laiton fait tourner le miroir d'un angle $\theta = \Delta l / r$.

Pour mesurer l'angle θ on focalisait une échelle avec une lunette ; de la sorte on avait, L étant la différence entre les lectures et d la distance entre le miroir et l'échelle,

$$L = 20 d .$$

En éliminant θ , on obtient

$$L = 2d \frac{\Delta l}{r} ,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{r L}{l 2d} .$$

¹⁰ H. Nagaoka, Ann. der Phys., 53, 487, 1894 ; K. Honda et S. Shimizu, Phys. Zeits, 3,387, 1902.

Dans notre appareil nous avons $r=1,12$ mm, $d=4,78$ et $l=499$ mm et par conséquent

$$\frac{\Delta l}{l} = 2,34 \cdot 10^{-7} L$$

L étant mesuré en millimètres.

Manière d'opérer et résultats. On commence par compenser le champ magnétique terrestre à l'intérieur du solénoïde et on mesure l'aimantation remanente M de la façon déjà décrite.

On fait alors une lecture sur l'échelle; on lance un courant dans le solénoïde qui produit une petite excitation magnétique ΔH et on lit de nouveau sur l'échelle la valeur de L ce qui permet de calculer la magnétostriction.

$$C = \frac{1}{l} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta H}$$

Afin que les mesures ne soient pas affectées d'une erreur relative trop grande nous avons travaillé avec des valeurs de ΔH comprises entre 4 et 10 amp/cm.

Le Tableau III contient les résultats de nos mesures. Dans la figure 2 les points représentent les mesures directes de la magnétostriction et les croix les valeurs qu'on a déduit de l'inclinaison des courbes repré-

TABLEAU III

Mesures directes de la magnétostriction C du nickel en fonction de l'aimantation remanente M_{00} correspondante à un champ nul.

M_{00} amp/cm	ΔH amp/cm	L mm	$-C \cdot 10^7$ cm/amp
150	5,1	0,1	0,05
426	5,1	0,7	31
730	5,2	1,2	53
1050	19,8	2,8	65
1245	5,1	2,1	97
1383	4,3	1,7	0,92
1573	4,1	1,9	1,06
1697	4,0	2,2	1,26
1895	5,0	3,6	1,70
2020	1,40	1,0	1,70

sentatives de l'aimantation en fonction de la pression, c'est-à-dire, en utilisant la formule (7). L'accord est tout à fait satisfaisant si l'on tient compte des erreurs inhérentes à ce genre de mesures.

REMARQUE SUR LA NOTION DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS LA THÉORIE DE DIRAC

par GUIDO BECK (à CÓRBOBA, ARGENTINA)

(Septembre, 1944)

La question de l'introduction des variables du champ électromagnétique dans la théorie de l'électron, proposée par DIRAC, fait l'objet d'un grand nombre d'études. Le point de vue phénoménologique commun de ces recherches est de considérer dès le début un système constitué de deux parties, particule et champ, reliées par une interaction puissante,

$$(1) \quad H = H_p(p_i, \beta, \vec{\alpha}) + H_i(\vec{\alpha}, A_i) + H_{ch}(\vec{E}, \vec{H})$$

Dans un mémoire antérieur, l'auteur a essayé de relier les grandeurs décrivant le champ électromagnétique à des grandeurs déjà contenues dans le schéma de la théorie de DIRAC¹. Il a pu montrer que, en effet, la théorie de DIRAC est susceptible d'une interprétation qui permet de définir le champ électromagnétique d'un vide polarisable et magnétisable.

Toutefois, en poursuivant l'idée de ce travail, on trouve que la nouvelle description du champ électromagnétique, seule, n'est pas suffisante pour pouvoir éviter les difficultés de principe qui s'opposent actuellement à l'établissement d'une théorie satisfaisante de l'électron et du champ électromagnétique. Nous nous proposons d'indiquer dans la présente note les raisons générales qui nous obligent à abandonner la séparation artificielle entre champ et particule, impliquée dans la relation (1).

Notons, tout d'abord, que, pour la description d'un électron et d'un champ, nous pouvons utiliser les variables suivantes :

$$1.^{\circ} \text{ Variables cinétiques : } \vec{v}; u_i = \frac{dx_i}{ds}; \beta, \vec{\alpha}.$$

$$2.^{\circ} \text{ Variables de champ : } \vec{E}, \vec{H}; A_i.$$

$$2.^{\circ} \text{ Variables canoniques : } p_i = mc^2 \cdot u_i - \frac{e}{c} \cdot A_i.$$

¹ Sur la Possibilité d'une Cinématique Générale, «Anais da Faculdade de Ciências do Pôrto», XXVIII, (1943).

On se rend facilement compte que n'importe quelle relation physique complète nécessite l'introduction de deux des trois types de variables indiquées. D'autre part, on voit immédiatement que ces trois types de variables ne sont pas indépendantes entre elles.

Classifions, maintenant, les schémas théoriques connus suivant le type de variables dont ils font usage :

<i>a</i> Mécanique de NEWTON et de EINSTEIN	<i>b</i> Mécanique de HAMILTON et mécanique ondulatoire	<i>c</i> Théorie de DIRAC
Variables cinétiques + de champ	Variables de champ + canoniques	Variables cinétiques + canoniques

Notre tableau montre immédiatement, que les équations de DIRAC, faisant intervenir les variables p_i, β et $\vec{\alpha}$, contiennent implicitement la notion du champ, même dans le cas du vide.

Nous concluons de ce fait que la théorie de DIRAC ne peut pas être comparée aux autres schémas théoriques indiqués ci-dessus, avant que nous ayons réussi à l'écrire à l'aide des mêmes variables que celles utilisées dans la théorie de comparaison. En particulier, il n'est pas permis d'introduire dans les équations de DIRAC des variables supplémentaires du champ, A_i , comme on le fait suivant l'expression (1).

Un essai d'éliminer, dans la théorie de DIRAC, l'usage des variables canoniques p_i et d'exprimer cette théorie à l'aide des variables classiques (variables cinétiques + variables de champ), sera donné sous peu dans la Physical Review.

MÉCANIQUE ALÉATOIRE

par G. DEDEBANT et PH. WEHRLÉ (à Paris)

1^{ÈRE} PARTIE — LE CALCUL ALÉATOIRE

(Octobre, 1944)

I — LES FONCTIONS ALÉATOIRES

1. L'idée statistique en physique. C'est à la fin du siècle dernier et au début de ce siècle que *l'idée statistique*, s'introduit avec succès dans la physique mathématique, avec la théorie cinétique des Gaz (*Maxwell, Boltzmann*), la mécanique statistique de *W. Gibbs*; la théorie du mouvement brownien (*Einstein, Smoluchowski*). Elle a continué à y faire son chemin — bien que sous forme déguisée et indirecte — avec les nouvelles mécaniques (*L. de Broglie, Heisenberg, Schrödinger, Dirac*). En mécanique ondulatoire et en mécanique quantique, l'idée statistique ne se retrouve en fait que dans l'interprétation des résultats : elle n'est pas introduite à la base et l'on dirait que c'est presque à regret que la majorité des auteurs se trouvent contraints d'en tenir compte (conflit avec le déterminisme).

En Mécanique des Fluides, bien que la complexité des mouvements fluides constatés de visu dans l'expérience quotidienne de tout observateur de la Nature (écoulement des rivières, caprices du vent, évolution incessante des nuages, diffusion des fumées dans l'atmosphère, etc.) la suggère impérieusement, l'idée statistique ne se fait place que très lentement à l'occasion du problème de la «Turbulence».

Les applications du calcul des probabilités à la physique ont donné lieu à des critiques sévères, en particulier de la part de *Duhem*, le champion de l'énergétique axiomatique. *Duhem* n'avait pas entièrement tort; la théorie cinétique manque assurément de rigueur et contient de nombreuses pétitions de principe (ainsi la démonstration du célèbre théorème H de Boltzmann doit être considérée comme inexistante).

Mais, tandis que le «*Calcul des Probabilités*» n'a guère été au début que l'étude raisonnée des jeux de hasard, la «statistique mathématique» d'aujourd'hui est un corps de doctrine autonome tenant une large place

au sein de la science mathématique. On pourrait la développer comme un important chapitre de la *Théorie des Ensembles*, sans que les mots «hasard» ou «probabilité» soient jamais prononcés. Pourtant il est utile de conserver ces expressions et de parler «en langage de probabilité» parce que le dessein profond de la statistique est bien de vouloir représenter les phénomènes du «hasard» dont nous avons par ailleurs la notion expérimentale.

2. L'Algèbre des Probabilités et l'Analyse Statistique. La statistique mathématique repose sur deux propositions que l'on appelle «*les deux théorèmes fondamentaux du calcul des probabilités*» et qui sont bien plus réellement des axiomes. L'un donne la règle d'addition; l'autre, la règle de multiplication des probabilités. Ils permettent de construire la statistique mathématique par voie entièrement déductive, au même titre que la géométrie d'Euclide est déduite de ses axiomes ou postulats de base.

Lorsqu'on veut appliquer ensuite la statistique à des phénomènes concrets, il se pose comme dans toute science appliquée, la question de savoir si les objets naturels dont on s'occupe sont représentables et dans quelle mesure, par les concepts idéaux. En statistique, cette question prend la forme précise de l'assimilation des *fréquences* aux *probabilités*, qui constitue la préoccupation centrale de la statistique appliquée. Il faut bien se garder de croire qu'il s'agisse là d'une infirmité particulière à la statistique: elle est commune à toutes les applications. L'analyse n'apporte pas au physicien le moyen de discerner quel est l'élément qu'il peut traiter comme infiniment petit ni la mécanique rationnelle à l'ingénieur la critique qui lui permette de décider si un corps de petites dimensions peut s'appeler un «point matériel».

C'est en fin de compte la réussite a posteriori du schéma employé et son pouvoir d'explication, qui justifieront le bien fondé de l'assimilation de l'objet réel à l'objet mathématique.

Les deux axiomes fondamentaux du calcul des probabilités permettent d'édifier une «Algèbre des probabilités». Il convient d'attirer tout de suite l'attention sur le fait que la règle de multiplication de cette Algèbre (*axiome des probabilités composées*) est énormément plus générale que celle de l'algèbre ordinaire. En effet, la probabilité (a, b) pour que deux événements a et b de probabilités individuelles (a) et (b) se réalisent n'est pas égale à $(a)(b)$. Les probabilités ne se multiplient pas comme les nombres algébriques. Il intervient dans la combinaison de deux probabilités une circonstance qu'il ne faudra jamais perdre de vue et qui contient en puissance toute la *théorie de la corrélation*: c'est

que (a, b) ne peut pas se déduire de (a) et de (b) . En fait, la probabilité (a, b) égale au produit de (a) par la probabilité (b/a) qui est celle de b , quand a s'est produit. Cette probabilité (b/a) est un élément entièrement nouveau, nullement inclus dans (a) et (b) .

Ce n'est que dans le cas où les événements a et b sont indépendants que l'on a :

$$(b/a) = (b)$$

et par suite :

$$(a, b) = (a)(b).$$

L'algèbre des probabilités rejoint alors l'algèbre ordinaire.

Il y a lieu de reprocher à presque toutes les applications qui ont été faites du calcul des probabilités — particulièrement en théorie cinétique — de s'être presque toujours systématiquement cantonnées dans ce cas pour des raisons évidentes de facilité. Outre que la nature physique du problème ne permettait souvent pas d'introduire l'hypothèse d'indépendance, on repoussait ainsi la notion fondamentale de corrélation, se privant du pouvoir d'explication élargi que comporte la nouvelle règle de multiplication. Ne nous y trompons pas, une des raisons de la réussite des nouvelles mécaniques est, en représentant les grandeurs physiques par des matrices ou des opérateurs, d'avoir généralisé l'algèbre en se libérant de la commutativité de la multiplication.

En possession d'une «algèbre», on en déduit une «analyse» par l'opération de *passage à la limite*. C'est précisément la voie qu'ont suivie les travaux modernes de statistique mathématique (Fréchet, Paul Lévy, Cramer, Kolmogoroff, Khintchine, Slutsky, etc.).

La notion de limite en statistique est plus complexe qu'en analyse classique.

En gros, on peut dire qu'il y a deux espèces de convergence :

L'une, qui méconnaît ou ne fait pas intervenir la corrélation, concerne la convergence de la loi de probabilité individuelle d'une variable aléatoire ¹ vers une loi limite ;

Les autres ² faisant intervenir la corrélation, sous telle ou telle forme, concernent la convergence d'une variable aléatoire vers un nombre ¹ aléatoire limite, en se préoccupant que «l'écart statistique» entre la variable et sa limite tende vers zéro.

¹ Un nombre aléatoire est, à notre sens, un nombre indéterminé, susceptible de prendre une série de valeurs (qu'on peut toujours supposer être l'ensemble des nombres réels) avec des probabilités données. Lorsque ce nombre aléatoire dépend d'un indice ou d'un paramètre, il devient une *variable* aléatoire.

² Convergence en probabilité, convergences en moyenne.

Ces deux sortes de convergence et les nuances que présentent la seconde offrent un choix d'orientations à donner à l'analyse statistique.

3. Les fonctions aléatoires. Une fonction aléatoire s'obtient en faisant correspondre à chaque valeur d'un paramètre t , un nombre aléatoire X/t .

Ce n'est pas seulement—comme une conception hâtive pourrait le faire croire—une variable aléatoire dont la loi de probabilité individuelle varie avec t . Une telle conception ne créerait pas une fonction, car elle laisserait dans l'ombre la *connexion* entre les valeurs successives prises par la variable aléatoire X/t . En quelque sorte, la fonction aléatoire équivalent à la loi de probabilité conjuguée: ¹

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2 \dots t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

pour que les variables aléatoires $X/t_1, X/t_2, \dots, X/t_n$, prennent les valeurs courantes x_1, x_2, \dots, x_n et ceci pour toute valeur de n . C'est donc une fonction d'un infini de variables, cette infini pouvant avoir d'ailleurs la puissance du continu.

Il est facile de former analytiquement des fonctions aléatoires.

Soit:

$$f(a, b, c, \dots t)$$

une fonction «*certaine*» ² d'un nombre fini de variables a, b, c , et d'un paramètre t . Remplaçons a, b, c , par des *nombre aléatoires* A, B, C . Alors f devient une *fonction aléatoire* de t . Cette fonction est de nature un peu particulière: elle crée une sorte de séparation entre le caractère fonctionnel et le caractère aléatoire.

Ainsi, le cosinus aléatoire (oscillateur):

$$X = A \cos(\Omega t + \Phi)$$

où A, Ω, Φ sont des nombres aléatoires, dérive immédiatement de la fonction circulaire classique:

$$x = a \cos(\omega t + \varphi).$$

Mais il est bien visible que ce genre de fonctions ne représente pas la fonction aléatoire la plus générale.

¹ Pour plus de généralité nous devrions parler de la fonction des *probabilités totales* (ou de répartition) $F(x_1, x_2 \dots x_n; t_1, t_2 \dots t_n)$ qui est la probabilité des inégalités $X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n$. Mais pour ne pas troubler un lecteur qui serait peu familier avec cette notion, nous emploierons la fonction de *distribution* (ou *loi de probabilité*) F chaque fois qu'il ne sera pas indispensable de faire autrement.

² L'adjectif «*certaine*» est ici opposé à «*aléatoire*». Le sens de ce terme sera éclairci un peu plus loin. Disons pour le moment que f est une fonction continue des variables qu'elle renferme.

Au lieu d'employer la loi de probabilité conjuguée F , on peut aussi définir une fonction aléatoire par son *moment linéaire* :

$$\Gamma_n = \overline{X/t_1 X/t_2 \dots X/t_n}$$

qui est, en quelque sorte, pour une fonction aléatoire, l'équivalent de la fonction caractéristique pour un nombre aléatoire, puisqu'elle permet comme elle de trouver tous les *moments statistiques* qui peuvent nous intéresser ; on fait apparaître telle puissance qu'on désire en contractant convenablement les indices, par exemple :

$$\overline{X_1^2 X_2} = \Gamma_3(t_1, t_1, t_2)$$

Dans la pratique, une fonction aléatoire sera la plupart du temps suffisamment définie par les moments suivants :

$$\begin{aligned} \text{Valeur probable : } & \overline{X} \\ \text{écart type : } & \sqrt{\overline{X'^2}} \end{aligned}$$

$$X' = X - \overline{X}, \text{ étant la partie } \textit{purement aléatoire} \text{ de } X,$$

$$\text{moment rectangle : } \overline{X'_1 X'_2}$$

qu'on remplace souvent par le coefficient de corrélation correspondant :

$$r = \frac{\overline{X'_1 X'_2}}{\sqrt{\overline{X'^2_1}} \sqrt{\overline{X'^2_2}}}$$

Ces moments seront considérés généralement comme *continus* et *dérivables*. Ce sont eux seulement ou des fonctions *macroscopiques* analogues qui doivent figurer dans les équations aux dérivés partielles de la physique mathématique.

Cette conception de la fonction aléatoire est *purement statistique* et se refuse à analyser sa structure intime, envisagée du point de vue de la théorie générale des Fonctions. Nous allons, au contraire, examiner à présent cet autre aspect de la fonction aléatoire.

4. La genèse expérimentale du concept de fonction aléatoire. C'est l'étude expérimentale de la *structure fine* des éléments météorologiques qui nous a amené à l'idée que les fonctions ordinaires de l'analyse — continues et dérivables — étaient absolument impropres à représenter les phénomènes naturels. Ce n'est pas parce qu'un instrument enregistreur de sensibilité insuffisante tracera une *courbe* représentant — disons la vitesse du vent — qu'il doit s'ensuivre que cet élément est dans sa nature intime une fonction continue et dérivable du temps. On peut au contraire en douter fortement lorsque, étudiant le même phénomène avec des instruments de plus en plus sensibles, on voit l'aspect du

diagramme changer du tout au tout avec l'échelle d'observation et, si nous nous servons d'un instrument procédant par *pointés*, nous obtenons un *nuage de points* qui ne suggère en aucune façon l'idée d'une courbe. Il y a tout lieu de penser, au contraire, qu'à échelle très fine, les grandeurs physiques sont des fonctions totalement discontinues du temps, par exemple des fonctions de Baire de classe deux.

Si l'on veut calculer la valeur moyenne d'une grandeur dont la variation est représentée sur un diagramme par un nuage de points, il ne viendra à personne de sensé l'idée de réunir les points successifs par des traits continus et de planimétrer la courbe extrêmement hâchée ainsi réalisée, avec un intégraphe. L'opération serait fort longue et peu précise et de plus on peut se demander si les valeurs de l'élément entre deux pointés successifs ont quelque chance de s'interpoler sur le trait continu par quoi nous les avons arbitrairement joints. En langage mathématique cela veut dire que nous sommes en présence d'une fonction qui n'est pas intégrable au sens de *Riemann*. Le symbole :

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(s) ds$$

n'a en pareil cas aucun sens.

Une personne raisonnable procédera autrement: elle tracera une série de bandes horizontales correspondant à des valeurs de l'ordonnée f comprises entre f_i et $f_i + df$. Dans chacune de ces bandes, elle comptera le nombre n_i de points qu'elle contient et calculera la moyenne par la formule :

$$\bar{f} = \frac{\sum n_i f_i}{\sum n_i}$$

Elle fera ainsi une intégration au sens de *Lebesgue*, procédé plus puissant que celui de *Riemann* et qui — mathématiquement parlant — s'applique à toutes les fonctions de *Baire*.

Ces suggestions de l'expérience nous conduisent tout naturellement à une nouvelle conception des fonctions aléatoires.

Soit $X/t = f(t)$, une fonction *totalement discontinue* et intégrable au sens de *Lebesgue*: c'est donc une fonction de *Baire*, de classe supérieure ou égale à 2.

Plaçons nous à un instant t_0 et soit dt_0 un intervalle à cheval sur t_0 . Dans cet intervalle dt_0 qui a la *puissance du continu*, la fonction $f(t)$ prend une infinité de valeurs numériques, pouvant d'ailleurs couvrir tout le champ des nombres réels. On dispose donc d'une série d'épreuves suffisante pour pouvoir «estimer» le nombre aléatoire X_0 .

Désignons par $d_i t$ la mesure de l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles X_0 est compris entre X_i et $X_i + dx_i$ et considérons la quotient :

$$\frac{d_i t}{dt_0}$$

C'est un rapport positif et au plus égal à l'unité.

Lorsque $dt_0 \rightarrow 0$, il en est de même de $d_i t$ et le rapport prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Si ce rapport tend vers une limite lorsque $dt_0 \rightarrow 0$ cette limite est nécessairement comprise entre 0 et 1. Nous disons qu'elle est la *probabilité* p_i de l'inégalité :

$$x_i \leq X_0 \leq x_i + dx_i$$

Ainsi avons nous défini avec rigueur la loi de probabilité en un point, de la fonction aléatoire X/t .

De la même manière, on peut définir la loi en deux points t_0 et t_1 . On considère pour cela la mesure $d_{ii} t$ de l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles les inégalités :

$$\begin{aligned} x_i &\leq X_0 \leq x_i + dx_i \\ x_j &\leq X_1 \leq x_j + dx_j \end{aligned}$$

sont simultanément satisfaites.

La probabilité conjuguée de ces deux inégalités est le limite du rapport :

$$\frac{d_{ii} t}{dt_0 dt_1}$$

lorsque dt_0 et dt_1 tendent vers zéro.

Cette limite, si elle existe, est un nombre positif inférieur ou égal à 1.

La définition s'étendant évidemment à un nombre quelconque de points, nous constituons ainsi une fonction aléatoire conformément à notre première conception.

On aperçoit le gros intérêt du nouveau point de vue. Il n'est pas besoin, pour parler de la loi de probabilité à un *instant donné* d'imaginer une série de systèmes identiques (conception de Gibbs). L'évolution d'un seul système, pourvu qu'elle soit très discontinue, suffit à créer cette notion.

Dans la conception de Gibbs, l'un des systèmes individuels serait par exemple l'oscillateur :

$$x = a \cos(\omega t + \varphi)$$

où a, ω, φ sont des nombres déterminés.

Pour créer la notion statistique, il faut que nous envisagions tout une collection d'oscillateurs pour lesquels a, ω, φ ont toutes les valeurs possibles, de façon que ces paramètres deviennent des *nombres aléatoires*, A, Ω, Φ définis par la loi de probabilité :

$$F(a, \omega, \varphi; t)$$

Dans la conception qui vient d'être exposée, l'observation ne permettrait pas de suivre un individu déterminé, de sorte que pendant un temps Δt les mesures faites seraient relatives à tous les oscillateurs de la collection et chacun aurait été rencontré avec une fréquence égale à sa probabilité. Ainsi, imaginons dans un gaz de molécules, un instrument très fin qui mesure la vitesse des molécules qui passent en un point fixe: les observations de cet instrument seront relatives à toute une série de molécules différents.

Examinons le cas particulier d'une fonction continue du temps (classe 0 de Baire).

La mesure de l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles

$$x_i \leq X \leq x_i + dx_i$$

est :

$$\text{égale à } dt_0 \text{ si } x_i = f(t_0)$$

$$\text{nulle pour toutes autres valeurs de } x_i.$$

Lorsque $dt_0 \rightarrow 0$, $dx \rightarrow 0$ (continuité); par conséquent la probabilité pour que X_0 ait la valeur $f(t_0)$ est égale à l'unité et celle que X_0 ait une valeur différente de celle-là, est nulle.

C'est pourquoi les fonctions de la classe 0 de Baire méritent le nom de *fonctions certaines*.

Rien n'est changé pour une fonction de classe 1, continue sauf sur un ensemble de mesure nulle. Seules comptent les valeurs de la fonction pour les points où elle est continue et celles-là ont une probabilité égale à l'unité. Ces fonctions sont donc aussi des *fonctions certaines*.

Dans une mesure expérimentale, avec un appareil très sensible procédant par pointés, on détermine la probabilité p_i , par une «*estimation statistique*». On choisit, à cheval sur l'instant t_0 , un intervalle de temps Δt_0 , relativement petit, mais assez grand cependant pour contenir un très grand nombre n de points.

Si n_i est le nombre, parmi ces points, de ceux qui ont fourni une valeur de X_0 , comprise entre les limites x_i et $x_i + dx_i$, on «*estimera*» le rapport $\frac{\Delta_i t}{\Delta t_0}$ par la fraction $\frac{n_i}{n}$ et l'on adoptera la valeur de cette fraction comme étant la probabilité que X_0 ait la valeur x_i . Avec les «*instruments statistiques*» du genre de ceux que nous avons fait réaliser

à l'Observatoire Aérologique de Trappes, la détermination de $\frac{n_i}{n}$ se faisait en analysant au microphotomètre le noircissement d'une plaque impressionnée par un spot lumineux commandé par l'organe sensible.

Il y a lieu de remarquer que l'interprétation de la mesure expérimentale donne lieu à deux sortes d'approximations.

La première, qui est de *nature mathématique*, consiste à remplacer une limite par une valeur approchée de cette limite, comme l'on fait par exemple en substituant au coefficient angulaire de la tangente, la pente d'une sécante réunissant deux points très rapprochés. Ce genre d'approximation est le seul qui existe en physique mathématique classique où les dérivées sont pratiquement évaluées par le rapport de deux accroissements finis.

La seconde approximation est de *nature statistique*: elle tient dans la substitution d'une fréquence à une probabilité, tout comme pour se rendre compte de la proportion de boules blanches dans une urne de contenu ignoré, on compte le nombre de boules blanches extraites dans une série suffisamment prolongée de tirages.

Prenons l'exemple d'une molécule de la théorie cinétique. Elle accomplit des trajets rectilignes successifs brisés par les chocs avec les autres molécules. Ces chocs sont extrêmement nombreux et dans un intervalle macroscopiquement petit, mettons de l'ordre du $1/1000^e$ de seconde, il s'en produit un nombre prodigieusement grand. Pendant cet intervalle de temps, la molécule prend un grand nombre de fois toutes les vitesses possibles et les fréquences avec lesquelles ces vitesses sont observées permettent d'estimer la loi de distribution des vitesses à un instant macroscopique défini à $1/1000^e$ de seconde près. Quand une molécule est en choc, sa vitesse n'est pas définie, mais cela n'a aucune importance car la durée totale des chocs forme un ensemble discret, donc de mesure nulle.

5. Nécessité des moyennes stochastiques. Ce n'est pas par un simple caprice de l'esprit que l'on doit substituer aux moyennes temporelles (intégrales de Riemann):

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} f(s) ds$$

des moyennes stochastiques (intégrales de Lebesgue-Stieljes):¹

$$\bar{X} = \int x d\mathfrak{F}(x).$$

¹ \mathfrak{F} est ici la fonction de répartition. Avec la fonction de distribution notre intégrale s'écrirait: $X = \int xF(x) dx$.

En effet, une des propriétés essentielles de la moyenne, qui est une grandeur macroscopique, est de demeurer inaltérée si l'on répète sur elle l'opération de moyenne, c'est à dire qu'elle jouit de la propriété :

$$\overline{\overline{f}} = \overline{f}$$

Or, en dérivant l'intégrale de Riemann, on obtient :

$$\frac{d\overline{f}}{dt} = \frac{f(t+T) - f(t-T)}{2T} = \frac{d\overline{f}}{dt} = \frac{\overline{f}(t+T) - \overline{f}(t-T)}{2T}$$

done en posant :

$$g(t) = f(t) - \overline{f}(t)$$

on obtient :

$$g(t+T) = g(t-T)$$

ce qui prouve que g est une fonction *périodique* de période $2T$ et, comme elle est intégrable au sens de Riemann, elle possède au plus une infinité dénombrable de discontinuités : C'est donc une série trigonométrique de période fondamentale $2T$, dont le terme constant est nul car $\overline{g} = 0$.

Ainsi, la conception des moyennes par une intégrale de Riemann réduit-elle singulièrement la classe des fonctions par lesquelles on entend représenter les phénomènes naturels. En fait, ces fonctions sont celles que nous avons appelées «*certaines*».

Mais, il y a plus : les moyennes temporelles prises dans un intervalle égal à la période sont nécessairement des *constantes*. Il n'y aura donc aucune possibilité de représenter des phénomènes *macroscopiquement évolutifs*.

Allons encore plus loin : soit X la coordonnée d'une particule fluide. La dispersion :

$$\overline{X^2}(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} (X/s - \overline{X})^2 ds$$

est une *constante*.

Si l'on considère la particule fluide située à un instant initial donné ($t=0$) en un point donné, on a :

$$\overline{X^2}(t) = \overline{X^2}(0) = 0$$

ce qui veut dire qu'il *n'existe pas de diffusion* à l'intérieur du fluide.

Ainsi a-t-on supprimé au fluide le caractère «*turbulent*» dont il s'agissait précisément de faire l'étude.

Il va de soi qu'avec les moyennes stochastiques toute difficulté de ce genre disparaît car la propriété $\overline{\overline{f}} = \overline{f}$ est pour elles une pure identité qui n'apporte aucune espèce de restriction à la nature de la fonction f .

II — LA DÉRIVÉE ALÉATOIRE

6. Les fonctions aléatoires dérivables. Les premiers travaux qui ont porté sur les fonctions aléatoires (sans en prononcer d'ailleurs le nom) — processus à éléments aléatoires indépendants, probabilités en chaîne — ont considéré les cas où la loi de probabilité F_n se décomposait en un produit de fonctions contenant chacune un nombre moindre de variables.

Ainsi, dans le schéma de la *chaîne simple* (Markoff):

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1) F_2(x_2, x_1) F_3(x_3, x_2) \dots F_n(x_n, x_{n-1}).$$

Malgré ces simplifications, l'étude des fonctions aléatoires donne lieu à des problèmes compliqués en dépit d'une forte perte de généralité.

A notre avis, il faut chercher les simplifications dans une autre voie et surtout sans *attenter à la corrélation*.

De même que l'analyse classique, en présence des possibilités indéfinies auxquelles laissait place l'idée la plus générale de fonction, s'est attaquée intuitivement d'abord à celles qui lui paraissaient jouir des propriétés les plus simples: les *fonctions dérivables*, de même la voie féconde de l'analyse statistique sera de reconnaître et de définir celles parmi les fonctions aléatoires auxquelles on peut étendre l'*opération de dérivation*, de manière à pouvoir utiliser les outils puissants et traditionnels de l'analyse mathématique.

Ainsi, Cauchy abordant l'étude des fonctions d'une variable complexe, a-t-il sagement choisi celles qui admettent une dérivée: les fonctions monogènes.

7. La différentielle aléatoire. On considère la fonction aléatoire X/t du paramètre t et l'on prête généralement aux moments simples et conjugués relatifs à cette fonction, des propriétés de continuité et de dérivabilité assez larges. On se propose d'étudier la nouvelle fonction aléatoire qu'est l'accroissement:

$$Z/t, h = X/t + h - X/t,$$

d'examiner les conditions pour qu'elle soit infiniment petite avec h (*différentielle aléatoire*) et d'étudier son ordre d'infinitude en h .

Sa valeur probable:

$$\bar{Z}/t, h = \bar{X}/t + h - \bar{X}/t = h \frac{d\bar{X}}{dt} + \dots$$

est, en tous cas, un infiniment petit de l'ordre de h , lorsque la valeur probable de X est une fonction (certaine) dérivable.

Passons à l'écart type; on ne diminue pas la généralité du problème

en supposant X de valeur probable nulle (variable *purement aléatoire*). Alors :

$$\overline{Z^2/t, h} = \sigma^2(t+h) + \sigma^2(t) - 2r(t, t+h)\sigma(t)\sigma(t+h)$$

$\sigma(t)$, désignant l'écart type de X et $r(t, t+h)$, le coefficient de corrélation entre X/t et $X/t+h$.

$\sigma(t)$ sera supposé être dérivable tant que le besoin s'en fera sentir, et si nécessaire, analytique.

$\sigma(t+h)$ admet alors un développement de Taylor :

$$\sigma(t+h) = \sigma + h\sigma' + \frac{h^2}{2}\sigma'' + \dots$$

Pour que $\overline{Z^2}$ soit infiniment petit avec h , on voit qu'il est nécessaire et suffisant que $r(t, t+h)$ soit uniformément continue pour $h=0$, ce que nous écrivons :

$$r(-0) = r(+0) = r(0) = 1$$

Soit donc α l'ordre d'infinitude de $(1-r)$; on peut représenter r par le développement suivant :

$$r(t, t+h) = 1 - \lambda(t)|h|^\alpha - |h|^\alpha \varphi(t, h)$$

$\varphi(t, h)$, étant une fonction qui tend uniformément vers zéro avec h .

8. Symétrie du coefficient de corrélation. r est une fonction *symétrique* par rapport aux variables t et $t+h$. Il en résulte entre φ et λ la relation :

$$\lambda(t+h) - \lambda(t) = \varphi(t, h) - \varphi(t+h, -h).$$

Cette relation montre que la fonction φ jouira généralement des propriétés de continuité et de dérivabilité que l'on prêtera à la fonction λ . Supposons celle-ci analytique (ce qui est conforme à notre idée que les fonctions macroscopiques doivent être considérées comme telles) et soit :

$$\lambda(t+h) = \lambda(t) + h\lambda'(t) + \frac{h^2}{2}\lambda''(t) + \dots$$

son développement de Taylor.

Soit d'autre part :

$$\begin{aligned} \varphi(t, h) &= \lambda_1(t)h + \lambda_2(t)h^2 + \lambda_3(t)h^3 + \dots \\ \varphi(t+h, -h) &= -h\lambda_1(t+h) + h^2\lambda_2(t+h) - h^3\lambda_3(t+h) + \dots \\ &= -\lambda_1 h + (\lambda_2 - \lambda_1)h^2 + \left(-\frac{\lambda_1''}{2} + \lambda_2' - \lambda_3\right)h^3 + \dots \end{aligned}$$

En portant ces développements dans la condition de symétrie, on obtient par identification les relations suivantes :

$$\lambda' = 2\lambda'_1$$

$$\frac{\lambda''}{2} = \lambda'_1$$

$$\frac{\lambda'''}{6} = 2\lambda_3 - \lambda'_2 + \frac{\lambda''_1}{2} \quad \text{ou} \quad 2\lambda_3 - \lambda'_2 = -\frac{2\lambda'''}{3} \dots$$

Les coefficients de φ gardent encore, malgré ces relations, un grand caractère d'arbitraire, car les λ d'indice pair disparaissent dans la différence des deux fonctions φ . Ainsi les deux premières relations (dont la seconde est une conséquence de la première) déterminent λ_1 , puis λ_2 peut être choisi arbitrairement et la 3^{ème} relation détermine λ_3 etc. D'ailleurs dans le cas où r ne dépend que de h (*stationnarité*), toute fonction paire de h satisfait aux conditions de symétrie.

On obtient donc, d'une manière générale, le développement suivant pour r :

$$r(t, t+h) = 1 - |h|^\alpha \lambda(t) - |h|^\alpha \left[\frac{\lambda'(t)}{2} h + \lambda_2 h^2 + \dots \right]$$

les coefficients λ et leurs dérivées étant liés entre eux par certaines relations.

Dans le cas de stationnarité, on a la forme :

$$r(t, t+h) = 1 - \lambda |h|^\alpha - |h|^\alpha [\lambda_2 h^2 + \lambda_4 h^4 + \dots]$$

les λ étant des constantes qui ne sont soumises jusqu'à nouvel ordre qu'à la condition d'assurer la convergence du développement.

Si l'on assujettit r à la condition d'être analytique, la seule forme possible de son développement est ($\alpha=2$) (car $|h|^\alpha$ n'est pas analytique) :

$$r(t, t+h) = 1 - \lambda(t) h^2 - \frac{\lambda'(t)}{2} h^3 - \lambda_2(t) h^4 + \dots$$

On pourra appeler *analytiques* les fonctions aléatoires admettant un coefficient de corrélation de cette forme.

Aux fonctions analytiques stationnaires (en abrégé ana-stat) correspond le coefficient de corrélation :

$$r(h) = 1 - \lambda h^2 - \lambda_2 h^4 + \dots$$

9. Les conditions de cohérence. Il est bien connu que les coefficients de corrélation de n nombres aléatoires pris 2 à 2 ne peuvent être choisis arbitrairement. Les conditions qu'ils doivent remplir et qu'avec Yule nous désignerons par «*conditions de cohérence*» ont une origine qui n'est nullement mystérieuse : elles expriment simplement le

fait qu'une probabilité ne saurait être négative. On peut s'en rendre compte en partant de l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff :

$$\mathfrak{P}r(X < \xi) < \frac{\overline{X^2}}{\xi^2}$$

qui entraîne $\overline{X^2} \geq 0$.

Choisissons :

$$X = \sum \lambda_i X_i \quad \overline{X_i^2} = 1.$$

La forme quadratique :

$$\overline{X^2} = \sum \sum r_{ij} \lambda_i \lambda_j$$

ne peut être négative ; donc tous les déterminants $\Delta_n = |r_{ij}|$ sont ≥ 0 .

On satisfait aux conditions de cohérence en prenant pour les r_{ij} les cosinus des angles formés par n vecteurs unitaires l_i :

$$r_{ij} = \cos(l_i, l_j).$$

Le déterminant Δ_n est le carré du volume du n -vecteur construit sur les vecteurs unitaires l_i .

On déduit de cette représentation :

1°) que $\Delta_{n-1} \geq \Delta_n$

2°) donc que $\Delta_n \leq 1$ car $\Delta_1 = 1$

3°) que si $\Delta_{n-1} = 0$, $\Delta_p = 0$ pour $p \geq n$.

La limite de Δ_n quand n augmente indéfiniment est zéro, sauf le cas singulier où, à partir d'un rang fini, les nombres aléatoires ne sont plus corrélés.

Δ n'est égal à 1 que si :

$$r_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

Il suit de l'existence de ces conditions de cohérence qu'une fonction paire $r(t_2 - t_1) = r(h)$, de module inférieur à l'unité, ne peut représenter le coefficient de corrélation d'une fonction aléatoire stationnaire X/t que si — pour tout n — n valeurs quelconques de $r(h)$ satisfont aux conditions de cohérence. S'il en est ainsi, nous dirons que la fonction est « un r ».

La première condition de cohérence est $r^2(t, t+h) \leq 1$.

La seconde est :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & r(t, t+h) & r(t, t+h+k) \\ r(t, t+h) & 1 & r(t+h, t+k) \\ r(t, t+h+k) & r(t+h, t+k) & 1 \end{vmatrix} \geq 0$$

soit en développant :

$$1 - r^2(t, t+h) - r^2(t+h, t+k) - r^2(t, t+h+k) + 2r(t, t+h)r(t+h, t+k)r(t, t+h+k) \geq 0.$$

Pour alléger les calculs, étudions d'abord le cas de stationnarité :

$$\Delta_3 = 1 - r^2(h) - r^2(k) - r^2(h+k) + 2r(h)r(k)r(h+k).$$

Si $h=k$, cette condition se simplifie; le premier membre devenant divisible par $1-r(2h)$ se réduit à :

$$1 - 2r^2(h) + r(2h) \geq 0.$$

Portons dans l'inégalité simplifiée le développement de r ; on obtient :

$$(4 - 2^\alpha)\lambda |h|^{\alpha} + [4\varphi(h) - 2^\alpha \varphi(2h)] |h|^{\alpha} - 2[\lambda + \varphi(h)]^2 |h|^{\alpha} \geq 0.$$

Rappelons que :

$$\varphi(h) = \lambda_2 h^2 + \dots$$

L'inégalité s'écrit donc :

$$(4 - 2^\alpha)\lambda |h|^{\alpha} + 4\lambda_2(1 - 2^\alpha) |h|^{\alpha+2} - 2\lambda |h|^{\alpha} + \dots \geq 0.$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, elle doit continuer à être satisfaite.

Or pour h petit, c'est le premier terme qui donne son signe.

Si donc $\alpha < 2$, la condition est automatiquement satisfaite puisque $\lambda > 0$.

Si $\alpha > 2$, il faut nécessairement que $\lambda = 0$ et c'est alors le 2^{ème} terme qui compte d'où $\lambda_2 = 0$ et ainsi de suite.

Ainsi faut-il que $\varphi(h)$ soit identiquement nulle et que le coefficient de corrélation soit par conséquent égal à l'unité. La corrélation ne saurait donc être trop serrée au voisinage de $h=0$ sans dégénérer en liaison certaine.

On se rend d'ailleurs facilement compte que le type de fonction aléatoire correspondant à $r=1$ est de la forme banale

$$Af(t),$$

A étant une « constante aléatoire » (variable aléatoire ne dépendant pas de t) et $f(t)$ une fonction certaine. Et si, de plus, la fonction est stationnaire, elle se réduit à une constante aléatoire.

Si $\alpha=2$, le 1^{er} terme s'évanouit et il faut prendre les suivants en considération, ce qui donne la condition :

$$-6\lambda_2 \geq \lambda^2.$$

En particulier λ_2 ne saurait être positif.

On voit donc que les coefficients du développement de $r(h)$ sont assujettis à d'autres conditions que celles qui assurent simplement la convergence de la série.

Certaines formes analytiques qui pourraient paraître acceptables à première vue, ne sont pas des r .

Ainsi :

$$r(h) = \begin{cases} 1-h^2 & \text{pour } h < 1 \\ 0 & \text{pour } h \geq 1 \end{cases}$$

de même $r(h) = \begin{cases} =1 & \text{pour } h \leq \tau \\ =0 & \text{pour } h > \tau \end{cases}$

La fonction $\cos \omega h$ est un r remarquable pour lequel $\Delta_3=0$; il en résulte que tout $\Delta_n=0$ (pour $n > 2$); elle satisfait donc à la limite aux conditions de cohérence.

Elle correspond au cas où tous les vecteurs e_i sont dans un même plan :

$$(e_i, e_k) = (e_i, e_j) + (e_j, e_k).$$

Il est évident qu'en faisant appel aux conditions de cohérence d'ordre supérieur (pour 4, 5... points), on obtiendra des inégalités concernant les coefficients successifs. Toutes ces conditions confèrent à $r(h)$ une forme analytique particulière.

Examinons maintenant le cas des fonctions aléatoires non stationnaires. On doit s'attendre à ce que les choses ne soient pas changées dans leur essence.

L'on a :

$$r(t+h, t+2h) = r(t, t+h) + hA(t, h)$$

avec

$$A(h) = -\lambda' |h|^\alpha - \frac{\lambda''}{2} |h|^\alpha h + \dots$$

Posons, pour simplifier l'écriture :

$$\varphi(h) = r(t, t+h)$$

en omettant d'écrire t , qui ne présente pas d'intérêt.

Δ_3 se laisse mettre sous la forme :

$$[1 - \varphi(2h)][1 + \varphi(2h) - 2\varphi^2(h) - 2\varphi Ah] - A^2 h^2 \geq 0.$$

Or,

$$\begin{aligned} 1 - \varphi(2h) &= 2^\alpha \lambda |h|^{2\alpha} + \dots \\ 1 + \varphi(2h) - 2\varphi^2(h) &= \lambda(4 - 2^\alpha) |h|^\alpha + (2 - 2^\alpha) \lambda' |h|^\alpha h - 2\lambda^2 |h|^{2\alpha} + \dots \\ -2\varphi Ah &= -2\lambda' |h|^\alpha h + \dots \\ A^2 h^2 &= \lambda'^2 |h|^{2\alpha+2}. \end{aligned}$$

Le premier terme est donc de l'ordre de $|h|^{2\alpha}$; il est prépondérant, quand $\alpha < 2$. En ce cas, comme tout à l'heure, la condition de cohérence n'entraîne aucune condition nouvelle. Mais si $\alpha > 2$, c'est le 2^{ème} terme qui donne son signe et ceci nécessite que $\lambda' = 0$. A est alors identiquement nul et il faut se reporter au 1er terme qui est le

même que pour une fonction stationnaire. La conclusion est donc que: $\lambda=0$, et la fonction aléatoire correspondante est de la forme banale: $B f(t)$. Si $\alpha=2$, le 1^{er} et le 2^{eme} terme sont de même ordre (4), mais les termes d'ordre 4 et 5 disparaissent et il faut pousser jusqu'aux termes en h^6 pour trouver la condition:

$$-6\lambda_2 \geq \lambda^2 + \frac{\lambda^2 - 4\lambda''}{8\lambda}$$

qui redonne, quand $\lambda'=0$, la condition déjà trouvée dans le cas stationnaire.

Pour terminer, faisons une remarque intéressante au sujet de la forme imposée au coefficient de corrélation par les conditions de contingence.

Se peut-il que $r(\tau)$ soit égal à 1 pour une valeur de $\tau \neq 0$? S'il en est ainsi, la seconde condition de contingence donne:

$$[r(k) - r(k+\tau)]^2 \leq 0$$

d'où $r(k) = r(k+\tau)$, donc $r(k)$ est une fonction périodique de période τ .

S'il existait une valeur τ de h pour laquelle $r(\tau) = -1$, on aurait:

$$[r(k) + r(k+\tau)]^2 \leq 0$$

d'où

$$r(k) = -r(k+\tau) \quad \text{quelque soit } k.$$

En particulier ($k=\tau$):

$$r(2\tau) = -r(\tau) = 1$$

et $r(k)$ serait encore une fonction périodique. Ainsi, le coefficient de corrélation ne saurait prendre les valeurs ± 1 (sauf la valeur 1 pour $h=0$) sans être une fonction périodique.

10. Définition de la dérivée aléatoire. Après avoir reconnu, par leur coefficient de corrélation les fonctions aléatoires qui admettent une différentielle, recherchons maintenant celles qui admettent une dérivée.

Posons-nous le problème suivant:

$$Z/t, h = X/t + h - X/t$$

étant l'accroissement d'une fonction aléatoire X/t , de valeur probable nulle, existe-t-il une fonction aléatoire \dot{X}/t , telle que, α étant un nombre positif, la moyenne quadratique:

$$\left(\frac{Z/t, h}{h^{\alpha/2}} - \dot{X}/t \right)^2$$

tende vers zéro quand $h \rightarrow 0$ (condition (I)).

La moyenne est prise, bien entendu, avec la loi de probabilité conjuguée de X/t , $X/t+h$ et \dot{X} , que nous n'avons d'ailleurs pas besoin de connaître pour conclure.

Le problème admet une solution qui est la suivante :

- 1°) α doit être égal à 2.
- 2°) Le coefficient de corrélation $r(t, t+h)$ entre X/t et $(X/t+h)$, doit être tel que :

$$\frac{1-r}{h^2} \rightarrow \text{une limite finie } \frac{1}{2} \lambda(t)$$

lorsque $h \rightarrow 0$.

3°) $\lambda(t)$ qui est la dérivée seconde de r (pour $h=0$) doit être une fonction dérivable de t (peut-être même seulement continue).

Si ces circonstances sont réalisées — et l'on notera qu'on en peut juger par des critères purement statistiques ne faisant intervenir que la loi de probabilité conjuguée en *deux points*, et encore seulement par son moment le plus simple, on dira que X/t admet une *dérivée aléatoire* en *moyenne quadratique*, qui est \dot{X}/t .

Lorsque $\alpha < 2$, on peut trouver des fonctions aléatoires telles que :

$$\frac{Z^2/t, h}{h^2}$$

tende vers une limite (condition II).

C'est en particulier le cas des processus aléatoires à éléments indépendants¹.

La condition (II) n'est pas suffisante pour qu'il existe une dérivée ; il est indispensable pour cela que la condition (I) plus restrictive soit remplie. Néanmoins, les fonctions aléatoires qui jouissent de la propriété (II) peuvent déjà engendrer des conséquences intéressantes et maniables.

Lorsque $\alpha > 2$, nous avons vu qu'en vertu des conditions de cohérence, r est nécessairement égal à l'unité.

La fonction aléatoire est alors de la forme $Af(t)$ et admet la dérivée $Af'(t)$. Lorsque $f(t)$ est une constante, elle est une *constante aléatoire* dont la dérivée est le nombre certain zéro.

En résumé, nous dirons qu'une fonction aléatoire X/t est *dérivable*

¹ Ces processus sont tels que $Z/t, h$ et X/t sont indépendants : l'accroissement de la fonction est indépendante de sa valeur initiale. Ils ont été étudiés par *Cramer* et *Paul Lévy*.

en moyenne quadratique au point t s'il existe un nombre aléatoire X/t tel que :

$$\left(\frac{X/t+h - X/t}{h} - \dot{X}/t \right)^2$$

tend vers zéro avec h .

Et nous omettrons dorénavant la qualification «en moyenne quadratique».

11. Extension des règles de calcul de l'analyse. Les règles de l'analyse s'étendent sans difficulté à la dérivation aléatoire.

a) En particulier, la règle de dérivation des *fonctions de fonctions* :

Si $\Phi(X, t)$

est une fonction certaine de la fonction aléatoire X/t et en outre, explicitement du paramètre t , dérivable au sens ordinaire par rapport à X et à t , la dérivée aléatoire Φ/t est :

$$\dot{\Phi}/t = \frac{\partial \Phi}{\partial X} \dot{X} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Passant aux moyennes, on en déduit (Φ ne contenant plus explicitement t) :

$$\frac{d}{dt} \overline{\Phi(X)} = \overline{\Phi'(X) \dot{X}}$$

ce qui autorise l'échange entre les opérateurs «dérivation» et «valeur probable».

En particulier :

$$\frac{d}{dt} \overline{X^k} = k \overline{X^{k-1} \dot{X}}$$

qui donne :

$$\text{pour } k=1 \quad \frac{d\overline{X}}{dt} = \overline{\dot{X}}$$

$$\text{pour } k=2 \quad \frac{d\overline{X^2}}{dt} = 2 \overline{X \dot{X}}$$

b) La *dérivée seconde* aléatoire \ddot{X}/t de la fonction aléatoire X/t est la limite aléatoire, quand elle existe, du rapport :

$$\frac{X/t+2h - 2X/t+h + X/t}{h}$$

Ce rapport est une fonction aléatoire de *trois points* du champ. La détermination de sa loi de probabilité exige la connaissance de la fonc-

tion de distribution conjuguée des valeurs de X en trois points ; cependant son écart type résulte seulement de la donnée du coefficient de corrélation entre les valeurs de X en deux points.

On démontre aisément que \dot{X}/t ainsi définie est la dérivée aléatoire de X/t .

Une fonction aléatoire peut avoir toute une série de dérivées successives et même être indéfiniment dérivable. Exemple : l'oscillateur aléatoire : $X=A \cos(\Omega t + \Phi)$. On peut en ce cas la développer en série de Taylor lorsque le reste de cette série tend vers zéro en moyenne quadratique.

La considération de la dérivée seconde conduit à la formule suivante :

$$\frac{d^2}{dt^2} \overline{\Phi(X)} = \overline{\Phi'(X) \dot{X}} + \overline{\Phi''(X) \dot{X}^2}$$

qui, pour $\Phi(X) = \frac{1}{2} X^2$ donne :

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \overline{X^2}}{dt^2} = \overline{X \dot{X}} + \overline{\dot{X}^2}$$

expression dans laquelle on reconnaît l'équation du viriel.

12. Développement du coefficient de corrélation. Si X/t_1 et X/t_2 sont les valeurs de la fonction aléatoire en deux points, la règle de dérivation sous le signe « trait » donne :

$$\frac{\partial^{n+p}}{\partial t_1^n \partial t_2^p} \overline{X/t_1 X/t_2} = \overline{\overset{(n)}{X}/t_1 \overset{(p)}{X}/t_2}$$

On en déduit le développement du moment rectangle :

$$\Gamma = \overline{X/t_1 X/t_2}.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \Gamma(t_1+h, t_2+k) &= \sum_{n,p} \frac{h^n k^p}{n! p!} \frac{\partial^{n+p}}{\partial t_1^n \partial t_2^p} \Gamma(t_1, t_2) \\ &= \sum \frac{h^n k^p}{n! p!} \overline{\overset{(n)}{X}/t_1 \overset{(p)}{X}/t_2} \end{aligned}$$

On peut ensuite former le développement du coefficient de corrélation car :

$$\Gamma(t_1, t_2) = S_0(t_1) S_0(t_2) r(t_1, t_2)$$

S_0 désignant l'écart type de X ; d'une manière générale, nous désignons par S_n l'écart type de la dérivée $n^{\text{ième}} : \overset{(n)}{X}$.

Le début du développement de r s'écrit ainsi :

$$r(t, t+h) = 1 - \frac{\tau^2 S_1^2 - S_0'^2}{2 S_0^2} + \dots$$

Comme r doit être ≤ 1 on a nécessairement :

$$S_0' \leq S_1$$

c'est à dire que la dérivée de l'écart type est au plus égale à l'écart type de la dérivée.

Le rapport $\frac{S_0'}{S_1}$ a d'ailleurs une signification simple : c'est le coefficient de corrélation entre X et \dot{X} . De même, le coefficient de corrélation entre \ddot{X} et X est :

$$r(X, \ddot{X}) = \frac{S_0 S_0'' + S_0'^2 - S_1^2}{S_0 S_2}$$

d'où l'on peut tirer une inégalité vérifiée par les S et leurs dérivées. En particulier si S_0 ne dépend pas de t , $r(X, \ddot{X})$ est nécessairement négatif et l'on a de plus l'inégalité :

$$S_1^2 \leq S_0 S_2.$$

Nous allons calculer le développement complet dans le cas où $\Gamma(t_1, t_2)$ est seulement fonction de la différence $(t_2 - t_1)$ (*fonction aléatoire stationnaire*). Alors $S_0^2(t) = \Gamma(t, t) = \Gamma(0)$ est une constante.

Le coefficient de corrélation s'écrit :

$$r(t_1, t_2) = \frac{\Gamma(t_2 - t_1)}{S_0^2}.$$

Posons $t_2 - t_1 = h$; Γ qui est symétrique en t_1, t_2 est une fonction paire de h

$$\Gamma(h) = \sum \frac{h^{2n}}{(2n)!} \Gamma_0^{(2n)}.$$

Or la formule générale indiquée au début de ce paragraphe donne lorsque $t_1 = t_2$; $p = n$, et en remarquant que maintenant : $\frac{\partial}{\partial t_1} = -\frac{\partial}{\partial t_2}$:

$$\Gamma_0^{(2n)} = (-1)^n S_n^2$$

et l'on obtient :

$$r(h) = \sum (-1)^n \frac{h^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{S_n}{S_0} \right)^2.$$

L'inégalité $S_1^2 \leq S_0 S_2$ s'étend évidemment à des dérivées d'ordre quelconque, de sorte que l'on a, en général :

$$S_{n+1}^2 \leq S_n S_{n+2}$$

La formule de dérivation sous le signe trait :

$$\overline{\dot{X}_1 \dot{X}_2} = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \overline{X_1 X_2}$$

montre que le coefficient de corrélation de \dot{X} est :

$$\rho(h) = -r''(h) \left(\frac{S_0}{S_1} \right)^2.$$

13. Forme générale du coefficient de corrélation. Soit $r(\omega, h)$ un r , dépendant du paramètre ω ; l'intégrale de Stieljes :

$$r(h) = \int r(\omega, h) d\mathcal{F}(\omega)$$

où $\mathcal{F}(\omega)$ est une fonction de répartition, est aussi un r . C'est en effet le coefficient de corrélation de la fonction aléatoire :

$$x = \int X/\omega, t \sqrt{d\mathcal{F}(\omega)} \quad (\overline{X^2/\omega}, t=1)$$

les X/ω n'étant pas corrélés : $\overline{X/\omega i, t_1 X/\omega j, t_2} = 0$ si $i \neq j$.

On vérifie d'ailleurs que la condition de cohérence :

$$\Delta(h) = 1 + r(2h) - 2r^2(h) \geq 0$$

est satisfaite. Elle s'écrit en effet :

$$\overline{\Delta(\omega, h)} + [\overline{r^2(\omega, h)} - \overline{r(\omega, h)}^2] \geq 0$$

et chacun des termes du 1.^{er} membre est positif ou nul.

La valeur zéro n'est atteinte que si ω ne peut prendre qu'une seule valeur ω_0 et si $r(\omega, h) = \cos \omega_0 h$.

Si donc, on veut former un r susceptible de donner à Δ toutes les valeurs possibles, il faut prendre :

$$r(h) = \int \cos \omega h d\mathcal{F}(\omega) = \overline{\cos \omega h}.$$

C'est la forme de *Khintchine*.

On voit qu'en somme, les inégalités :

$$S_n^2 \leq S_{n-1} S_{n-1}$$

qui s'écrivent :

$$\overline{\omega^{2n}} \leq \overline{\omega^{2n-2}} \overline{\omega^{2n+2}}$$

ne sont autres que celles vérifiées par les moments d'une loi de probabilité, et qui se déduisent de l'inégalité de *Schwartz* :

$$\left[\int f(\omega) g(\omega) d\mathcal{F}(\omega) \right]^2 \leq \left[\int f^2(\omega) d\mathcal{F}(\omega) \right] \left[\int g^2(\omega) d\mathcal{F}(\omega) \right].$$

On peut dire aussi que $\Phi(h)$ étant une fonction caractéristique,

$$\frac{1}{2} \left[\Phi(h) + \Phi(-h) \right]$$

est « un r ».

On obtient une fonction aléatoire ana. stat. dont le coefficient de corrélation soit une fonction périodique, en prenant pour $\mathcal{F}(\omega)$ une fonction en escalier présentant des discontinuités positives égales à :

$$a_0, a_1 \dots a_n \dots$$

pour des valeurs de ω , multiples les unes des autres :

$$\omega_0, 2\omega_0, \dots n\omega_0, \dots$$

Les a satisfont à la condition :

$$\sum_0^{\infty} a_n = 1$$

$r(h)$ est la série trigonométrique paire :

$$r(h) = \sum_0^{\infty} a_n \cos n\omega h.$$

14. Représentation d'une fonction aléatoire. Il est facile de former une fonction aléatoire dont le coefficient de corrélation ait la forme générale précédente : c'est l'oscillateur à fréquence aléatoire :

$$X = A \cos(\Omega t + \Phi)$$

où A , Ω , Φ sont des constantes aléatoires indépendantes ; A est de valeur probable nulle et Φ ($0 \leq \Phi \leq 2\pi$) a une distribution uniforme.

On a bien, pour cette fonction aléatoire :

$$r(h) = \overline{\cos \Omega h}.$$

C'est sans doute la fonction aléatoire élémentaire la plus simple qui permette de former le coefficient de corrélation le plus général ce qui n'est pas dire qu'elle représente la fonction aléatoire stationnaire la plus générale.

Au contraire, la représentation d'une fonction aléatoire par une forme analytique contenant des constantes aléatoires ne correspond pas à la conception que l'on doit se faire d'une telle fonction. En effet, sur une épreuve individuelle A , Ω , Φ , ont des valeurs déterminées qu'elles conservent au cours du temps ; la coordonnée varie donc selon une sinusoïde et le point de vue statistique n'est ici en somme que la considération d'une collection d'individus « déterministes ».

Mais on peut imaginer des schémas où la fonction aléatoire soit discontinue sur chaque épreuve. Tel est le schéma des « libres parcours » de la Théorie cinétique. On imagine des points matériels quelconques décrivant à vitesse constante des trajets rectilignes (*libres parcours*), troublés accidentellement par de brusques déviations (*les chocs*), causant une discontinuité de la vitesse. Les vitesses avant et après un choc

sont supposées *indépendantes en probabilité*. Dans ces conditions si $\Phi(\theta)$ désigne la probabilité pour que la durée d'un libre parcours soit *inférieure* ou égale à θ , qui est aussi celle pour qu'un *choc au moins* survienne pendant la durée θ , le coefficient de corrélation est :

$$r(h) = 1 - \Phi(|h|).$$

Lorsque Φ est une fonction paire, on obtient donc ainsi une fonction indéfiniment dérivable, malgré le caractère discontinu des épreuves individuelles. L'allure de $r(h)$ obtenue dans la schéma des libres parcours est un peu particulière : en raison des propriétés d'une fonction de répartition, $r(h)$ n'est jamais négatif ni jamais croissant.

On peut imaginer un schéma encore plus discontinu sur une épreuve. Supposons que la mesure de l'ensemble des discontinuités d'une fonction « en escalier », dans l'intervalle $h, h+dh$ soit :

$$dn = \varphi(h) dh.$$

La fonction est donc discontinue sur un ensemble ayant la puissance du continu : elle est d'une classe de Baire supérieure à 1.

Posons aussi que le coefficient de corrélation entre deux valeurs de X , séparées par « n » discontinuités soit α^n ($0 < \alpha < 1$). On a alors :

$$r(h) = \alpha^{\int_0^h \varphi(h) dh}.$$

Développons $\varphi(h)$

$$\varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi'(0) + \dots$$

Et l'on a :

$$r(h) = 1 + h\varphi(0) \log \alpha + \frac{h^2}{2} \log \alpha [\varphi'(0) + \varphi^2(0) \log \alpha] + \dots$$

et si $\varphi(0) = 0$:

$$r(h) = 1 + \log \alpha \varphi'(0) \frac{h^2}{2} + \dots$$

qui représente le coefficient de corrélation d'une fonction aléatoire stationnaire dérivable.

15. Connexion Infinitésimale. Considérons le début du développement de r :

$$r(h) = 1 - \frac{h^2}{2} \frac{S_1^2}{S_0^2} + \dots$$

Il montre que la connaissance de l'écart type de la dérivée en un point, permet d'explorer d'une manière infinitésimale la *connexion* de la fonction aléatoire au voisinage de ce point, tout comme pour une fonction

certaine, la connaissance du nombre dérivé en un point renseigne sur la fonction au voisinage de ce point.

On peut préciser davantage et montrer que l'accroissement $(X/t+h-X/t)$ d'une fonction aléatoire dérivable suit, pour h infiniment petit, une loi de Gauss d'écart type hS_1 . Cette propriété confère à la loi de Gauss une importance particulière pour l'étude des connexions infinitésimales.

16. Fonctions aléatoires de plusieurs variables. Soit P un point de coordonnées (x, y, z) et U/P une fonction aléatoire de ce point. Pour connaître complètement la fonction aléatoire U/P , il faut connaître les corrélations entre les fonctions U attachées à n points P_i .

Par exemple, pour deux points, il faut connaître la fonction de distribution conjuguée R , telle que :

$$\mathfrak{R} \left\{ \begin{array}{l} u_1 < U/P_1 < u_1 + du_1 \\ u_2 < U/P_2 < u_2 + du_2 \end{array} \right\} = R(u_1, u_2; x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) du_1 du_2.$$

Soient trois points :

$$P_1(x+h_1, y, z) \quad P_2(x, y+h_2, z) \quad P_3(x, y, z+h_3).$$

Les dérivées partielles de U seront les fonctions aléatoires $\dot{U}_x, \dot{U}_y, \dot{U}_z$, limites, (si elles existent) des trois rapports incrémentiels :

$$\frac{U/P_1 - U/P}{h_1}, \quad \frac{U/P_2 - U/P}{h_2}, \quad \frac{U/P_3 - U/P}{h_3}.$$

La fonction aléatoire U/P engendre ainsi trois nouvelles fonctions aléatoires de P . Il existe une fonction de distribution conjuguée de U/P et de ses trois dérivées ; c'est une fonction d'une part de x, y, z , d'autre part des valeurs courantes de $\dot{U}_x, \dot{U}_y, \dot{U}_z$.

On montre facilement que : $\overline{\dot{U}_x} = \frac{\partial}{\partial x} \overline{U}$

$$\overline{\dot{U}_x \dot{U}_{x_1}} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial x_1} \overline{U U_1}; \quad \overline{\dot{U}_x \dot{U}_{y_1}} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y_1} \overline{U U_1}, \dots$$

Si $P_1 \rightarrow P$, nous obtenons par ces formules les six moments du 2^e ordre des dérivées en P :

$$\overline{\dot{U}_x^2}, \quad \overline{\dot{U}_y^2}, \quad \overline{\dot{U}_z^2}, \quad \overline{\dot{U}_y \dot{U}_x}, \quad \overline{\dot{U}_z \dot{U}_x}, \quad \overline{\dot{U}_x \dot{U}_y}.$$

Les neuf moments primitifs (quand $P_1 \neq P$) se réduisent à six lorsque $P_1 \rightarrow P$ car :

$$\lim \frac{\partial^2}{\partial x \partial y_1} \overline{UU_1} = \lim \frac{\partial^2}{\partial x \partial y_1} \overline{UU_1}.$$

Les trois dérivées partielles \dot{U}_x , \dot{U}_y , \dot{U}_z sont les composantes d'un vecteur qu'on peut appeler *gradient aléatoire* du scalaire aléatoire U .

17. Champs de Vecteurs Aléatoires. Dans l'espace à 3 dimensions, un vecteur aléatoire est l'ensemble de 3 scalaires aléatoires U/P , V/P , W/P , fonctions du point P .

Les neuf moments conjugués en deux points :

$$\left\| \begin{array}{ccc} \overline{UU_1} & \overline{UV_1} & \overline{UW_1} \\ \overline{VU_1} & \overline{VV_1} & \overline{VW_1} \\ \overline{WU_1} & \overline{WV_1} & \overline{WW_1} \end{array} \right\|$$

forment un tenseur non symétrique, dit «tenseur de connexion», mais qui devient un tenseur symétrique dit «tenseur de corrélation» lorsque $P_1 \rightarrow P$.

Les neuf dérivés aléatoires des composantes d'un vecteur

$$(\dot{U}_x, \dot{U}_y, \dot{U}_z, \dot{V}_x, \dot{V}_y, \dot{V}_z, \dot{W}_x, \dot{W}_y, \dot{W}_z)$$

forment un tenseur à composantes aléatoires.

Elles déterminent 45 moments du second ordre :

- a) 9 moments quadratiques du type $\overline{\dot{U}_x^2}$
- b) 9 moments rectangles du type $\overline{\dot{U}_x \dot{U}_y}$
- c) 9 moments rectangles du type $\overline{\dot{U}_x \dot{V}_x}$
- d) 18 moments rectangles du type $\overline{\dot{U}_x \dot{V}_y}$

Ces 45 moments du 2^e ordre sont les limites, quand $P_1 \rightarrow P$ des dérivées partielles par rapport à tous les couples fournis par deux coordonnées d'indices différents du groupe de 6 fonctions de 6 variables :

$$\begin{array}{cc} \overline{UU_1}(x, y, z; x_1, y_1, z_1) & \overline{VW_1}(x, y, z; x_1, y_1, z_1) \\ \overline{VV_1}(x, y, z; x_1, y_1, z_1) & \overline{UV_1}(x, y, z; x_1, y_1, z_1) \\ \overline{WW_1}(x, y, z; x_1, y_1, z_1) & \overline{UW_1}(x, y, z; x_1, y_1, z_1) \end{array}$$

Cela fournit $9 \times 6 = 54$ moments, mais $\overline{UU_1}$, $\overline{VV_1}$, $\overline{WW_1}$ étant symétriques donnent deux fois les mêmes dérivées partielles (quand celles-ci

sont prises par rapport à des coordonnées de noms différents); ainsi :

$$\overline{U_x U_y} = \lim \frac{\partial^2}{\partial x \partial y_1} \overline{UU_1} = \lim \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y} \overline{UU_1}.$$

Il reste donc bien : $54 - 9 = 45$ moments distincts.

18. Corrélation Vectorielle. Désignons par Φ le vecteur aléatoire (U, V, W) et soit $A(\lambda, \mu, \nu)$ un vecteur certain de module unité. On peut synthétiser le tenseur de corrélation par la forme quadratique :

$$(\overline{\Phi A})^2 = \overline{U}^2 \lambda^2 + \overline{V}^2 \mu^2 + \overline{W}^2 \nu^2 + 2\overline{VW} \mu \nu + 2\overline{WU} \nu \lambda + 2\overline{UV} \lambda \mu$$

qui est la valeur probable du carré du produit scalaire : $(\lambda U + \mu V + \nu W)$. On voit ainsi immédiatement pourquoi les $\overline{U}^2 \dots$ forment un tenseur. C'est parce que $(\overline{\Phi A})^2$ est la moyenne (opération invariante) d'un invariant (carré d'un produit scalaire).

D'une façon générale, on obtient tous les moments conjugués des U, V, W en développant la fonction caractéristique : $e^{(\Phi A)}$.

Dans le cas des moments conjugués en deux points, il faut considérer la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} (\overline{\Phi A})(\overline{\Phi_1 A_1}) = & \overline{UU_1} \lambda \lambda_1 + \overline{VV_1} \mu \mu_1 + \overline{WW_1} \nu \nu_1 + \overline{UV_1} \lambda \mu_1 + \overline{U_1 V} \lambda_1 \mu + \\ & + \overline{VW_1} \mu \nu_1 + \overline{V_1 W} \mu_1 \nu + \overline{WU_1} \nu \lambda_1 + \overline{W_1 U} \nu_1 \lambda. \end{aligned}$$

Pour que deux systèmes de variables purement aléatoires ¹ soient non corrélés (tous les moments rectangles nuls) il faut et il suffit que :

$$(\overline{\Phi A})(\overline{\Phi_1 A_1}) = 0$$

quels que soient les vecteurs A et A_1 (de module unité).

REMARQUE : On peut former le tenseur certain le plus général par les opérations statistiques que nous venons d'employer. Soit par exemple trois vecteurs certains A, B, C . On forme le produit des 3 produits scalaires :

$$(\Phi A)(\psi B)(\chi C)$$

forme trilinéaire qui définit un tenseur aléatoire à 3 indices très particulier puisque chacun de ses termes $U_i V_j W_k$ est le produit des composantes de 3 vecteurs.

¹ C'est à dire de valeur probable nulle.

Mais la moyenne de cette forme trilinéaire représente un *tenseur certain* :

$$a_{ijk} = \overline{U_i V_j W_k}$$

qui ne présente plus aucune particularité.

On peut donc concevoir que la notion générale de tenseur se déduise de celle de vecteur par des opérations statistiques.

19. *Fonction de Connexion.* Soient deux variables aléatoires U et U_1 . La fonction caractéristique de leur loi conjuguée est :

$$\overline{e^{\lambda U + \lambda_1 U_1}} = \sum \frac{\lambda^\alpha \lambda_1^\beta}{\alpha! \beta!} \overline{U^\alpha U_1^\beta}.$$

Si les variables U et U_1 sont indépendantes, tous les moments conjugués $\overline{U^\alpha U_1^\beta}$ deviennent des produits $\overline{U^\alpha} \overline{U_1^\beta}$ et la fonction caractéristique prend la forme :

$$\overline{e^{\lambda U}} \overline{e^{\lambda_1 U_1}} = \sum \frac{\lambda^\alpha \lambda_1^\beta}{\alpha! \beta!} \overline{U^\alpha} \overline{U_1^\beta}.$$

Nous appellerons « *fonction de connexion* » la fonction :

$$\Theta(\lambda, \lambda_1) = \overline{e^{\lambda U + \lambda_1 U_1}} - \overline{e^{\lambda U}} \overline{e^{\lambda_1 U_1}}.$$

Si au lieu de deux *variables* aléatoires, on a deux *vecteurs* aléatoires Φ et Φ_1 , la fonction de connexion est :

$$\Theta(A, A_1) = \overline{e^{(\Phi, A) + (\Phi_1, A_1)}} - \overline{e^{(\Phi, A)}} \overline{e^{(\Phi_1, A_1)}}.$$

Elles disparaît si les *vecteurs* Φ et Φ_1 sont *indépendants* entre eux, quelle que soit la corrélation qui existe entre les *composantes* de Φ ou entre les *composantes* de Φ_1 . Cette fonction fait la séparation entre les propriétés statistiques *internes* d'un vecteur (qui sont relatives aux corrélations entre ses composantes) et les propriétés statistiques proprement vectorielles, qui concernent les relations entre des êtres géométriques.

20. *Tenseur de Connexion dans le cas d'isotropie.*¹ Soit $\Phi, (U_i, V_i, W)$ un vecteur aléatoire fonction du point M . Considérons le tenseur de

¹ Le cas a été envisagé par de Kármán à propos du problème de la Turbulence.

connexion relatif à deux points M et M₁ et dont les composantes sont:

$$a_{11} = \overline{UU}_1; \quad a_{12} = \overline{UV}_1, \dots$$

Nous dirons qu'il y a *homogénéité* si les *a_{ij}* restent les mêmes après une translation du vecteur MM₁. Alors les *a_{ij}* ne dépendent que de la *différence* des coordonnées de M et de M₁.

Il y a, en outre, *isotropie* lorsque le tenseur *a_{ij}* présente une symétrie de révolution autour de la droite MM₁, et ne dépend que de la distance MM₁=*r*.

Pour exprimer l'isotropie, il faut écrire que λ₁, λ₂, λ₃ et μ₁, μ₂, μ₃, désignant les composantes de deux vecteurs, la forme bilinéaire:

$$\sum \sum a_{ij} \lambda_i \mu_j$$

qui est invariante par rapport aux changements de coordonnées, admet la symétrie de révolution autour de la droite MM₁ et qu'elle reste invariante quand la distance MM₁ reste constante.

$\sum \sum a_{ij} \lambda_i \mu_j$ doit donc être combinaison linéaire d'une «sphère généralisée» et du carré d'un plan généralisé, la généralisation consistant à passer des formes quadratiques aux formes bilinéaires.

Donc :

$$\sum \sum a_{ij} \lambda_i \mu_j = A \sum \lambda_i \mu_j + B (\sum \lambda_i x_i) (\sum x_j \mu_j).$$

En effet, si on passe de là aux formes quadratiques, on écrit simplement que la quadrique $\sum \sum a_{ij} \lambda_i \lambda_j$, combinaison linéaire et homogène d'une sphère de centre M et d'un plan orthogonal à MM₁, est de révolution autour de MM₁.

Pour exprimer la condition d'invariance par rapport aux déplacements de M₁ sur toute sphère de centre M, il suffit d'ajouter que les grandeurs A et B sont fonctions de la distance *r*=MM₁, seulement.

On trouve, en identifiant:

$$a_{ij} = A \delta_{ij} + B x_i x_j$$

δ_{ij}, étant le symbole de *Kronecker*.

On pose d'habitude:

$$A = g(r), \quad B = \frac{f(r) - g(r)}{r^2}$$

ce qui permet d'écrire:

$$a_{ij} = \frac{f(r) - g(r)}{r^2} x_i x_j + g(r) \delta_{ij}.$$

On a, par exemple :

$$\overline{UU}_1 = \frac{f(r)-g(r)}{r^2} x^2 + g(r), \quad \overline{UV}_1 = \frac{f(r)-g(r)}{r^2} xy.$$

Pour interpréter les fonctions f et g , il suffit, à cause de l'isotropie, de choisir la position de M_1 la plus commode, c'est-à-dire de prendre pour coordonnées de M_1 : $x=1$, $y=0$, $z=0$ par rapport à M .

Alors, le tenseur de connexion ne contient plus que des termes diagonaux et s'écrit :

$$\begin{vmatrix} f(r) & 0 & 0 \\ 0 & g(r) & 0 \\ 0 & 0 & g(r) \end{vmatrix}$$

ce qui montre que $f(r)$ représente à un facteur près égal à la dispersion d'une quelconque des composantes du vecteur Φ , le coefficient de corrélation entre les composantes des vecteurs Φ et Φ_1 , portées par la droite MM_1 , $g(r)$ représentant de même le coefficient de corrélation de deux composantes normales à MM_1 (non parallèles).

La connexion se trouve ainsi représentée par deux fonctions seulement : f et g . Quand M_1 tend vers M , il faut que $\frac{f(r)-g(r)}{r^2}$ reste fini et alors le tenseur de connexion tend vers le tenseur de corrélation isotrope en M :

$$\begin{aligned} \overline{U}_2 &= \overline{V}^2 = \overline{W}^2 = g(0) \\ \overline{VW} &= \overline{UW} = \overline{UV} = 0. \end{aligned}$$

III — PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DE DISTRIBUTION

21. Développement des fonctions conjuguées en 2 et 3 points. Le fait qu'une fonction aléatoire X/t est dérivable une ou plusieurs fois en moyenne quadratique, entraîne certaines propriétés des fonctions de distribution conjuguées en plusieurs points (c'est à dire des propriétés de la *connexion*), qui ont elles mêmes pour conséquences des propriétés des fonctions de distribution conjuguées de X et des dérivées.

D'une façon générale, la fonction de distribution conjuguée en 2 points :

$$g(x, x_1; t, t_1)$$

est soumise aux conditions de symétrie et de continuité suivantes :

$$\begin{aligned} g(x, x_1; t, t_1) &= g(x_1, x; t_1, t) \\ \text{et} \quad g(x, x_1; t, t_1) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq x_1 \\ \infty & \text{si } x = x_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Si nous ajoutons maintenant que X/t est dérivable en moyenne quadratique, il va en résulter de nouvelles propriétés pour g . Le rapport incrémentiel :

$$U = \frac{Xt_1 - X/t}{t_1 - t}$$

ayant une limite aléatoire quand $\tau = (t_2 - t_1) \rightarrow 0$, la fonction de distribution de X et de U tend vers une limite qui est la fonction de distribution de X et de \dot{X} .

Or, la loi de probabilité de X et de U s'obtient par un simple changement de variables ; c'est :

$$|\tau| g(x, x + \tau u ; t, t + \tau)$$

que nous désignerons par :

$$g_1(x, u ; t, \tau).$$

Pour $\tau = 0$, $g_1(x, u ; t, 0)$ n'est autre que la fonction de distribution conjuguée de X et de \dot{X} :

$$R(x, u ; t)$$

u désignant la valeur courante de \dot{X} .

On peut donc généralement écrire :

$$g_1(x, u ; t, \tau) = R(x, u ; t) + \tau R_1(x, u ; t) + \dots$$

Exprimons maintenant la condition de symétrie qui, avec g_1 , s'écrit :

$$g_1(x, u ; t, \tau) = g_1(x + u\tau, u, t + \tau, -\tau).$$

Cela donne :

$$R(x, u ; t) + \tau R_1(x, u ; t) + \dots = R(x + u\tau, u ; t + \tau) + \tau R_1(x + u\tau, u ; t + \tau) + \dots$$

d'où en développant le second membre et identifiant les termes en τ :

$$R_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial t} + u \frac{\partial R}{\partial x} \right).$$

Si nous intégrons $g_1(x, u ; t, \tau)$ par rapport à u , nous obtenons la fonction de distribution $\varphi(x, t)$ de X .

Mais nous avons aussi le même résultat en intégrant $R(x, u, t)$ par rapport à u ; d'où il suit que :

$$\int R_1 du = \int \left(\frac{\partial R}{\partial t} + u \frac{\partial R}{\partial x} \right) du = 0.$$

Ainsi la fonction de distribution conjuguée R de X et de sa dérivée \dot{X} est plus particulière que si X et \dot{X} étaient des variables aléatoires sans parenté. Elle vérifie la condition précédente qu'on peut rendre plus suggestive en introduisant la *moyenne liée* \bar{U} de V pour $X=x$

$$\bar{U} = \frac{1}{\rho} \int R u d u .$$

La condition prend alors la forme d'une *équation de continuité* :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{U}) = 0$$

qui se généralise sans difficulté pour le cas de plusieurs variables :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \bar{V}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \bar{W}) = 0 .$$

Habituellement nous écrivons cette équation de continuité sous la forme abrégée :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{U}) = 0 .$$

Le signe \sum veut dire : « somme de termes semblables à ... »

Le résultat qui précède peut s'obtenir par une méthode tout à fait différente qui consiste à expliciter l'identité fondamentale :

$$\frac{d}{dt} \bar{\psi} = \bar{\dot{\psi}}$$

en choisissant pour ψ une fonction arbitraire assujettie seulement à être nulle aux limites du domaine d'intégration.

Cette seconde méthode met bien en évidence que les équations aux dérivées partielles que nous avons obtenues sont une conséquence directe de la dérivabilité.

En étudiant la fonction de distribution en trois points :

$$h(x, x_1, x_2; t, t_1, t_2)$$

qui est invariante par des permutations effectuées simultanément sur x, x_1, x_2 et t, t_1, t_2 et introduisant le fait que X est doublement dérivable, on démontre que la fonction de distribution conjuguée :

$$S(x, u, \alpha; t)$$

de X, \dot{X}, \ddot{X} vérifie la condition :

$$\int \left(\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + \alpha \frac{\partial S}{\partial u} \right) d\alpha = 0$$

que l'on peut mettre sous la forme plus significative :

$$\frac{\partial R}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} (R\bar{A}) = 0$$

\bar{A} , étant la moyenne doublement liée de \ddot{X} pour $X=x$ et $U=u$.

Si l'on pousse plus loin l'approximation, on trouve des équations du second ordre vérifiées par les fonctions de distributions ; nous retiendrons celle-ci susceptible d'applications :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho \bar{U}^2) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{A}) = 0$$

\bar{A} est la moyenne simplement liée de \ddot{X} pour $X=x$.

22. Équation générale de transfert. Soit :

$$S(x, u, \alpha, \beta, \gamma; t)$$

la fonction de distribution conjuguée de X et d'un nombre quelconque de ses dérivées, par exemple

$$\dot{X}, \ddot{X}, \ddot{\ddot{X}}, \overset{(iv)}{X}.$$

D'après ce que l'on vient de voir, S vérifie la condition :

$$\int \left(\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + \alpha \frac{\partial S}{\partial u} + \beta \frac{\partial S}{\partial \alpha} + \gamma \frac{\partial S}{\partial \beta} \right) d\gamma = 0.$$

Si l'on multiplie par une fonction certaine quelconque :

$$\psi(x, u, \alpha, \beta, t)$$

et qu'on intègre par rapport à α et β , on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{\psi}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{\psi} U) = \rho \bar{\psi}$$

et dans le cas de plusieurs variables :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{\psi}) + \sum \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{\psi} U) = \rho \bar{\psi}$$

C'est l'équation générale de transfert d'une grandeur ψ qui peut être fonction de X et d'un nombre quelconque de ses dérivées.

Elle trouvera de nombreuses applications en Mécanique des Fluides Turbulents.

IV — INTÉGRATION ALÉATOIRE

23 — Définition et propriétés fondamentales. Il est bien connu en Analyse que la notion de dérivée est une notion locale. En Analyse aléatoire, on rencontre d'habitude des fonctions qui, dans chaque réalisation élémentaire (épreuve), ne sont dérivables pour aucune valeur de la variable et peuvent même ne jamais être continues. Le seul moyen de définir une dérivée est de rassembler sous forme statistique les diverses réalisations et l'on arrive ainsi à la dérivée en moyenne quadratique.

On sait qu'au contraire l'intégration est une opération globale et qu'elle s'applique même à des fonctions discontinues. La définition de l'intégrale aléatoire est donc plus directe que celle de la dérivée aléatoire. Soit U/t une fonction aléatoire. Désignons par $\mathfrak{M}(t)$ une réalisation quelconque de U/t pour l'ensemble des valeurs de t , à la suite d'une épreuve statistique, et calculons l'intégrale :¹

$$J = \int_a^b \mathfrak{M}(t) dt$$

qui jouit, de par sa définition, des deux propriétés essentielles des intégrales non aléatoires :

$$\int_a^b (U/t + V/t) dt = \int_a^b U/t dt + \int_a^b V/t dt; \quad \int_a^b = \int_a^c + \int_c^b.$$

On définit sans peine les intégrales aléatoires multiples qui se calculent comme les intégrales multiples ordinaires.

Mais les intégrales aléatoires ont des propriétés particulières, dont la seconde est formellement équivalente à la propriété fondamentale des intégrales ordinaires, mais en diffère en réalité profondément.

Premier théorème (Echange du signe d'intégration et du signe trait).

¹ Cette intégrale existe si la fonction $\mathfrak{M}(t)$ est sommable au sens de Lebesgue. Il en est ainsi de toutes les fonctions de Baire.

Si la fonction $\overline{|U/t|}$ est sommable, on peut écrire :

$$\int_a^b \overline{U/t} dt = \int_a^b \overline{U/t} dt.$$

Ce théorème, qui est évident si la fonction U/t est intégrable au sens de Riemann (ce qui n'est pas le cas plus fréquent) a été démontré par Slutsky, et nous l'admettrons.

Second théorème.

Si U/t est continue en moyenne quadratique, la fonction aléatoire

$$I/t = \int_a^t U/s ds$$

est dérivable en moyenne quadratique et a pour dérivée U/t .

Il faut former la moyenne $\overline{Z^2}$ du carré de :

$$Z = \frac{I/t+h - I/t}{h} - U/t$$

et montrer qu'elle tend vers zéro avec h .

Comme en Analyse ordinaire, on trouve que :

$$Z = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} [U/s - U/t] ds.$$

A partir de ce moment, l'analyse aléatoire se sépare de l'analyse ordinaire. Les propriétés des intégrales aléatoires permettent d'écrire :

$$Z^2 = \frac{1}{h^2} \iint (U/\alpha - U/t)(U/\beta - U/t) d\alpha d\beta$$

l'intégrale double étant étendue au carré :

$$(t, t), (t+h, t), (t+h, t+h), (t, t+h)$$

et

$$\overline{Z^2} = \frac{1}{h^2} \iint \overline{(U/\alpha - U/t)(U/\beta - U/t)} d\alpha d\beta.$$

D'après l'inégalité de Schwartz :

$$\overline{(U/\alpha - U/t)(U/\beta - U/t)} \leq \sqrt{\overline{(U/\alpha - U/t)^2}} \sqrt{\overline{(U/\beta - U/t)^2}}$$

Or, si U/t est une fonction aléatoire continue, on peut trouver une valeur h_0 de h telle que si $h < h_0$:

$$\sqrt{(\overline{U/t+h-U/t})^2} < \varepsilon$$

ε , étant un nombre positif arbitrairement petit.

Il en résulte que

$$\sqrt{(\overline{U/\alpha-U/t})^2} < \varepsilon$$

$$\sqrt{(\overline{U/\beta-U/t})^2} < \varepsilon$$

et que

$$\overline{Z^2} \leq \frac{1}{h^2} \varepsilon^2 \iint dx d\beta < \varepsilon^2$$

ce qui montre bien que $\overline{Z^2}$ tend vers zéro avec h .

24. Moyennes aléatoires. *La constante aléatoire :*

$$X = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} U/s ds$$

peut être appelée moyenne aléatoire de la fonction aléatoire dans l'intervalle $(t, t+\tau)$.

L'écart type de X est (on suppose $\overline{U/s} = 0$):

$$\overline{X^2} = \frac{1}{\tau^2} \overline{\left(\int_t^{t+\tau} U/s ds \right)^2} = \frac{1}{\tau^2} \iint \overline{U/\alpha U/\beta} dx d\beta.$$

Désignons par $S(\alpha)$, l'écart type de U/α et par $r(\alpha, \beta)$ le coefficient de corrélation entre U/α et U/β , qui mesure la connexion du champ de la fonction aléatoire U/s .

Alors :

$$\overline{X^2} = \frac{1}{\tau^2} \iint S(\alpha) S(\beta) r(\alpha, \beta) dx d\beta$$

l'intégrale double étant étendue au carré de côté τ construit à partir du sommet (t, t) .

On découvre le fait fondamental suivant :

L'écart type de l'intégrale dépend essentiellement de la connexion du champ de la fonction à intégrer.

Nous verrons, dans les applications, que ce fait mathématique a une importance énorme pour la compréhension de la « turbulence » des fluides.

Imaginons un type de connexion pour lequel $r(\alpha, \beta)$ soit nul, sauf ce qui est nécessaire, si $|\alpha - \beta| < \varepsilon$, ε étant un nombre donné très petit. L'aire d'intégration devient alors simplement une bande étroite

axée sur la diagonale du carré. Soit S une borne supérieure de $S(x)$. L'intégrale est inférieure à :

$$\frac{S^2}{\tau^2} \iint dx d\beta = \frac{S^2}{\tau^2} (2\tau\varepsilon - \varepsilon^2)$$

soit encore à :

$$2S^2 \frac{\varepsilon}{\tau}$$

La dispersion de l'intégrale aléatoire est donc *très faible* et l'on peut dire que : *c'est la connexion du champ de la fonction aléatoire qui entraîne l'existence de son intégrale aléatoire.*

Une autre remarque est à faire : comme $|r(\alpha, \beta)| \leq 1$,

$$\overline{X^2} \leq \frac{1}{\tau^2} \iint S(x)S(\beta) dx d\beta = \left[\frac{1}{\tau} \int S(x) d(x) \right]^2 = (\mathfrak{N}_{0y} S)^2$$

d'où :

$$\sqrt{\overline{X^2}} \leq \mathfrak{N}_{0y} S.$$

Ainsi l'écart type de la moyenne aléatoire est au plus égal à la moyenne de l'écart type de la fonction.

Supposons maintenant que U soit une fonction aléatoire *stationnaire* ; nous entendons par là que $r(\alpha, \beta)$ soit simplement fonction de $(\beta - \alpha)$ et que $S(x)$ soit une constante S .

$\overline{X^2}$ se met alors facilement sous la forme d'une intégrale simple :

$$\overline{X^2} = \frac{2S^2}{\tau^2} \int_0^\tau (\tau - s) r(s) ds$$

est l'on voit bien que, $|r(s)|$ étant ≤ 1

$$\overline{X^2} \leq S^2.$$

L'opération de moyenne diminue la dispersion.

Dans le cas où

$$\begin{aligned} r(s) &\neq 0 && \text{pour } (s) \leq \varepsilon \\ &= 0 && \text{pour } (s) > \varepsilon \end{aligned}$$

on a

$$\overline{X^2} \leq \frac{S^2}{\tau^2} (2\tau\varepsilon - \varepsilon^2) < 2S^2 \frac{\varepsilon}{\tau}.$$

25. Intégrale à éléments aléatoires indépendants. La dispersion de l'intégrale :

$$I = \int_a^b U/t dt$$

est égale à :

$$\bar{I}^2 = \int_a^b \int_a^b S(\alpha) S(\beta) r(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$$

$r(\alpha, \beta)$ étant le coefficient de corrélation entre U/α et U/β .

Si la connexion de la fonction aléatoire U/t dégénère, de façon que U/α et U/β soient indépendants lorsque $\beta \neq \alpha$, alors :

$$r(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta \neq \alpha \\ 1 & \text{si } \beta = \alpha \end{cases}$$

On voit que $\bar{I}^2 = 0$. Le nombre aléatoire I se réduit à sa valeur moyenne :

$$\bar{I} = \int_a^b \bar{U}/t dt$$

et l'intégrale de U/t cesse d'être aléatoire.

Le problème de l'intégration aléatoire n'appartient plus au calcul des probabilités.

Il est cependant possible d'attacher une intégrale aléatoire d'un type nouveau, qui jouit encore de la plupart des propriétés des intégrales classiques, sauf qu'elle n'est plus dérivable par rapport à sa limite supérieure. C'est l'intégrale à *éléments aléatoires indépendants* de P. Levy, dont nous nous contenterons de donner rapidement la définition.

Considérons une fonction aléatoire I/t , de valeur probable nulle, telle que l'accroissement $\Delta I = I/t+h - I/t$, relatif à un accroissement positif h du temps (non nécessairement infinitésimal), soit indépendant de I/t' pour tout instant t' antérieur à t . Soit $\sigma(t)$ la dispersion de I/t et supposons que pour $t=0$, $I(t)$ se réduise à la valeur zero :

Par hypothèse :

$$\overline{I/t(I/t+h - I/t)} = 0$$

ou

$$\overline{I/t I/t+h} = \overline{I^2/t} = \sigma^2(t).$$

Par suite :

$$(\overline{\Delta I})^2 = \overline{(I/t+h - I/t)^2} = \overline{I^2/t+h} + \overline{I^2/t} - 2\overline{I/t I/t+h} = \sigma^2(t+h) - \sigma^2(t).$$

Si, en particulier h est très petit, la fonction σ étant continue, on voit que la dispersion de ΔI a pour partie principale $\sqrt{2\sigma\sigma'}\sqrt{h}$. Elle est d'ordre \sqrt{h} et non plus d'ordre h .

Divisons alors l'intervalle $(0, t)$ par des points t_1, \dots, t_{n-1} en intervalles partiels d'abord finis, et ensuite infiniment petits, et posons :

$$\Delta_k = I(t_k) - I(t_{k-1}).$$

On a :

$$I/t = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n.$$

Les Δ_k sont deux à deux indépendants, et quand $(t_{k-1} - t_k) \rightarrow 0$, la dispersion de $\frac{\Delta_k}{\sqrt{t_{k+1} - t_k}}$, et non plus de $\frac{\Delta_k}{(t_{k+1} - t_k)}$, reste finie.

On peut donc considérer I/t comme une intégrale d'accroissement aléatoire de la forme $U/t\sqrt{h}$, la fonction aléatoire U/t étant à connexion dégénérée : I/t est une intégrale d'éléments aléatoires indépendants, dont les propriétés diffèrent beaucoup de celles de l'intégrale ordinaire.

On peut la représenter par le symbole :

$$X = \int U/s\sqrt{ds}.$$

Alors :

$$\overline{X^2} = \iint \overline{U/\alpha U/\beta} \sqrt{d\alpha d\beta}$$

et comme le moment rectangle n'a une valeur non nulle que sur la diagonale $\alpha = \beta$:

$$\overline{X^2} = \int \overline{U^2}(\alpha) d\alpha.$$

Dans cette conception, la dispersion de l'intégrale est égale à l'intégrale de la dispersion, formule qui généralise la propriété de la somme d'un nombre fini de variables aléatoires indépendantes d'avoir une dispersion égale à la somme des dispersions des composantes.

26. Propriétés des moyennes arithmétiques. On comprend mieux l'importance de la connexion dans la notion d'intégrale aléatoire quand on observe ce qui se passe sur la moyenne arithmétique d'un très grand nombre de variables aléatoires.

Soit X la moyenne arithmétique de n variables aléatoires $X_1, X_2 \dots X_n$, de valeur probable nulle :

$$X = \frac{\sum X_i}{n}.$$

Appelons r_{ij} le coefficient de corrélation entre X_i et X_j et S_i l'écart type de X_i . L'écart type S de X est donné par :

$$S^2 = \frac{1}{n^2} \sum \sum r_{ij} S_i S_j.$$

Supposons pour bien voir le fond de la question, les S_i tous égaux à 1 et les r_{ij} tous égaux à un même nombre r .

On trouve immédiatement :

$$S^2 = r + \frac{1-r}{n}.$$

Lorsque $r=0$ (c'est le cas en particulier si les variables sont indépendantes), S^2 est le nombre très petit $\frac{1}{n}$.

Au contraire, si les variables sont corrélées, l'écart type cesse tout de suite d'être négligeable.

En gros :

$$S^2 = r.$$

Donc la fluctuation moyenne d'un grand nombre de variables est la conséquence de la corrélation entre ces variables. Elle est d'ailleurs inférieure à leur fluctuation commune.

De plus, S^2 étant positif, on a lorsque n est fini :

$$r > \frac{-1}{n-1}.$$

Si $n \rightarrow \infty$, r ne peut rester négatif.

Si un très grand nombre de variables aléatoires présentent deux à deux la même corrélation, celle-ci ne saurait être négative.

27. Equations différentielles aléatoires. On peut dire que la théorie classique des équations différentielles repose sur le théorème fondamental suivant : si, en tous points d'un intervalle (a, b) , la fonction $X(t)$ admet une dérivée et si cette dérivée est nulle, alors $X(t)$ est une constante.

On sait que ce théorème se démontre à l'aide de la formule des accroissements finis. En analyse aléatoire, il n'y a pas de formule des accroissements finis. Mais cependant le théorème précédent subsiste.

En effet :

1.°) \overline{X} ne dépend pas de t car $\frac{d\overline{X}}{dt} = \overline{\dot{X}} = 0$.

2.°) $\overline{X_1 X_2}$ ne dépend ni de t_1 ni de t_2 , car : $\frac{\partial}{\partial t_1} \overline{X_1 X_2} = \overline{\dot{X}_1 X_2} = 0$

et de même $\frac{\partial}{\partial t_2} = 0$.

3.°) $\overline{X'_1 X'_2}$ ($X' = X - \overline{X}$) est donc une constante C , donc aussi $\overline{X'^2}$ et le coefficient de corrélation est égal à un.

Par conséquent X est bien une constante aléatoire.

Cette propriété se rattache à celle du coefficient de corrélation selon laquelle si :

$$\frac{1-r(h)}{h^{2+\varepsilon}} \rightarrow \lambda \neq 0 \quad (\varepsilon > 0)$$

il est identiquement égal à l'unité (conditions de cohérence).

Il ne peut donc pas se produire qu'une fonction aléatoire admette une dérivée nulle sans être une constante aléatoire.

28. Oscillateur à fréquence aléatoire. Nous allons étudier sur un exemple : l'oscillateur aléatoire à fréquence aléatoire, comment se présente l'intégration d'une équation différentielle aléatoire.

L'oscillateur aléatoire est la fonction :

$$X/t = A \sin(\Omega t - \Phi)$$

où A , Ω et Φ sont trois constantes aléatoires : l'amplitude, la pulsation et la phase ($\Omega > 0$).

X est solution de l'équation différentielle aléatoire :

$$\ddot{X} + \Omega^2 X = 0.$$

Cette équation admet une intégrale première : l'intégrale des forces vives :

$$\dot{X}^2 + \Omega^2 X^2 = 2E$$

où la constante aléatoire E , énergie de l'oscillateur a pour expression :

$$E = \frac{1}{2} A^2 \Omega^2$$

en fonction des données.

Nous nous proposons de chercher à quelles conditions l'oscillateur est une fonction aléatoire stationnaire en probabilité, c'est à dire telle que la loi de probabilité de X ne dépende pas de t :

a) *Loi de probabilité de l'oscillateur aléatoire.*

1^{ère} Méthode. L'oscillateur dépend de 3 constantes aléatoires. Nous saurons tout sur son compte en nous donnant la loi de probabilité conjuguée de ces 3 constantes aléatoires.

En fait, il est plus commode de définir X par les 3 autres constantes aléatoires :

$$B = A \cos \varphi; \quad C = A \sin \varphi; \quad \Omega$$

à l'aide desquelles X s'exprime par :

$$X = B \sin \Omega t - C \cos \Omega t$$

et $\frac{\dot{X}}{\Omega}$ par

$$\frac{\dot{X}}{\Omega} = B \cos \Omega t + C \sin \Omega t.$$

Soit donc $R_0(b, c, \omega)$ la fonction de distribution conjuguée de B, C, Ω .

Pour passer de là aux variables X, \dot{X}, Ω , il faut faire le changement de variables :

$$\begin{cases} b = x \sin \omega t + \frac{u}{\omega} \cos \omega t \\ c = -x \cos \omega t + \frac{u}{\omega} \sin \omega t \end{cases}$$

avec

$$\frac{D(b, c)}{D(x, u)} = \frac{1}{\omega}.$$

La fonction de distribution conjuguée de X, \dot{X}, Ω a donc pour expression :

$$\frac{1}{\omega} R_0\left(x \sin \omega t + \frac{u}{\omega} \cos \omega t, -x \cos \omega t + \frac{u}{\omega} \sin \omega t, \omega\right).$$

Remarquons maintenant que R_0 est aussi bien une fonction de $b^2 + c^2$, b et ω et qu'on peut écrire :

$$R_0(b, c, \omega) = R_1(b^2 + c^2, b, \omega).$$

La fonction de distribution conjuguée de X, \dot{X}, Ω s'écrit alors :

$$\frac{1}{\omega} R_1\left(x^2 + \frac{u^2}{\omega^2}, x \sin \omega t + \frac{u}{\omega} \cos \omega t, \omega\right).$$

Pour que l'oscillateur soit stationnaire, il est nécessaire qu'elle ne dépende pas de l'argument dans lequel le temps apparaît, c'est-à-dire que la fonction $R_1(b^2 + c^2, b, \omega)$ s'écrive simplement $R_2(b^2 + c^2, \omega)$. Finalement, nous écrirons la fonction de distribution conjuguée de X, \dot{X}, Ω dans le cas stationnaire sous la forme :

$$R\left(\frac{\omega^4 x^2 + u^2}{2}, \omega\right).$$

Autrement dit :

$$\mathfrak{R} \left\{ \begin{array}{l} x < X < x + dx \\ u < \dot{X} < u + du \\ \omega < \Omega < \omega + d\omega \end{array} \right\} = R \left(\frac{\omega^2 x^2 + u^2}{2}, \omega \right) dx du d\omega .$$

2^{ème} Méthode. Utilisons l'équation différentielle aléatoire :

$$\ddot{X} + \Omega^2 X = 0$$

et cherchons la fonction de distribution conjuguée de X, de \dot{X} et de la constante aléatoire Ω qui y figure seulement comme paramètre.

Nous savons qu'elle vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial R}{\partial t} + u \frac{\partial R}{\partial x} - \omega^2 x \frac{\partial R}{\partial u} = 0$$

qui, en cas de stationnarité, se réduit à :

$$u \frac{\partial R}{\partial x} - \omega^2 x \frac{\partial R}{\partial u} = 0 .$$

Pour chaque valeur de ω , la solution générale en est l'intégrale première du système différentiel :

$$\frac{dx}{u} = \frac{du}{-\omega^2 x}$$

c'est à dire une fonction arbitraire de $\omega^2 x^2 + u^2$. La fonction cherchée a donc la forme :

$$R \left(\frac{\omega^2 x^2 + u^2}{2}, \omega \right)$$

ce qui est le résultat trouvé par la 1^{ère} méthode.

b) *Loi de probabilité de l'amplitude, de la fréquence et de la phase dans le cas stationnaire.*

Le calcul inverse de celui que nous faisons dans la 1^{ère} méthode, montre que la loi de probabilité conjuguée de b, c, ω est :

$$\omega R \left[\frac{\omega (b^2 + c^2)}{2}, \omega \right] .$$

Passons des constantes B et C à l'amplitude A et la phase Φ par le changement de variables :

$$\begin{cases} b = a \cos \varphi \\ c = a \sin \varphi . \end{cases}$$

La loi de probabilité conjuguée de Λ, Φ, Ω est :

$$\omega a R\left(\frac{\omega^2 a^2}{2}, \omega\right).$$

Elle ne dépend pas de φ . Elle est donc le produit d'une fonction de ω et de a par une fonction de φ , laquelle se réduit d'ailleurs à une constante.

La phase aléatoire Φ est donc une variable aléatoire indépendante de l'amplitude et de la pulsation et elle est répartie uniformément en probabilité (dans un intervalle d'amplitude 2π , bien entendu).

Il en résulte que la fonction de distribution conjuguée de Λ et de Ω a pour expression :

$$\int_0^{2\pi} \omega a R\left(\frac{\omega^2 a^2}{2}, \omega\right) d\varphi = 2\pi \omega a R\left(\frac{\omega^2 a^2}{2}, \omega\right).$$

Cherchons enfin la fonction de distribution conjuguée de l'énergie E et de la pulsation Ω de l'oscillateur. Cette fonction est intéressante parce qu'elle contient les deux grandeurs ayant une signification physique et un caractère intrinsèque et invariant. De la définition :

$$E = \frac{1}{2} \Lambda^2 \Omega^2$$

de l'énergie, on déduit tout de suite le résultat :

$$\frac{2\pi}{\omega} R(\varepsilon, \omega).$$

c) *L'oscillateur stationnaire en probabilité est complètement stationnaire.*

Nous disons qu'une fonction aléatoire est complètement stationnaire, lorsque son moment linéaire ne dépend que des différences $(t_j - t_i)$ entre les époques t_1, t_2, \dots, t_n . L'expression analytique de l'oscillateur aléatoire dépend de trois constantes aléatoires. Supposons que nous connaissions les valeurs X_1, X_2, X_3 de X à trois instants t_1, t_2, t_3 arbitraires. Nous pouvons alors calculer la valeur de X à un instant quelconque :

X/t est une fonction certaine de X_1, X_2, X_3 .

Cette remarque est très importante, car elle montre que l'oscillateur aléatoire est une fonction aléatoire un peu particulière : la loi de probabilité des valeurs de X/t prises à n instants successifs n'est pas

essentiellement distincte de la loi de probabilité de X/t à *trois* instants t_1, t_2, t_3 seulement : la connexion est donc très simplifiée. Comme la pulsation Ω joue un rôle à part, il est commode de la conserver et de la conjuguer avec des valeurs de X prises à deux instants seulement : X/t est une fonction certaine de X_1, X_2, Ω . On trouve facilement que :

$$X/t = \frac{X_1 \sin \Omega (t_2 - t) - X_2 \sin \Omega (t_1 - t)}{\sin \Omega (t_2 - t_1)}.$$

L'expression analytique de X/t en fonction de $X/t_1, X/t_2$ et Ω ne dépend que des *différences* $(t_2 - t), (t_1 - t), (t_2 - t_1)$.

Si nous démontrons que la loi de probabilité conjuguée de X_1, X_2, Ω ne dépend que de la différence $(t_2 - t_1)$ il en résultera donc que la loi de probabilité conjuguée des valeurs de X/t en n points ne dépend que des intervalles de temps, et non des temps eux-mêmes, d'où il suivra que l'oscillateur est complètement stationnaire.

Or, il est bien facile de former la fonction de distribution conjuguée de X_1, X_2 et Ω . La fonction de distribution conjuguée de B, C, Φ étant :

$$\omega R \left[\frac{b^2 + c^2}{2} \omega^2, \omega \right]$$

il suffit de faire le changement de variables :

$$\begin{cases} x_1 = b \sin \omega t_1 - c \cos \omega t_1 \\ x_2 = b \sin \omega t_2 - c \cos \omega t_2 \end{cases}$$

et l'on trouve :

$$\frac{\omega}{|\sin \omega (t_2 - t_1)|} R \left[\frac{\omega^2 x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \cos \omega (t_2 - t_1)}{2 (\sin^2 \omega (t_2 - t_1))}, \omega \right].$$

La loi de probabilité conjuguée de X_1, X_2 et Ω dépend donc du temps uniquement par la différence $(t_2 - t_1)$. Il en résulte que les conditions : phase indépendante de l'amplitude et de la pulsation, et répartie uniformément dans un intervalle 2π , constituent la condition nécessaire et suffisante pour que l'oscillateur aléatoire soit complètement stationnaire.

d) *Propriétés des moments. Connexion.*

Le moment rectangle $\overline{X_1 X_2}$ a pour expression :

$$\begin{aligned} \overline{X_1 X_2} &= \overline{A^2 \sin (\Omega t_1 - \Phi) \sin (\Omega t_2 - \Phi)} = \\ &= \frac{A^2 \cos \Omega (t_2 - t_1)}{2} - \frac{A^2}{2} \cos [\Omega (t_1 + t_2) - 2\Phi]. \end{aligned}$$

Pour calculer le 2^{ème} terme, on peut d'abord donner à Λ et Ω des valeurs fixes et intégrer par rapport à φ . Comme la fonction de distribution de φ est $\frac{1}{2\pi}$ on voit qu'il faut calculer l'intégrale :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos[\omega(t_1+t_2)-2\varphi] d\varphi$$

qui est nulle. Le second terme est donc nul, et il reste :

$$\overline{X_1 X_2} = \frac{1}{2} \overline{\Lambda^2 \cos \Omega(t_2 - t_1)}.$$

Introduisons la moyenne liée $\overline{\Lambda^2(\omega)}$ de Λ^2 pour $\Omega = \omega$ et la fonction de distribution $\psi(\omega)$ de la pulsation. Nous pouvons écrire :

$$\overline{X_1 X_2} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \overline{\Lambda^2(\omega)} \cos \omega(t_2 - t_1) \psi(\omega) d\omega.$$

Pour $t_2 = t_1$, nous voyons que $\overline{X^2}$ a la valeur (constante bien entendu) :

$$\overline{X^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \overline{\Lambda^2(\omega)} \psi(\omega) d\omega.$$

Par suite, le coefficient de corrélation entre X_1 et X_2 est :

$$r(t_2 - t_1) = \frac{\int_0^{\infty} \overline{\Lambda^2(\omega)} \cos \omega(t_2 - t_1) \psi(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} \overline{\Lambda^2(\omega)} \psi(\omega) d\omega}.$$

Posons :

$$f(\omega) = \frac{\overline{\Lambda^2(\omega)} \psi(\omega)}{\int_0^{\infty} \overline{\Lambda^2(\omega)} \psi(\omega) d\omega}.$$

Nous pouvons mettre r sous forme d'une intégrale de Fourier :

$$r(t_2 - t_1) = \int_0^{\infty} f(\omega) \cos \omega(t_2 - t_1) d\omega,$$

résultat qui n'est pas l'apanage de l'oscillateur, mais de toute fonction aléatoire analytique stationnaire.

29. Calcul des variations. Le calcul des variations se transpose sans difficultés en Analyse aléatoire et conduit à des équations d'Euler aléatoires.

Démontrons d'abord le *lemme fondamental*.

Soit Y/t une fonction aléatoire arbitraire, à cela près qu'elle se réduise à la constante certaine zéro pour $t=t_1$ et $t=t_2$.

Soit Z/t une seconde fonction aléatoire.

Si $\int_{t_1}^{t_2} \overline{YZ} dt = 0$ quelle que soit la fonction Y, Z ne peut être que le nombre certain zéro.

Séparons en effet, dans Y et Z les valeurs probables \overline{Y} et \overline{Z} et les valeurs purement aléatoires Y', Z' .

Posons :

$$S^2(t) = \overline{Y'^2} \quad \sigma^2(t) = \overline{Z'^2} \quad r(t) = \frac{\overline{Y'Z'}}{\sigma S}$$

L'hypothèse devient :

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{Y Z} dt + \int_{t_1}^{t_2} \overline{Y' Z'} dt = 0.$$

Parmi les fonctions Y , choisissons celles dont la valeur probable est nulle. Leur écart type $S(t)$ reste cependant une fonction arbitraire (nulle pour t_1 et t_2) et leur coefficient de corrélation r avec Z est aussi arbitraire. Or l'on a :

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{Y' Z'} dt = \int_{t_1}^{t_2} (rS) \sigma dt = 0,$$

rS étant une fonction arbitraire de t , nulle pour t_1 et t_2 ; le lemme fondamental du Calcul des Variations classique montre que :

$$\sigma = 0.$$

D'où $Z' = 0$ et par suite $Z = \overline{Z}$.

Choissant maintenant une fonction aléatoire Y de valeur probable \overline{Y} non nulle (sauf pour t_1 et t_2), on doit avoir :

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{Y Z} dt = 0$$

d'où $\overline{Z} = 0$; donc $Z = 0$.

Le problème du Calcul des variations aléatoire, est la recherche des fonctions aléatoires X/t dérivables qui rendent extrême l'intégrale :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \overline{\varphi(X, \dot{X}, t)} dt$$

et qui se réduisent pour t_1 et t_2 à des constantes aléatoires données.

φ est une fonction certaine de ses arguments.

La variation de I s'obtient, comme en Analyse certaine, en remplaçant X par $X + \alpha Y$, Y étant une fonction aléatoire arbitraire nulle pour t_1 et t_2 .

On obtient :

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} Y \left[\frac{\partial \varphi}{\partial X} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{X}} \right)' \right] dt$$

et il résulte du lemme fondamental que la fonction aléatoire vérifie l'équation d'Euler aléatoire :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{X}} \right)' - \frac{\partial \varphi}{\partial X} = 0.$$

Traisons l'exemple du point aléatoire libre.

Il faut déterminer les fonctions aléatoires X/t qui rendent extrême l'intégrale :

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{X^2} dt.$$

L'équation d'Euler $\ddot{X} = 0$ a pour solution formelle :

$$X = A + Bt$$

Les constantes aléatoires $X/t_1, X/t_2$ sont données par leur loi de probabilité conjuguée :

$$G(x_1, x_2).$$

On en déduit immédiatement, par un simple changement de variables, la loi conjuguée de A et de B :

$$R_0(a, b) = |t_2 - t_1| G(a + bt_1, a + bt_2).$$

Ainsi, si G est le produit de deux lois de Gauss (indépendance de X/t_1 et de X/t_2) :

$$G(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi S_1 S_2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{S_1^2} + \frac{x_2^2}{S_2^2} \right)}$$

on trouve :

$$R_0(a, b) = \frac{|t_2 - t_1|}{2\pi S_1 S_2} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{(a + bt_1)^2}{S_1^2} + \frac{(a + bt_2)^2}{S_2^2} \right]}.$$

La fonction de distribution conjuguée de X et de \dot{X} à l'instant t , est :

$$R(x, u, t) = \frac{|t_2 - t_1|}{2\pi S_1 S_2} e^{-\frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{x-u(t-t_1)}{S_1} \right]^2 + \left[\frac{x-u(t-t_2)}{S_2} \right]^2 \right\}}$$

et celle de X seul :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{|t_2 - t_1|}{\sqrt{S_2^2(t-t_1)^2 + S_1^2(t-t_2)^2}} e^{-\frac{x^2}{2} \frac{(t_1 - t_2)^2}{S_2^2(t-t_1)^2 + S_1^2(t-t_2)^2}}$$

L'écart type de X est :

$$\frac{\sqrt{S_2^2(t-t_1)^2 + S_1^2(t-t_2)^2}}{|t_2 - t_1|}$$

V - FONCTIONS ALÉATOIRES STATIONNAIRES

30. Diverses Sortes de Stationnarité. La stationnarité d'une fonction aléatoire peut s'entendre de plusieurs manières :

(a) *Stationnarité en probabilité*, lorsque la fonction de distribution conjuguée de X/t et de \dot{X}/t ne dépend pas de t .

En particulier, il en est de même de la loi de probabilité de X .

Tous les moments conjugués de X et de \dot{X} sont constants ; certains sont nuls :

$$\overline{X^k \dot{X}} = \frac{1}{k+1} \frac{d}{dt} \overline{X^{k+1}} = 0.$$

Cette notion de stationnarité est très importante au point de vue physique. Ainsi elle rend très bien compte du paradoxe de l'atome de Bohr dans lequel les électrons ne rayonnent pas d'énergie dans leur mouvement sur leur orbite. C'est que cette énergie rayonnée est une grandeur macroscopique dépendant des *moments* de X et de \dot{X} et ceux-ci sont constants lorsque le mouvement est stationnaire en probabilité.

(b) *Stationnarité simple*, lorsque le moment rectangle $\overline{X/t_1 X/t_2}$ est fonction de la seule variable $(t_2 - t_1)$.

En ce cas, l'écart type $S^2(t) = \overline{X^2}/t$ est constant et le coefficient de corrélation n'est aussi fonction que de $(t_2 - t_1)$.

(c) *Stationnarité complète*¹ — beaucoup plus restrictive que les précédents et qui les englobe —, lorsque le moment linéaire :

¹ Nous devons cette notion à M. J. Moyal

$$\Gamma_n = \overline{X/t_1 X/t_2 \dots X/t_n}$$

ne dépend que des différences $(t_i - t_j)$, et cela quelque soit n . En ce qui concerne l'oscillateur, nous avons vu que s'il est stationnaire en probabilité, il est aussi simplement stationnaire et même complètement stationnaire. Mais bien entendu, ce fait ne saurait être qu'accidentel.

Par contre, il est aisé de démontrer le théorème suivant qui est presque évident :

Si une fonction aléatoire X , indéfiniment dérivable, est complètement stationnaire, tous les moments conjugués de X et de ses dérivées successives sont constants, et réciproquement.

31. Le Spectre d'une Fonction Aléatoire Stationnaire. Nous allons indiquer maintenant une propriété tout à fait fondamentale des fonctions aléatoires (simplement) stationnaires.

On supposera, ce qui est une restriction sans importance que :

$$\overline{X} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{X^2} = 1.$$

Nous avons vu que le coefficient de corrélation $r(\tau)$ d'une fonction aléatoire stationnaire indéfiniment dérivable, se développe ainsi :

$$r(\tau) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\tau^{2p}}{(2p)!} S_p^2.$$

S_p étant l'écart type de la $p^{\text{ème}}$ dérivée ($S_0 = 1$).

Or, les S_p^2 peuvent être considérés comme les moments pairs d'une loi de probabilité, définie par une certaine fonction des probabilités totales $\psi(\omega)$:

$$S_p^2 = \int_0^{\infty} \omega^{2p} d\psi(\omega) = \overline{\omega^{2p}}.$$

Les inégalités vérifiées par les S_p sont bien en effet celles que vérifient les moments successifs d'une variable aléatoire.

Ainsi :

$$S_1^2 \leq S_2 S_0, \quad \text{soit} \quad S_1^2 \leq S_2$$

correspond à :

$$\overline{\omega^2}^2 < \overline{\omega^4}.$$

Multipliant cette inégalité par la suivante qui est :

$$S_2^2 \leq S_3 S_1$$

on obtient :

$$S_1 S_2 \leq S_3$$

d'où

$$S_1^3 < S_1 S_2 < S_3$$

qui correspond à

$$\overline{\omega_2^3} < \overline{\omega^3}$$

et ainsi de suite.

$r(\tau)$ peut donc s'écrire :

$$r(\tau) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\tau^{2p}}{(2p)!} \overline{\omega^{2p}} = \sum (-1)^p \frac{(\omega\tau)^{2p}}{(2p)!} = \overline{\cos \omega\tau}$$

soit, sous forme d'une *intégrale de Fourier* :

$$r(\tau) = \int_0^{\infty} \cos \omega\tau d\psi(\omega).$$

En somme cela revient à dire que $r(\tau)$ a les propriétés d'une *fonction caractéristique*.

Inversement, la fonction $\Psi(\omega)$ peut être déduite de $r(\tau)$ par une *inversion de Fourier*.

La propriété dont nous venons de parler a été établie d'autre part, par Khintchine, dans des conditions très générales.

Pour trouver son interprétation physique, adressons nous à l'oscillateur aléatoire stationnaire (à fréquence aléatoire) dont nous avons fait l'étude, à titre d'exemple de l'intégration d'une équation différentielle aléatoire.

Le coefficient de corrélation entre X_1 et X_2 est bien, en effet, de la forme voulue :

$$\frac{\overline{A^2 \cos \Omega t}}{A^2}.$$

Nous choisirons de préférence le coefficient de corrélation entre \dot{X}_1 et \dot{X}_2 qui se déduit du précédent en remplaçant A par $(-\Omega A)$. L'énergie de l'oscillateur étant égale à $\Omega^2 A^2$, ce coefficient de corrélation s'écrit :

$$r(\tau) = \frac{\overline{E \cos \Omega t}}{E}.$$

Désignons par $\overline{E(\omega)}$ la moyenne liée de l'énergie pour la valeur déterminée ω de Ω , et par $\mathcal{F}(\omega)$ la fonction des probabilités totales de Ω .

$\mathcal{F}(\omega)$ détermine la répartition des fréquences dans le spectre; on peut donc l'appeler *fonction spectrale*.

Quand à $\overline{E(\omega)}$ c'est l'énergie moyenne que possède a priori—en vertu

du «mécanisme» de l'oscillateur — un oscillateur de pulsation ω . Par exemple, pour un oscillateur de Planck, on aurait :

$$\overline{E}(\omega) = \frac{h\omega}{2\pi}.$$

La moyenne générale de l'énergie (qui dépend de la répartition, c'est à dire du nombre d'oscillateurs ayant une fréquence donnée) est :

$$\overline{E} = \int_0^{\infty} \overline{E}(\omega) d\mathfrak{F}(\omega).$$

Le coefficient de corrélation de \dot{X} s'écrit :

$$r(\tau) = \int_0^{\infty} (\cos \omega\tau) \frac{\overline{E}(\omega)}{\overline{E}} d\mathfrak{F}(\omega).$$

d'où la signification de la fonction Ψ :

$$d\Psi(\omega) = \frac{\overline{E}(\omega)}{\overline{E}} d\mathfrak{F}(\omega).$$

La fonction Ψ n'est identique à la fonction spectrale que si l'énergie est indépendante de la fréquence :

$$\overline{E}(\omega) = c^{te} = \overline{E}$$

Physiquement, on peut se faire la représentation suivante.

Dans une enceinte se trouve un «gaz d'oscillateurs» c'est à dire un très grand nombre d'oscillateurs possédant toutes les fréquences, toutes les énergies et toutes les phases possibles. Ce gaz peut être représenté par un *oscillateur aléatoire unique*, pour lequel Ω , E , Φ seront considérées comme des *constants aléatoires*. On suppose qu'en vertu de la nature physique de ces oscillateurs, l'énergie moyenne des oscillateurs de pulsation ω est, en toutes circonstances, une fonction connue $\overline{E}(\omega)$ de ω ; par exemple il pourra se faire qu'*individuellement* chaque oscillateur satisfasse à la relation de Planck :

$$E = \frac{h\omega}{2\pi}.$$

Pour qu'un *équilibre statistique* s'établisse, c'est à dire un état dans lequel les moyennes des diverses grandeurs physiques prises sur l'ensemble des oscillateurs élémentaires (et qui sont des moments de X

et de \bar{X}) demeurent permanentes, il faut que l'oscillateur aléatoire équivalent soit stationnaire.

Cela est réalisé quand Φ est une variable aléatoire de distribution uniforme, indépendante en probabilité de Ω et de E . Alors, le coefficient de corrélation $r(\tau)$ qui exprime la connexion entre les états successifs du gaz d'oscillateurs, détermine (par une inversion de Fourier) la fonction $\Psi(\omega)$.

On en déduit ensuite la fonction spectrale $\mathcal{F}(\omega)$ par la relation :

$$d\Psi(\omega) = \frac{\overline{E}(\omega)}{\bar{E}} d\mathcal{F}(\omega).$$

En résumé, le théorème de Khintchine confère à une fonction aléatoire stationnaire la propriété d'avoir un spectre de fréquences, ce qui laisse espérer qu'une telle représentation convienne particulièrement bien à la Physique atomique.

32. Spectre Continu et Spectre de Raies. Rappelons les propriétés des fonctions de probabilité totale.

$\mathcal{F}(\omega)$ est la probabilité pour que $0 < \Omega < \omega$.

La probabilité pour que :

$$\omega < \Omega < \omega + d\omega$$

est de l'ordre de $d\omega$, sauf pour un certain nombre de valeurs ω_k de ω formant une suite dénombrable.

On peut décomposer $\mathcal{F}(\omega)$ en la somme de deux fonctions \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 .

a) $\mathcal{F}_1(\omega)$ est une fonction continue (que nous supposons même dérivable), non négative et non décroissante. Soit $\lambda(\omega)$ sa dérivée.

b) $\mathcal{F}_2(\omega)$ est une fonction discontinue, non négative et non décroissante. Elle reste constante dans l'intervalle :

$$\omega_k < \omega < \omega_{k+1}$$

et, lorsque ω traverse la valeur ω_k , elle subit la discontinuité :

$$\mathcal{F}_2(\omega_k + 0) - \mathcal{F}_2(\omega_k - 0) = \alpha_k.$$

C'est une fonction « en escalier ».

D'après le théorème des probabilités totales :

$$\int_0^\infty d\mathcal{F}(\omega) = 1$$

done :

$$\int_0^\infty \lambda(\omega) d\omega + \sum_k \alpha_k = 1.$$

La série à termes positifs $\sum_k a_k$ est *convergente*, sa somme ne pouvant excéder l'unité.

La fonction $\overline{\mathcal{F}}_1(\omega)$ représente la partie *continue* du spectre et les fréquences ω_k repèrent les *raies spectrales*.

La fonction $\Psi(\omega)$ — inverse de Fourier du coefficient de corrélation-est donnée par :

$$d\Psi(\omega) = \lambda(\omega) \frac{\overline{E}(\omega)}{\overline{E}} d\omega + \frac{\overline{E}(\omega)}{\overline{E}} d\overline{\mathcal{F}}_2(\omega).$$

Et le coefficient de corrélation lui même, par :

$$r(\tau) = \int_0^\infty (\cos \omega\tau) \frac{\overline{E}(\omega)}{\overline{E}} \lambda(\omega) d\omega + \sum_k b_k \cos \omega_k \tau$$

avec :

$$b_k = \frac{\overline{E}(\omega_k)}{\overline{E}} a_k.$$

Le coefficient de corrélation admet donc comme discontinuités toutes les discontinuités de la fonction spectrale $\overline{\mathcal{F}}(\omega)$. On peut dire qu'il reproduit *qualitativement* le spectre.

33. Périodicité et Stationnarité. L'exemple de l'oscillateur aléatoire (à fréquence aléatoire) semble montrer qu'il existe une certaine relation entre le caractère de stationnarité d'une fonction aléatoire et le caractère de *périodicité* de la fonction obtenue au cours d'une *épreuve* sur la fonction aléatoire.

Mais la relation que suggère l'oscillateur est évidemment *trop particulière*. Elle est contraire à l'idée que nous nous sommes faite de la «réalisation» d'une fonction aléatoire — qui doit être assez discontinue pour qu'une épreuve permette d'estimer les moments statistiques — d'admettre que l'évolution de chaque individu puisse se représenter par une sinusoïde (ou même une fonction périodique).

Slutsky a montré que, sous des conditions assez générales : «toute fonction aléatoire stationnaire est une série de Fourier aléatoire presque périodique». Cette représentation déjà plus satisfaisante que l'oscillateur, n'est pourtant pas encore, à notre avis, la plus générale.

(A suivre)

Note d'un des auteurs

Ce Mémoire est le résumé, que nous nous sommes efforcés de rendre aussi compréhensible que possible, d'un ouvrage de volume plus important, auquel nous avons travaillé avec des interruptions et des fortunes diverses depuis 1936.

Il voit le jour grâce à l'accueil bienveillant du Laboratoire de Physique de la Faculté des Sciences de Lisbonne et à la large hospitalité que lui a donnée la Revue *Portugaliae Physica*.

Je remercie, au nom de mon co-auteur Ph. Wehrlé et au mien propre :

Mr. le Professeur Cyrillo Soares, Directeur du Laboratoire ;

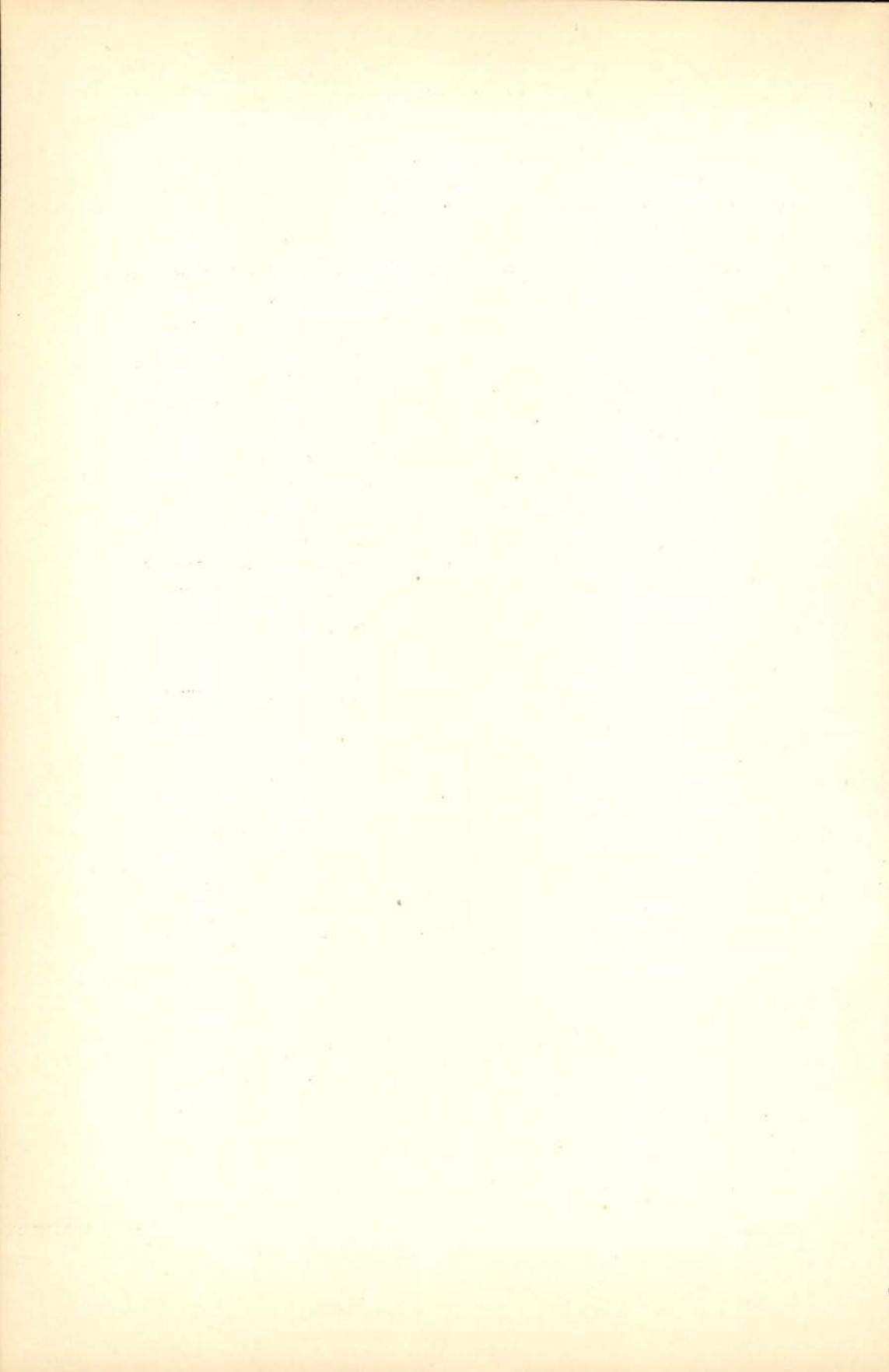
Mr. le Docteur Marques da Silva ;

Mr. le Docteur Valadares.

Particulièrement, c'est à Mr. Valadares que l'on devra que le Mémoire ait été publié presque sans fautes typographiques, grâce à la discrète patience avec laquelle il a suivi les corrections.

LISBONNE, 5 FÉVRIER 1945.

G. DEDEBANT



SUR L'ABSORPTION DU RAYONNEMENT γ ÉMIS PAR L'URANIUM I ET LEUR DESCENDANTS IMMÉDIATS

par MARIETA DA SILVEIRA (À LISBONNE)

(Reçu le 21 Novembre 1944)

Introduction. Le rayonnement γ émis par l'uranium et leur descendants immédiats a été étudié, soit par absorption, soit par spectrographie magnétique.

Par la première de ces méthodes, quelques auteurs ont déterminé plusieurs valeurs du coefficient d'absorption, correspondant à différents rayonnements γ , mais les résultats diffèrent beaucoup selon l'auteur.

La table suivante montre les résultats correspondant au rayonnement γ le plus pénétrant. Elle nous donne les valeurs du coefficient massique d'absorption, dans l'aluminium et dans le plomb, les valeurs de l'énergie et de la longueur d'onde respectives (calculées à partir des tables données par Sizoo et Coumou [1]) et aussi l'indication des sources employées dans les déterminations.

Auteurs	Sources	$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{Pb}$ (cm ² /g)	$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{Al}$ (cm ² /g)	Énergie (keV)	λ (U.X.)
Soddy et Russel [2]	UX	0,0636	—	1130	11,0
Richardson [3]	UX	—	0,052	1380	9,0
Hahn et Meitner [4]	UX	0,064	—	1120	11,1
Walling [5]	UZ	0,097	—	720	17,2
Stahel et Coumou [6]	UX	0,0731	—	950	13,1
Sizoo et Coumou [1]	UX	0,0475	0,0481	1700	7,3
		0,115	—	630	19,8
Feather et Bretscher [7]	UZ	0,087 ± 0,005	—	790 ± 40 *	15,6 ± 0,8

* Les auteurs, d'après la valeur mesurée du coefficient d'absorption, donnent pour l'énergie la valeur 700 ± 50 keV, mais ils n'indiquent pas les tables dont ils se sont servis pour le calcul. Nous avons calculé la valeur 790 ± 40 keV, d'après Sizoo et Coumou (loc. cit.).

En examinant cette table, on voit tout de suite que les valeurs obtenues par les différents auteurs ne sont pas en bon accord.

L'analyse du spectre β de l'UX a été entreprise, par la première fois, par Meitner [8], en employant un spectrographe magnétique, et elle a trouvé des lignes de conversion correspondant à trois rayonnements γ . Plus tard, Marshall [9], étudiant de nouveau le spectre β de l'UX, a trouvé seulement deux lignes de conversion correspondant à un seul rayonnement γ . Enfin, Breidt, Heine et Scherrer [10], en répétant ces mesures, ont trouvé des lignes de conversion correspondant à trois rayonnements γ .

La table suivante contient les valeurs obtenues, par ces auteurs, pour les énergies des rayonnements γ et les longueurs d'onde respectives.

MEITNER		MARSHALL		BREIDT, HEINE et SCHERRER	
Énergie (keV)	λ (U.X.)	Énergie (keV)	λ (U.X.)	Énergie (keV)	λ (U.X.)
806	15,4	802	15,4	782	15,8
831	14,9	—	—	806	15,4
845	14,7	—	—	822	15,0

L'examen de cette table montre que les résultats obtenus par spectrographie magnétique peuvent être considérés, aux erreurs expérimentales près, en bon accord les uns avec les autres, mais qu'il y a un grand désaccord entre ces résultats et ceux qui ont été obtenus par absorption.

C'est ce désaccord qui nous a fait reprendre l'analyse du rayonnement γ de l'UX par absorption.

Dispositif expérimental. Pour détecter le rayonnement γ , nous avons employé un compteur de Geiger-Müller, de 1,5 cm de diamètre et 5 cm de longueur, contenant un mélange d'air et de vapeur d'alcool à la pression de 5 cm de mercure. Nous avons choisi ce mélange, pour le remplissage du compteur, parce qu'il nous donne un bon palier (environ 100 volts) et exige une tension plus faible entre le fil et la paroi. Cette tension était fournie par une batterie de piles sèches.

Le compteur était relié à un amplificateur, associé à une échelle «à quatre» (scale of four) et les impulsions étaient enregistrées dans un enregistreur «Cenco».

La source était constituée par une préparation d'oxyde d'uranium, contenant donc U_1 , UX_1 , UX_2 , UZ et U_{II} en équilibre radioactif. Cette

source a été placée à une distance déterminée du compteur (10 cm) et les mesures d'absorption ont été réalisées à travers des écrans absorbants, dont les masses superficielles étaient bien déterminées. On a interposé, entre la source et les écrans absorbants, une lame de paraffine, dont l'épaisseur (1,2 cm) était suffisante pour absorber tous les rayons β émis par la source.

Résultats. On a étudié l'absorption du rayonnement γ , émis par la source d'oxyde d'uranium, dans le plomb et dans d'aluminium. Pour chacun des absorbants, on a déterminé plusieurs courbes d'absorption, dont les valeurs moyennes sont représentées, graphiquement et en échelle logarithmique, dans les figures 1 et 2.

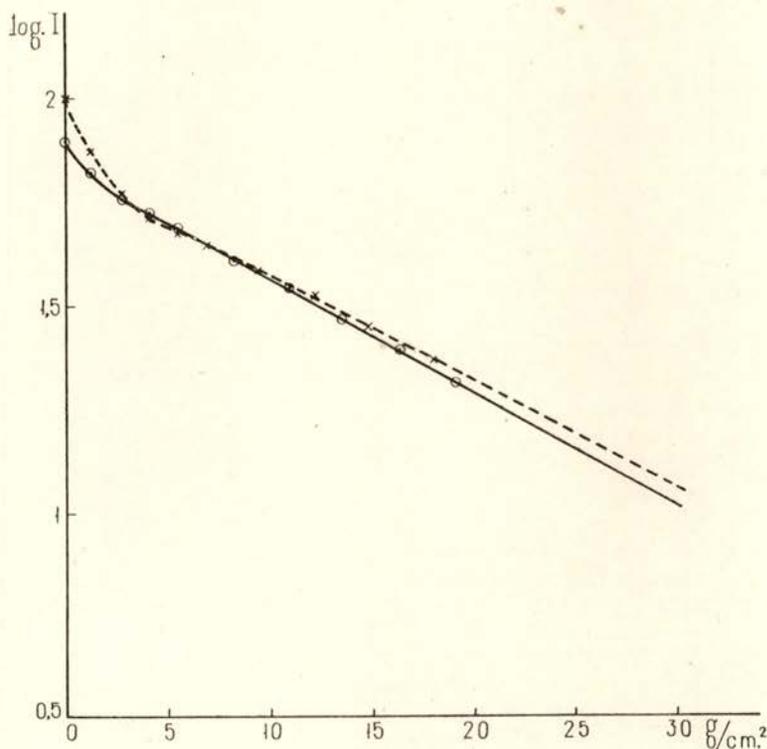


FIG. 1 — Courbe d'absorption dans l'aluminium

⊙ Distance source-compteur: 10 cm × Distance source-compteur: 5 cm

L'examen des courbes d'absorption obtenues nous montre tout de suite que le rayonnement γ analysé est complexe. En effet, on peut déduire de ces courbes que le rayonnement γ doit être constitué par un

ou plusieurs rayonnements mous (correspondant à la première partie des courbes) et par un rayonnement γ pénétrant (correspondant à la partie rectiligne des courbes).

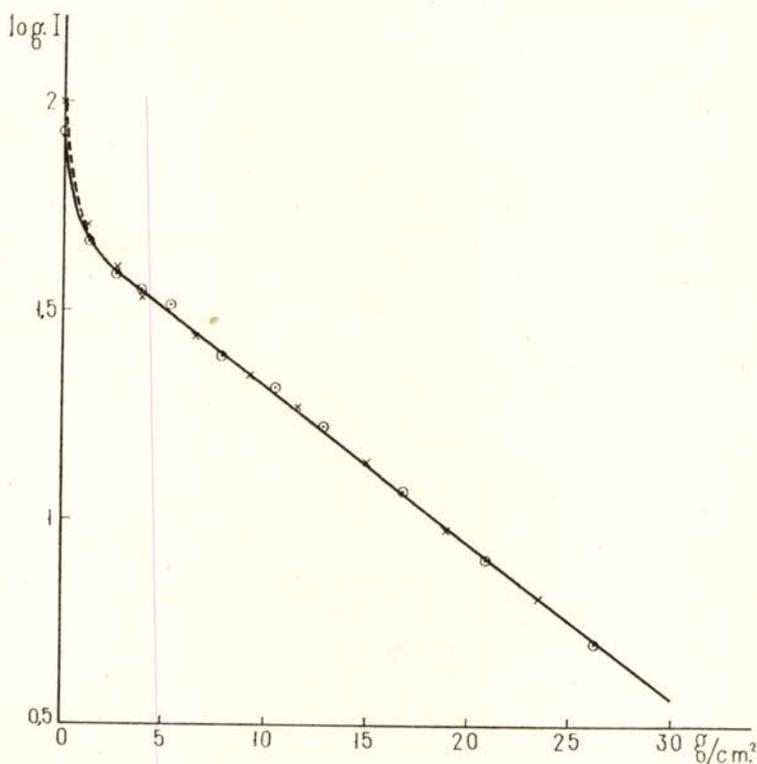


FIG. 2 — Courbe d'absorption dans le plomb

⊙ Distance source-compteur: 10 cm × Distance source-compteur: 5 cm

De ces graphiques, on déduit, pour le coefficient massique d'absorption de ce rayonnement pénétrant, les valeurs :

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{\text{Pb}} = 0,085 \text{ cm}^2/\text{g}$$

dans le plomb, et

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{\text{Al}} = 0,063 \text{ cm}^2/\text{g}$$

dans l'aluminium.

Dans nos expériences, comme nous l'avons déjà dit, la distance de la source au compteur était de 10 cm. Comme cette valeur de la distance est trop petite, les mesures faites dans ces conditions, pouvaient

être influencées par l'action du rayonnement dispersé. Nous n'avons pas pu augmenter cette distance à cause de la faible intensité de la source.

Dans le but de vérifier si l'action du rayonnement dispersé était assez importante pour qu'on ait besoin d'en tenir compte, nous avons répété les mesures d'absorption, en modifiant la valeur de cette distance. Puisqu'on sait que, plus petite est la distance source-compteur, plus grande est l'action du rayonnement dispersé, nous avons fait des expériences, en réduisant la valeur de cette distance à 5 cm, et nous nous attendions alors à obtenir un rayonnement qui fût en apparence un peu plus pénétrant. Cependant, nous avons vérifié cet effet seulement dans le cas de l'absorption dans l'aluminium. Nous avons obtenu alors une valeur du coefficient massique d'absorption un peu moindre que celle que nous avons déterminée dans nos premières expériences (0,058 cm²/g).

Dans les mesures de l'absorption dans le plomb, nous avons obtenu, pour le coefficient massique d'absorption, la même valeur qu'auparavant.

Pour plus de sûreté et pour contrôler notre installation, nous avons réalisé plusieurs mesures d'absorption du rayonnement γ , le plus pénétrant, du Ra C. Dans ces expériences, nous avons employé une source constituée par 5 mg de Ra, suffisamment intense pour que nous puissions la placer à une distance assez grande (environ 1 m) du compteur.

Nous avons réalisé, avec cette source, deux séries d'expériences: — Dans la première, nous avons mesuré l'absorption du rayonnement à travers le plomb, en disposant les écrans absorbants directement sur la source, et nous avons obtenu, pour le coefficient massique d'absorption, la valeur 0,0460 cm²/g. Dans la seconde série d'expériences, nous avons conservé la source également éloignée du compteur, mais nous avons disposé les écrans absorbants à une distance de 10 cm du compteur. Dans ces conditions, la valeur obtenue pour le coefficient massique d'absorption dans le plomb, a été 0,0465 cm²/g.

D'après les résultats de Kohlrausch [11], le coefficient massique d'absorption du rayonnement γ , le plus pénétrant, du Ra C, dans le plomb, est de 0,047 cm²/g.

Nous pouvons, par conséquent, conclure que, lorsque l'élément absorbant employé est le plomb, l'effet du rayonnement dispersé est négligeable, quel que soit le dispositif géométrique employé; et aussi que nous pouvons avoir confiance dans la rigueur des mesures faites avec notre installation.

D'après toutes les expériences que nous venons de décrire, nous pouvons conclure qu'il n'y a pas de correction à apporter à la valeur

que nous avons obtenue pour le coefficient massique d'absorption, dans le plomb, du rayonnement γ émis par l'uranium, mais qu'il faut corriger, de l'action du rayonnement dispersé, la valeur expérimentale du coefficient massique d'absorption dans l'aluminium.

Cette correction, étant données les dimensions assez grandes de notre source et la disposition géométrique de notre système source-compteur, est très difficile à faire, et nous pouvons seulement indiquer que la valeur $0,063 \text{ cm}^2/\text{g}$ est, certainement, un peu moindre que la valeur réelle.

En prenant les densités du plomb et de l'aluminium, respectivement, égales à 11,3 et 2,7 on obtient, pour les coefficients linéaires d'absorption, les valeurs :

$$\begin{aligned}\mu_{\text{Pb}} &= 0,96 \text{ cm}^{-1} \\ \mu_{\text{Al}} &= 0,17 \text{ cm}^{-1}\end{aligned}$$

D'après la valeur de μ_{Pb} et en employant les tables de Pollard et Davidson [12], nous pouvons déduire, pour l'énergie du rayonnement γ , le plus pénétrant, de l'uranium, la valeur 820 keV, à laquelle correspond la longueur d'onde 15 U. X. Ce résultat est en bon accord avec les résultats obtenus par spectrographie magnétique.

D'après la valeur de $\mu_{\text{Al}}=0,17 \text{ cm}^{-1}$, on déduirait, pour l'énergie du rayonnement, la valeur 880 keV, qui est un peu exagérée, comme il fallait s'y attendre, puisque nous n'avons pas fait la correction nécessaire de la valeur de μ_{Al} .

Il faut cependant remarquer que la valeur du coefficient linéaire d'absorption, dans l'aluminium, correspondant à un rayonnement de l'énergie 820 keV est $0,176 \text{ cm}^{-1}$, et nous voyons ainsi que la différence existant entre cette valeur et la valeur expérimentale est parfaitement acceptable aux erreurs d'expérience près.

Nous avons déjà vu que le rayonnement γ , émis par la source d'oxyde d'uranium, est un rayonnement complexe, mais pour pouvoir conclure si nous avons affaire avec un ou plusieurs rayonnements mous, il nous faut entreprendre une étude détaillée, de la première partie des courbes d'absorption.

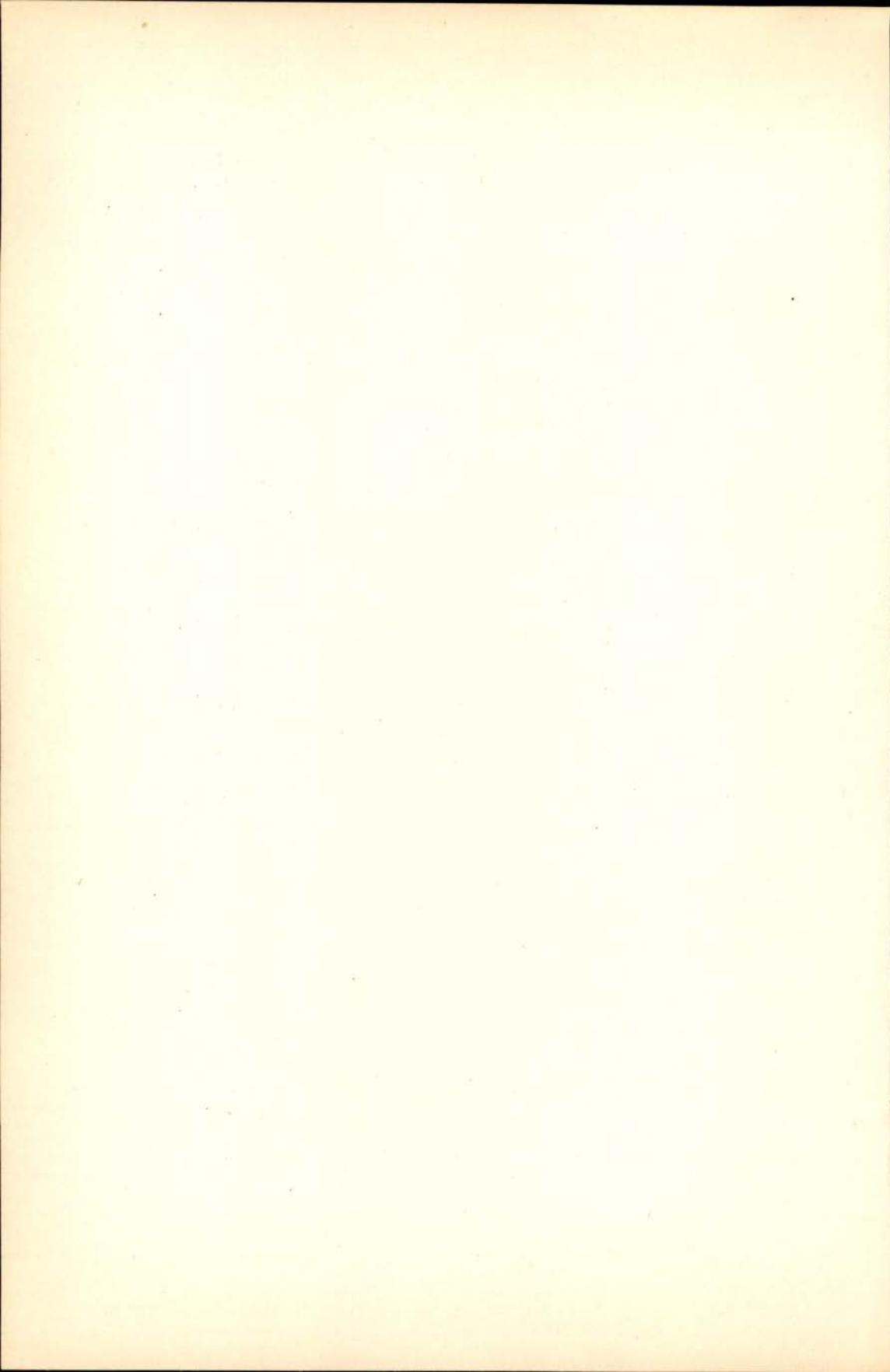
Nous poursuivons, actuellement, cette analyse, en employant des écrans absorbants, dont les masses superficielles sont beaucoup plus petites que celles des écrans employés dans les expériences décrites.

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique de la Faculté des Sciences de Lisbonne. Je remercie M. Le Professeur A. Cyrillo

Soares, Directeur du Laboratoire, de l'intérêt qu'il a manifesté pour ces recherches et des moyens qu'il a mis à ma disposition. Je remercie aussi M. A. Marques da Silva, qui m'a proposé ce travail, de l'aide qu'il m'a apportée par ses conseils, au cours de l'exécution.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] SIZOO et COUMOU — *Physica*, **3**, 921, 1936.
- [2] SODDY et RUSSEL — *Phil. Mag.*, **18**, 620, 1909.
- [3] RICHARDSON — *Phil. Mag.*, **27**, 252, 1914.
- [4] HAHN et MEITNER — *Zeits. f. Phys.*, **17**, 157, 1923.
- [5] WALLING — *Zeits. f. Phys.*, **75**, 425, 1932.
- [6] STAHEL et COUMOU — *Physica*, **2**, 707, 1935.
- [7] FEATHER et BRETSCHER — *Proc. Roy. Soc.*, **165**, 530, 1938.
- [8] MEITNER — *Handbuch der Physik*, Vol. XXII/1, 135, 1933.
- [9] MARSHALL — *Proc. Roy. Soc.*, **173**, 391, 1939.
- [10] BREIDT, HEINE et SCHERRER — *Helv. Phys. Acta*, **16**, 455, 1943.
- [11] KOHLRAUSCH — *Probleme der γ Strahlung* — ed. Friedr. Vieweg & Sohn Akt.=Ges. Braunschweig, 1927.
- [12] POLLARD et DAVIDSON — *Applied Nuclear Physics* — ed. John Wiley & Sons, Inc. New-York, 1942.



ÉTUDE DE LA TRANSMUTATION $RaD \rightarrow RaE$
PAR SPECTROGRAPHIE MAGNÉTIQUE DU RAYONNEMENT β
DE CONVERSION INTERNE *

par CARLOS A. C. BRAGA (PÔRTO)

(Reçu le 4 Novembre 1944)

1. Cette étude a été entreprise dans le but d'éclaircir un doute soulevé par un travail de E. Amaldi et F. Rasetti, publié dans «*La Ricerca scientifica*» XVII, 111, 1939.

En effet, le spectre β de conversion interne de la transmutation $RaD \rightarrow RaE$ a été étudié par spectrographie magnétique par Danysz en 1913, Ellis et Meitner en 1914, Black en 1925 et Curtiss en 1926.

Le spectre obtenu est constitué par un nombre limité de raies (les physiciens ci-dessus mentionnés ont obtenu un total de six raies différentes) produites par groupes de rayons β isocinétiques, dont les énergies, comprises entre 30 et 47 keV, additionnées aux travaux d'extraction des électrons des couches $L_I, L_{II}, L_{III}, M_I, N_I, O$ de l'atome de nombre atomique 83, conduisent à la valeur de l'énergie d'un seul rayonnement γ .

Rasetti et Amaldi, en employant une méthode d'absorption sélective, concluent que, pendant la transmutation $RaD \rightarrow RaE$, il y a émission de, au moins, deux rayonnements γ , dont les intensités sont dans le rapport de 5:1 et dont les longueurs d'onde probables sont respectivement 265 et 290 U. X.

Ces résultats, en contradiction avec les résultats obtenus par les investigateurs déjà mentionnés, montrent l'intérêt qu'il y avait à étudier de nouveau la transformation $RaD \rightarrow RaE$ par les méthodes, plus précises que la méthode d'absorption, de la diffraction cristalline et de la spectrographie magnétique.

M.lle Lidia Salgueiro, de la Faculté des Sciences de Lisbonne, ayant repris l'étude du spectre γ par diffraction cristalline (voir *Portugaliae Physica*, vol. I, pg. 67, 1944) j'ai décidé d'étudier le même problème,

* Cet article est un abrégé de la thèse de Doctorat présentée par l'auteur à la Faculté des Sciences de Porto.

par la méthode de spectrographie magnétique, dans l'espoir d'arriver, par des voies différentes, à la même conclusion.

De la valeur du coefficient de conversion interne dépendait la possibilité d'obtenir, plus ou moins facilement, des résultats par l'application de chacune des méthodes, pour ainsi dire, complémentaires.

2. Dans ce paragraphe je présente un résumé des sujets traités dans les différents chapitres de la thèse.

Dans le premier chapitre—Étude du rayonnement β —j'ai commencé par me référer aux premiers travaux de Henri Becquerel sur la nature et les propriétés des rayons β et à la découverte due à von Baeyer, Hahn et Meitner des groupes homogènes de rayons β émis dans certaines transformations radioactives et je cite, à propos, la phrase suivante de Danysz :

«Le succès de ces expériences est dû très certainement à la constitution de la source radioactive qui, dans toutes les expériences de ces physiciens, est ou bien un fil très fin activé par la radioactivité induite, ou bien une très légère et très fine gouttière que l'on remplit de la substance active ; de cette manière fut évitée la cause des insuccès qui arrêtaient leurs prédécesseurs».

Je donne ensuite une idée de la méthode d'absorption, des méthodes de déviation magnétique, directe et de focalisation, et les notations, formules et valeurs fondamentales adoptées pour arriver aux expressions analytiques de l'énergie W et de la longueur d'onde λ en fonction du produit $H\rho$; dans les trois derniers paragraphes de ce chapitre je mentionne les études de Wooster, Li et Arnoult sur la structure des raies du spectre magnétique, la correction de Hartree due à la non-uniformité du champ, et la précision des mesures.

Dans le deuxième chapitre—Notions fondamentales de photographie—je m'occupe des problèmes concernant l'émulsion photographique, la formation de l'image latente selon les travaux récents de Gurney et de Mott, l'action du révélateur et du fixateur, le noircissement, les lois de Bunsen et Roscoe et Schwarzschild, les courbes de Hurter et Driffield et la façon de mesurer le noircissement avec les microphotomètres enregistreurs ; les deux derniers paragraphes se réfèrent spécialement à l'action photographique des électrons, en profitant des travaux de Ellis, Aston et Arnoult pour tracer la courbe d'activité des électrons en fonction de $H\rho$, et au rendement photochimique donné par les réseaux de courbes tracées par Borries et Knoll.

La deuxième partie de la thèse traite de la «Réalisation pratique du travail. Chapitre III—Sources radioactives. Chapitre IV—Appareil-

lage spectrographique. Chapitre V—Champ magnétique. Chapitre VI—Spectrographie magnétique.

Finalement dans un dernier chapitre j'aborde le problème de la conversion interne et je donne un résumé des résultats expérimentaux, sur le nombre de particules β et γ qui accompagnent la transmutation Ra D \rightarrow Ra E, obtenus par Kikuchi, Gray et O'Leary, Bramson, Stahel et Sizoo, Richardson et Leigh-Smith, Lee et Libby. Je montre l'impossibilité de concilier ces résultats entre eux et avec les calculs théoriques de Hulme, Taylor et Mott, et Fisk.

Le fait que Frilley a trouvé, dans le spectre diffracté du Ra D, au moins 4 raies γ , donne peut-être une possibilité d'explication de certains de ces résultats.

Je montre ensuite l'avantage de poursuivre cette étude de façon à déterminer l'intensité relative des différents rayonnements et la valeur de la chute énergétique entre les niveaux stables du Ra D et du Ra E.

3. Sources radioactives. J'ai préparé des sources de Ra D soit par activation soit par dépôt électrolytique.

a) *Sources linéaires.* Ces sources étaient formées par l'arête d'une lame de nickel, de 0,2 mm d'épaisseur, serrée entre deux lames de verre, carrées, de 2 cm de côté; le dispositif d'activation a été analogue à celui mentionné par Valadares (*Portugaliae Physica*, vol. I, pg. 73, fig. 1).

On disposait de 35 mg de radium et on a activé une source pendant 55 jours et une autre pendant une année; on a mesuré le dépôt actif de Ra D sur l'arête de nickel, avec un compteur Geiger-Muller, par comparaison avec une vieille aiguille de radon étalon.

b) *Sources planes.* Ces sources étaient formées par des lames d'or, de 2 cm \times 2 cm, activées électrolytiquement.

En collaboration avec L. Salgueiro, nous avons procédé à l'extraction et la purification du radium D de vieilles aiguilles de radon; la technique suivie fut, sauf légères différences de détail, celle préconisée et suivie par Irène Curie (*Journal de Chimie Physique*, 22, 471, 1925); nous avons accompagné les différentes phases de l'extraction en mesurant avec un compteur Geiger-Muller l'activité soit des produits purifiés, soit des résidus.

Pour faire l'électrolyse nous avons employé une solution azotique à 7% et une densité de courant de $3 \cdot 10^{-4}$ A/cm².

Le Ra D et le plomb, sous la forme de peroxide, vont se déposer sur la lame anodique pendant que le Ra F (polonium) se dépose à la cathode.

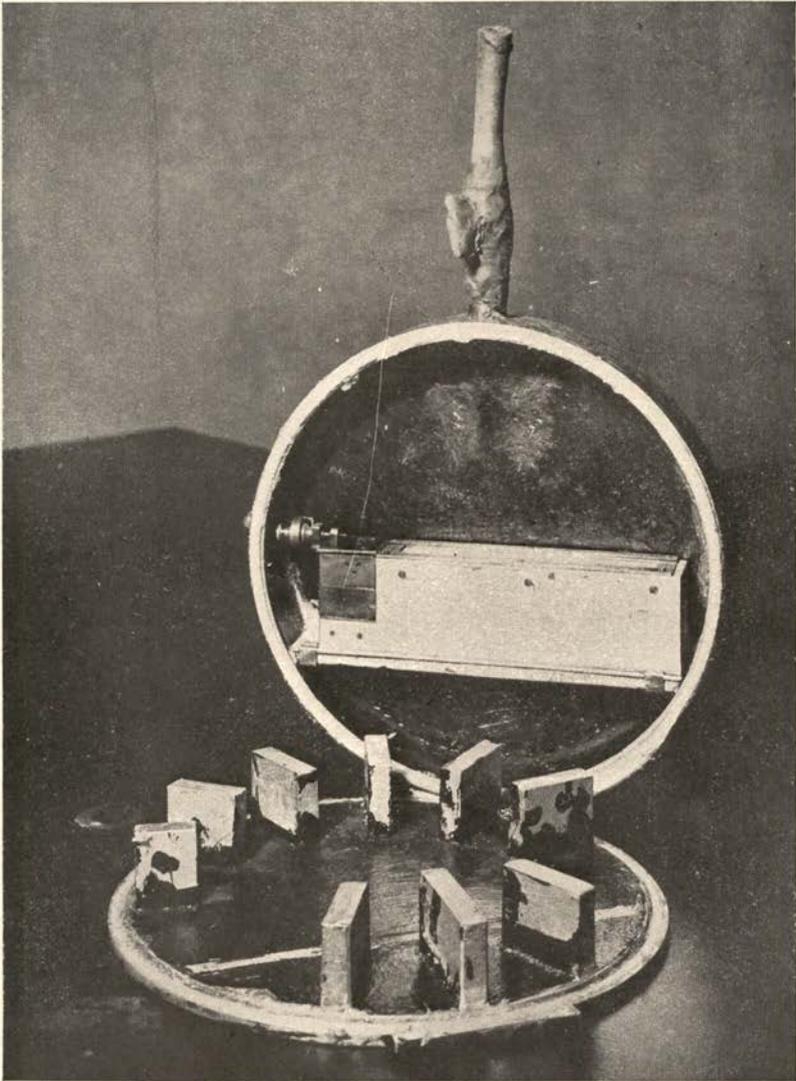
La source plane plus intense avait une activité mesurée de 300 à 400 μC alors que l'activité de la source linéaire la plus forte était seulement de 45 μC .

4. Appareillage spectrographique. J'ai commencé mon travail par l'adaptation d'un électro-aimant destiné originairement à des expériences d'électro-optique. Cet électro-aimant était constitué par deux bobines magnétisantes, d'axe horizontal, montées sur des noyaux, en fer doux, de 78 mm de diamètre extérieur et 180 mm de longueur; les bobines, de diamètres extérieur et intérieur, respectivement, 152 et 79 mm et de 171 mm de longueur, étaient constituées, chacune, par 570 spires de fil de cuivre de 3 mm de diamètre; la résistance des deux bobines, en série, est d'à-peu-près 0,9 ohm.

Le circuit magnétique se ferme à travers une barre de section rectangulaire de 88,5 mm \times 25 mm, appuyée sur des supports, sur laquelle peuvent se déplacer les bobines avec leurs noyaux, ce qui permet une variation de l'entrefer d'à-peu près 100 mm: un jeu de pièces polaires, de formes et dimensions variées, accompagnent l'appareil, mais sont inutiles dans ce cas, à cause de leurs faibles dimensions, les pièces les plus grandes ayant seulement 98 mm de diamètre. Dans ces conditions nous avons commencé par la construction de deux pièces polaires de 300 mm de diamètre et de deux bobines supplémentaires, s'adaptant à celles-là, ayant un nombre de spires croissant régulièrement du centre jusqu'à la périphérie, de façon à créer, dans l'entrefer, un champ uniforme; cette disposition est analogue à celle adoptée par Jean Thibaud (*Annales de Physique*, 5, 73, 1926), qui a ainsi réussi à réduire la variation du champ magnétique de 1,5 \div 2 % jusqu'à 1 \div 2 ‰.

Les deux bobines supplémentaires ont, chacune, 268 spires de fil de cuivre de 3 mm de diamètre; la longueur du fil est à-peu près la même que dans les bobines primitives de façon que la résistance totale des 4 bobines, en série, est de 1,8 ohm.

J'ai aussi construit deux spectrographes, un, pour sources linéaires, visible, sur la planche I, et l'autre pour sources planes, différant du premier seulement par la position du porte-pellicule; les parois de la boîte porte-fente sont 4 pièces de plomb avec une épaisseur minimum de 8 mm, taillées de façon à absorber le rayonnement secondaire et s'adaptant parfaitement à la base de la boîte; sur ces 4 pièces s'adapte le couvercle porte-fente; la largeur de la fente est réglée par une vis micrométrique avec un tambour divisé en centièmes de millimètre. Aux extrémités des porte-pellicules, on a mis des fentes permettant d'impressionner, au préalable, les pellicules par un coup de lumière, produisant



deux repères que facilitent les mesures de distance entre la fente et les différentes raies.

La distance entre les deux repères est à-peu-près la même dans les deux spectrographes, environ 17,5 cm, tandis que la largeur utile de la pellicule est de 2 cm.

Nous avons eu, également, besoin de construire deux chambres à vide. La première, en tôle d'aluminium de 2,2 mm d'épaisseur, a une hauteur de 242 mm et 61 mm de largeur. L'entrée du spectrographe se fait par une porte rectangulaire de 45 mm × 84 mm.

La deuxième, parfaitement visible sur la planche I, est une boîte d'aluminium fondu de 30 cm de diamètre. Le corps de la boîte a, dans son tiers inférieure, une plateforme, venue de fonte, sur laquelle s'adapte l'un ou l'autre des spectrographes. Le couvercle, de 30 cm de diamètre et 9 mm d'épaisseur, a des nervures dont le but est non seulement de renforcer contre la déformation produite par le vide à l'intérieur de la boîte mais aussi de servir de piège aux électrons insuffisamment déviés par le champ magnétique. Un joint en cordon de caoutchouc de 5 mm, avec un diamètre de 290 mm, assure l'étanchéité; bien que le périmètre de ce joint soit beaucoup plus grand que celui du couvercle de l'ouverture rectangulaire de l'autre spectrographe, le vide se maintient beaucoup mieux dans ce deuxième spectrographe.

L'étanchéité des deux chambres s'améliora considérablement en les vernissant au «Glyptal» de la «Central Scientific Company».

Pour produire le vide nous avons utilisé un groupe Metropolitan Vickers avec moteur, pompe à vide préliminaire et pompe à vide élevé, à huile d'Apiezon. Pour mesurer le vide nous avons employé des «Pirani» construits et étalonnés avec un manomètre Mc-Leod.

5. Champ magnétique. Pour créer le courant destiné à maintenir le champ magnétique j'ai utilisé deux batteries de 130 ampère-heures.

L'étude du champ fut faite en déterminant sa variation avec l'entrefer et l'intensité du courant et, pour des valeurs déterminées de ces deux grandeurs, avec le point considéré, de façon à connaître ce qu'on appelle habituellement la «topographie» du champ; on a vérifié aussi la non-influence, sur la valeur du champ, du matériel soit de la chambre à vide soit du spectrographe. Cet étude fut faite presque exclusivement avec un fluxmètre système Grassot, bien que nous ayons aussi utilisé une balance de Cotton pour vérifier certaines mesures faites avec le fluxmètre.

La sensibilité de la bobine d'exploitation qui accompagnait le fluxmètre étant insuffisante, j'ai construit deux bobines avec des sensibilités respectivement 10 et 100 fois plus grandes.

6. Spectrographie magnétique. Bien que nous ayons essayé d'autres pellicules, la plupart des expériences furent réalisées avec pellicule Ilford, X-Ray Film.

Nous avons fait 75 spectrographies avec un total de 3600 heures de pose; nous avons rencontré de grosses difficultés, au début, à cause du mauvais vide et, toujours, à cause de la faiblesse des sources obligeant à des poses trop longues.

Les premières expériences donnant des résultats positifs furent réalisées avec la source plane; on a obtenu les 3 raies principales du spectre de conversion interne du rayonnement γ d'à-peu près 47 keV. Des expériences faites ensuite avec la source linéaire, nous reproduisons ici seulement les valeurs relatifs à la pellicule reproduite dans la planche I qui a été microphotométrée.

Pellicule n.° 69. Temps de pose-187 heures. $I=0,7$ A. $H=113,5$ Oe :

$\rho_1=5,23$ cm	$H_{\rho_1}=594$	$W_1=30,11$	$L_1=16,38$	$W_1+L_1=46,49$ keV
$\rho_2=5,318$	$H_{\rho_2}=604$	$W_2=31,14$	$L_{II}=15,70$	$W_2+L_{II}=46,84$
$\rho_3=5,454$	$H_{\rho_3}=620$	$W_3=32,76$	$L_{III}=13,41$	$W_3+L_{III}=46,17$
$\rho_4=6,26$	$H_{\rho_4}=711$	$W_4=42,60$	$M_I=4,00$	$W_4+M_I=46,60$
$\rho_5=6,465$	$H_{\rho_5}=734$	$W_5=45,41$	$N_I=0,95$	$W_5+N_I=46,36$

énergie moyenne=46,49 keV

À cette énergie de la radiation γ , qui donne par conversion interne les 5 raies du spectre β , correspond une longueur d'onde

$$\lambda = \frac{12385,5}{46,49} = 266,4 \cdot 10^{-11} \text{ cm} = 266 \text{ U. X.}$$

Ces résultats sont en complet accord avec les résultats obtenus antérieurement par spectrographie magnétique comme le montrent les tableaux I et II.

TABLEAU I

Mesures de :	DANYSZ	ELLIS	MEITNER	BLACK	CURTISS	BRAGA
Année de :	1913	1922	1922	1925	1926	1943
H_{ρ_1}	602	600	602	600	594,3	594
H_{ρ_2}	607	605	—	606	600,3	604
H_{ρ_3}	—	628	—	—	—	620
H_{ρ_4}	718	717	718	714	709,1	711
H_{ρ_5}	743	742	741	738	735,2	734
H_{ρ_6}	—	—	—	—	742,5	—

TABLEAU II

Mesures de :	DANYSZ	ELLIS	MEITNER	BLACK	CURTISS	BRAGA
Longueur d'onde en U. X.	261	263	262	263	266	266

7. Le rayonnement γ de 290 U. X., trouvé par les mesures d'absorption sélective, a une énergie comprise entre les valeurs du travail d'extraction du niveau K du praséodyme et du néodyme, c'est-à-dire, entre 41,83 et 43,38 keV. Les électrons de conversion interne de ce rayonnement dans le niveau L_1 auront une énergie de 25,5 à 27 keV.

L'activité photographique de ces électrons, pour l'émulsion Ilford-X, est 91,7 % de l'activité des électrons de conversion, dans le même niveau, du rayonnement γ de 266 U. X.

Nous avons vérifié que 24 heures de pose étaient suffisantes pour obtenir, en employant notre source linéaire, les deux raies L_1 et M_1 de conversion interne du rayonnement de 266 U. X., de façon que, avec le même nombre d'électrons de conversion du rayonnement de 290 U. X., on devait obtenir ces raies, avec la même intensité, après 26,2 heures ; comme nous avons fait des poses de 330 heures, sans les trouver, nous concluons que leur nombre est inférieur à $\frac{26,2}{330} \times 100 = 8\%$ de ceux-là.

Comme la valeur du coefficient de conversion interne pour le rayonnement de 290 U. X. ne doit pas être inférieure à la valeur correspondante du rayonnement de 266 U. X. nous croyons pouvoir affirmer que l'intensité du rayonnement de 290 U. X. est inférieure à 8 % de l'intensité du rayonnement de 266 U. X. Tandis que Rasetti et Amaldi indiquaient 20 %, L. Salgueiro, dans l'article cité, a affirmé que sa valeur devrait être inférieure à 10 % ; finalement nous savons, maintenant, que Frilley a trouvé, par spectrographie cristalline, un rayonnement de 288 ± 2 U. X., mais avec une intensité inférieure à 5 % de l'intensité du rayonnement de 266 U. X. ; cela veut dire que nos résultats s'accordent assez bien avec les résultats obtenus par L. Salgueiro et Frilley pour pouvoir affirmer que l'intensité du rayonnement de 290 U. X. est plus faible que celle déterminée par Rasetti et Amaldi.

J'ai effectué ce travail au Laboratoire de Physique de la Faculté des Sciences de Lisbonne, d'Août 1942 à fin 1943, en qualité de boursier de l'*Instituto para a Alta Cultura*.



RADIOACTIVITÉ NATURELLE PAR ÉMISSION DE NEUTRONS

par MARIETA DA SILVEIRA (À LISBONNE)

(Reçu le 13 Mai 1945)

Introduction. Au cours d'une série d'expériences réalisées dans le but d'étudier, par la méthode d'absorption, le rayonnement γ émis par les descendants immédiats de l'uranium I, et dont les résultats ont été déjà publiés [1], nous avons signalé l'existence d'un nouveau type de rayonnement naturel, dont les propriétés suggéraient qu'il s'agissait de neutrons.

En effet, au cours de l'exécution de ces expériences et dans le but d'éliminer tout le rayonnement β émis par la source (préparation d'oxyde d'uranium), nous avons interposé, entre celle-ci et les écrans absorbants, une lame de paraffine d'épaisseur (1,2 cm) suffisante pour absorber tout ce rayonnement β .

Dans nos premiers essais, nous avons employé la lame de paraffine seulement dans les cas où les épaisseurs de l'absorbant étaient très petites; dès que celui-ci avait une épaisseur suffisante pour absorber à lui seul tout le rayonnement β , on éliminait la paraffine, dont l'emploi, croyions nous, devenait alors inutile.

Cependant, nous avons vérifié que les mesures d'absorption, réalisées avec ou sans paraffine, ne conduisaient pas aux mêmes résultats, et c'est pourquoi nous avons décidé de faire toutes les mesures d'absorption du rayonnement γ , en employant toujours de la paraffine entre la source et les écrans absorbants, indépendamment de leur épaisseur. Une fois cette précaution prise, nous avons obtenu des résultats toujours comparables pour la longueur d'onde des rayons γ [1].

À première vue, on pouvait supposer que les différences des résultats obtenus, avec ou sans paraffine, provenaient d'un rayonnement secondaire excité dans le plomb par le rayonnement β de la source, quand il n'y avait pas de paraffine. Cette hypothèse a dû être abandonnée car on n'obtenait aucun changement quand on plaçait l'écran de paraffine après les écrans de plomb, dans l'espoir d'absorber cet éventuel rayonnement secondaire.

Nous avons alors décidé d'entreprendre des recherches dans le but d'éclaircir cette question.

Tout d'abord, on a recouvert la source d'une épaisseur de plomb suffisante pour l'absorption de tout le rayonnement α , β et γ mou. On devait alors avoir, d'après notre travail antérieur, seulement un rayonnement γ de longueur d'onde de 15 U. X. En étudiant l'absorption massique du rayonnement de la source, ainsi filtré, dans le plomb et dans la paraffine, nous avons reconnu, qu'à masse superficielle égale, et pour les petites épaisseurs d'absorbants, l'absorption était plus grande dans la paraffine que dans le plomb. À partir d'une certaine valeur de l'épaisseur, la paraffine ne produisait plus d'absorption, cependant l'absorption dans le plomb se comportait régulièrement, indiquant toujours le rayonnement γ de 15 U. X. de longueur d'onde.

Ces résultats nous ont fait penser que le rayonnement de la source, filtré seulement à travers le plomb, était complexe. Un des composants était le rayonnement γ déjà connu et l'autre serait un rayonnement qui était plus absorbé par la paraffine que par le plomb. Ce rayonnement était totalement absorbé dans une couche de paraffine de masse superficielle inférieure à 1 g/cm^2 . Après un tel absorbant on n'avait que le rayonnement γ cité, pour lequel la paraffine n'a qu'un très petit coefficient d'absorption.

La propriété trouvée pour les coefficients d'absorption, dans le plomb et dans la paraffine, du rayonnement nouveau nous a conduit à supposer qu'il s'agissait d'une émission spontanée de neutrons pour la source d'oxyde d'uranium.

Pour vérifier cette hypothèse, nous avons réalisé la série d'expériences que nous exposons ensuite.

Dans ces expériences, nous avons employé toujours, pour détecter le rayonnement, un compteur de Geiger-Müller, rempli d'un mélange d'air et de vapeur d'alcool, à proportions égales et à la pression de 5 cm de mercure. Les détails de l'installation ont déjà été publiés [1].

Il est facile d'expliquer qu'un tel compteur puisse détecter des neutrons, puisque l'alcool, étant une substance hydrogénée, les neutrons provoqueront la projection des noyaux de l'hydrogène; et d'autre part, les neutrons sont aussi capables de provoquer les transmutations des atomes de l'azote et de l'oxygène (constituants de l'air) en émettant dans ce cas des particules α .

Résultats expérimentaux. Une première série d'expériences a été réalisée, en employant une source d'oxyde d'uranium. Cette source était placée à 10 cm du compteur et le rayonnement émis était toujours filtré

à travers 3 mm de plomb. Nous avons mesuré l'absorption du rayonnement résiduel, en employant cette fois des écrans de paraffine de plusieurs épaisseurs, et, ensuite, un écran de plomb, dont la masse superficielle était équivalente à la plus grande épaisseur de paraffine employée. Les nombres d'impulsions enregistrées, par minute, dans chacune des expériences, sont indiqués dans le tableau I.

TABLEAU I

Conditions d'expérience	Masse superficielle de l'absorbant (g/cm ²)	Nombre des impulsions par minute
Source de U ₃ O ₈ + filtre	—	68 ± 2
Source de U ₃ O ₈ + filtre + paraffine	0,4	57 ± 2
	0,63	55 ± 2
	1,3	55 ± 2
Source de U ₃ O ₈ + paraffine + filtre	1,3	55 ± 2
Source de U ₃ O ₈ + filtre + plomb	1,3	60 ± 2

Les résultats indiqués dans la dernière colonne, déjà corrigés du fond continu du compteur, correspondent à des moyennes de plusieurs mesures, ayant chacune une durée de 40 minutes au moins; on donne aussi la fluctuation probable de la mesure.

Le résultat, mentionné dans l'avant dernière ligne de ce tableau, nous donne le nombre des impulsions enregistrées dans le cas où l'écran de paraffine, le plus épais, était placé directement sur la source, c'est à dire, avant le filtre de plomb. Nous avons fait cet essai pour vérifier qu'il ne s'agissait pas d'un rayonnement secondaire dû à l'action, sur le filtre de plomb, des rayonnements déjà connus de la source. D'après les résultats obtenus, on voit tout de suite que cette hypothèse n'est pas à retenir, puisque l'absorption réalisée par la paraffine a la même valeur, quelle que soit la position de l'absorbant, avant ou après le filtre de plomb.

En outre, les résultats mentionnés ont confirmé une fois de plus l'existence d'un rayonnement qui est plus fortement absorbé, à masse superficielle égale, par la paraffine que par le plomb (comme cela aurait lieu pour des neutrons), et montrent qu'il suffit d'une épaisseur de paraffine de 0,63 g/cm² pour l'absorber totalement.

Comme le bore est un des éléments légers qui présente une des plus grandes sections efficaces pour la capture des neutrons lents, nous avons tâché de mesurer l'absorption du rayonnement de type neutronique à

travers un composé, contenant cet élément. Ainsi, nous avons essayé le borate de sodium sous la forme de couches très minces et presque homogènes, que nous avons préparées, en tamisant plusieurs fois le sel, après l'avoir réduit à une poudre très fine. Nous avons fait d'autres essais, dans les mêmes conditions, mais en remplaçant le borate par le carbonate de sodium. La composition de ces deux sels diffère seulement par les éléments bore et carbone, et, malgré la proximité de leurs numéros atomiques (5 et 6), la section efficace [2] de l'atome du carbone pour la capture des neutrons lents ($4,1 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$) est très petite, presque négligeable, par rapport à la valeur de celle du bore ($360 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$). On pouvait donc prévoir, a priori, que, si le rayonnement analysé était effectivement constitué par des neutrons, l'absorption dans le borate devrait être bien plus grande que dans le carbonate, et que, par contre, si nous avions affaire à quelqu'autre type de rayonnement, les absorptions dans le borate et dans le carbonate devraient être à peu près les mêmes.

Le tableau II contient les résultats que nous avons obtenus dans ces expériences.

TABLEAU II

Conditions d'expérience	Masse superficielle de l'absorbant (g/cm^2)	Nombre des impulsions par minute
Source de U_3O_8 + filtre	—	68 ± 2
Source de U_3O_8 + filtre + plomb	1, 3	60 ± 2
Source de U_3O_8 + filtre + $\text{B}_4\text{O}_7 \cdot \text{Na}_2$	0, 04	62 ± 2
	0, 08	57 ± 2
	0, 12	55 ± 2
	0, 16	55 ± 2
	0, 20	55 ± 2
Source de U_3O_8 + filtre + $\text{CO}_3 \cdot \text{Na}_2$	0, 16	66 ± 2

En examinant ces résultats, on voit qu'en effet l'absorption réalisée par le carbonate de sodium est parfaitement négligeable, puisque le nombre des impulsions enregistrées dans ce cas tombe dans l'intervalle des fluctuations probables de la mesure faite en absence de tout absorbant. Au contraire, l'absorption réalisée par le borate de sodium est très importante, et il suffit une masse superficielle de $0,12 \text{ g/cm}^2$ du sel.

pour absorber totalement le rayonnement en question. On doit encore remarquer que cette absorption est plus importante que celle qui est réalisée par une masse superficielle de plomb dix fois plus grande.

En comparant les résultats contenus dans les tableaux I et II, on voit aussi que la masse superficielle nécessaire pour absorber totalement le rayonnement est plus grande dans le cas de la paraffine ($0,63 \text{ g/cm}^2$), que dans le cas du borate de sodium ($0,12 \text{ g/cm}^2$). C'est ce qu'on devait attendre dans le cas d'un rayonnement constitué par des neutrons, d'après les valeurs des sections efficaces de capture des neutrons lents [2] ($35 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$ pour l'hydrogène et $360 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$ pour le bore), et des proportions de l'hydrogène dans la paraffine et du bore dans le borate.

Pour nous assurer que les résultats de toutes ces expériences n'étaient pas dus à quelque défaut de l'installation détectrice, nous avons, dans une deuxième série d'expériences, répété tous les essais, dans les mêmes conditions, mais en employant comme source radioactive une préparation de chlorure de baryum radifère.

Les résultats obtenus dans cette série d'expériences sont indiqués dans le tableau III.

TABLEAU III

Conditions d'expérience	Masse superficielle de l'absorbant (g/cm^2)	Nombre des impulsions par minute
Source de $\text{Cl}_2 \text{ Ba}$ radifère + filtre	—	70 ± 2
Source de $\text{Cl}_2 \text{ Ba}$ radifère + filtre + plomb	1,3	60 ± 2
Source de $\text{Cl}_2 \text{ Ba}$ radifère + filtre + paraffine	1,3	66 ± 2
Source de $\text{Cl}_2 \text{ Ba}$ radifère + filtre + $\text{B}_4 \text{O}_7 \text{ Na}_2$	0,16	67 ± 2
Source de $\text{Cl}_2 \text{ Ba}$ radifère + filtre + $\text{CO}_3 \text{ Na}_2$	0,16	68 ± 2

D'après ces résultats, nous pouvons conclure tout de suite que le comportement de la paraffine et du borate de sodium vis-à-vis les rayonnements émis par la source de chlorure de baryum radifère est tout à fait différent de ce qui avait lieu quand la source employée était l'oxyde d'uranium. En effet, l'absorption maintenant réalisée est très petite, presque négligeable, comme il fallait s'y attendre dans tous les cas où il y aurait seulement des rayonnements γ pénétrants.

La source d'oxyde d'uranium contient U_I , U_{II} , AcU , UX_I , UY , UX_2 et UZ , en équilibre radioactif. L'émission naturelle de neutrons qui nous avons signalée provient donc d'un ou de plusieurs de ces éléments.

Pour tâcher de déterminer son origine, nous avons, dans une troisième série d'expériences, répété toutes les mesures d'absorption, en employant cette fois une source de UX complexe. Cette source a été obtenue, en faisant l'extraction de l'UX₁ (et de son isotope UY) contenu dans 500 g de nitrate d'uranyle, par entraînement avec le fluorure de cérium. Comme les périodes des éléments UX₂ et UZ sont, respectivement, 1,14 minutes et 6,7 heures, ces éléments prennent naissance et atteignent l'équilibre radioactif très rapidement, et ainsi, dans la source d'UX, on a effectivement, UX₁, UY, UX₂ et UZ, en équilibre radioactif.

Les résultats des mesures d'absorption réalisées avec cette source sont indiqués dans le tableau IV.

TABLEAU IV

Conditions d'expérience	Masse superficielle de l'absorbant (g/cm ²)	Nombre des impulsions par minute
Source d'UX + filtre	—	119 ± 2
Source d'UX + filtre + plomb	1, 3	98 ± 2
Source d'UX + filtre + paraffine	0, 50	106 ± 2
	0, 92	101 ± 2
	1, 20	98 ± 2
	1, 41	95 ± 2
	1, 63	95 ± 2
	1, 80	95 ± 2
	Source d'UX + filtre + B ₄ O ₇ Na ₂	0, 16
0, 20		105 ± 2
0, 24		100 ± 2
0, 28		94 ± 2
0, 32		93 ± 2
0, 36		94 ± 2
Source d'UX + filtre + CO ₃ Na ₂	0, 28	111 ± 2

D'après ces résultats, nous pouvons conclure que le phénomène d'émission naturelle de neutrons se produit encore avec la source d'UX.

Ceci montre que, tout au moins la plus grande partie des neutrons observés avec la source d'oxyde d'uranium provient d'un des quatre éléments qui constituent la source d'UX.

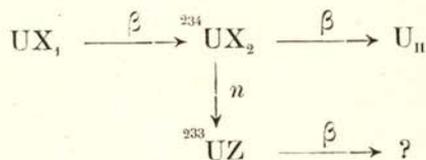
Un examen attentif de ces résultats montre aussi que l'énergie des neutrons est, dans ce dernier cas, un peu plus grande que dans le cas de la source d'oxyde d'uranium, puisque, pour absorber totalement le rayonnement il a fallu employer maintenant des masses superficielles d'absorbants (0,28 g/cm² de borate de sodium et 1,40 g/cm² de paraffine) plus grandes qu'antérieurement. Cela peut s'expliquer, car la masse d'oxyde d'uranium était très grande et pouvait donc elle-même provoquer un ralentissement des neutrons, dû surtout à l'oxygène. Dans la source d'UX, où la masse du précipité actif est très petite, ce ralentissement n'est pas à craindre.

Conclusions. Les expériences décrites montrent donc qu'il y a une émission de neutrons par un des quatre éléments UX₁, UX₂, UZ ou UY.

La période de l'UY est de 24,6 heures, et comme l'émission signalée se poursuit avec la même intensité pendant plusieurs jours, on peut conclure qu'elle ne provient pas de cet élément. Alors trois éléments (UX₁, UX₂ ou UZ) restent donc seulement en cause.

Une émission d'un neutron par l'UX₁ conduirait à un isotope de cet élément qui n'a jamais été signalé.

L'hypothèse, la plus vraisemblable, sur l'origine des neutrons nous semble être d'admettre que c'est l'élément UX₂ qui en est le responsable. Cet élément peut se désintégrer, soit par émission d'un rayon β pour donner l'U_{II}, soit par émission d'un neutron, comme le montre le schéma suivant :



Cette dernière émission conduirait à l'UZ qui serait donc un isotope de l'UX₂, mais non un isomère.

L'hypothèse généralement admise de l'isomerie nucléaire des deux éléments UX₂ et UZ (le seul cas connu d'isomerie dans les radioéléments naturels) devrait donc être abandonnée. L'UZ serait un isotope de l'UX₂ de nombre de masse 233 qui, par émission β conduirait à un isotope de l'U_{II} de même nombre de masse. Cet isotope est inconnu, mais aucun fait connu ne s'oppose à son existence. D'ailleurs s'il

existe, ce ne serait qu'en petites proportions (le rapport UZ/UX_2 est de $1:665 \pm 65$ d'après Feather et Bretscher [3]), ce qui expliquerait qu'on ait pas encore réussi à le mettre en évidence. Son existence pourrait justifier peut-être le désaccord des résultats des différents auteurs qui ont mesuré les parcours des particules α de l' U_{11} .

Il est aussi à remarquer que l' U_{11} est un des rares radioéléments qui n'obéit pas à la relation de Geiger-Nuttall, entre la période et le parcours des particules α émises.

L'hypothèse inverse d'une émission de neutrons par l' UZ , conduisant à l' UX_2 , qui aurait le nombre de masse 233, est à repousser, puisque la quantité d' UX_2 en équilibre avec l' UX_1 montre qu'il est un descendant direct de l' UX_1 .

Ces raisons semblent justifier l'hypothèse présentée plus haut, tout au moins comme hypothèse de travail.

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique de la Faculté des Sciences de Lisbonne. Je tiens à remercier M. Le Professeur A. Cyrillo Soares, Directeur du Laboratoire, de l'intérêt qu'il a toujours apporté à ces recherches et des moyens qu'il a mis à ma disposition. Je remercie aussi MM. M. Valadares et A. Marques da Silva qui m'ont beaucoup aidé de leurs conseils, pendant l'exécution de ce travail.

Je remercie «l'Instituto para a Alta Cultura» qui m'a accordé une bourse pour la réalisation de cette recherche.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] MARIETA DA SILVEIRA — *Portugalia Physica*, 1, 151, 1944.
- [2] DUNNING, PEGRAM, FINK et MITCHELL — *Phys. Rev.*, 48, 265, 1935.
- [3] FEATHER et BRETSCHER — *Proc. Roy. Soc.*, 165, 530, 1938.

SUR L'ABSORPTION DU RAYONNEMENT γ ÉMIS PAR L'UX COMPLEXE

par MARIETA DA SILVEIRA (À LISBONNE)

(Reçu le 28 Juin 1945)

Nous avons réalisé une série de déterminations, dont les résultats ont été déjà publiés [1], sur l'absorption du rayonnement γ émis par les descendants immédiats de l'uranium en employant une source d'oxyde d'uranium. Maintenant, nous avons répété toutes les mesures d'absorption, mais en employant cette fois une source d'UX complexe. Cette source a été obtenue à partir du nitrate d'uranyle, en faisant l'extraction de l'UX par entraînement avec le fluorure de cérium.

Pendant ces mesures, les conditions expérimentales ont été rigoureusement les mêmes qu'auparavant; et on a fait l'étude de l'absorption, dans le plomb et dans l'aluminium, du rayonnement γ émis par la source.

Les valeurs qui nous avons trouvées, pour les coefficients massiques d'absorption du rayonnement γ pénétrant émis par l'UX sont, respectivement :

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{Pb} = 0,085 \text{ cm}^2/\text{g}$$

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_A = 0,064 \text{ cm}^2/\text{g}$$

À ces valeurs correspond, d'après les tables de Pollard et Davidson [2] un rayonnement γ , dont la longueur d'onde est à peu près 15 U. X.

Ce résultat vient donc confirmer nos premières déterminations, réalisées avec la source d'oxyde d'uranium, et nous permet d'affirmer, une fois de plus, que la longueur d'onde du rayonnement γ pénétrant émis par l'UX complexe en a, effectivement, la valeur de 15 U. X., qui est en bon accord avec tous les résultats obtenus par spectrographie magnétique, mais en désaccord avec la plus grande partie des résultats

obtenus par absorption, comme on peut voir d'après les valeurs indiquées dans le tableau suivant.

Méthode	λ (U. X.)	Auteurs *
Spectrographie magnétique	15,4	Meitner
	14,9	
	14,7	
	15,4	Marshall
	15,8	Breidt, Heine et Scherrer
	15,4	
15,0		
Absorption	11,0	Soddy et Russel
	9,0	Richardson
	11,1	Hahn et Meitner
	13,1	Stahel et Coumou
	7,3	Sizoo et Coumou
	19,8	

Nous pensons que, au présent, on peut expliquer le désaccord des résultats des différents auteurs qui ont étudié, par la méthode d'absorption, l'énergie du rayonnement γ pénétrant émis par une source d'UX, en considérant que cette source est un émetteur naturel de neutrons, comme nous venons de le signaler récemment [3].

La valeur, qui nous avons déterminée pour l'énergie du rayonnement γ pénétrant de l'UX est en bon accord avec les résultats obtenus par la méthode de spectrographie magnétique, parce que nous avons eu le soin d'éliminer complètement les neutrons de la source, en filtrant le rayonnement complexe à travers une épaisseur convenable de paraffine. Par contre, les auteurs qui ont travaillé, avant nous, par la méthode d'absorption, ont obtenu des résultats plus ou moins influencés par l'existence des neutrons, selon que le dispositif expérimental employé pour la détection du rayonnement γ était lui-même plus ou moins sensible à ces neutrons.

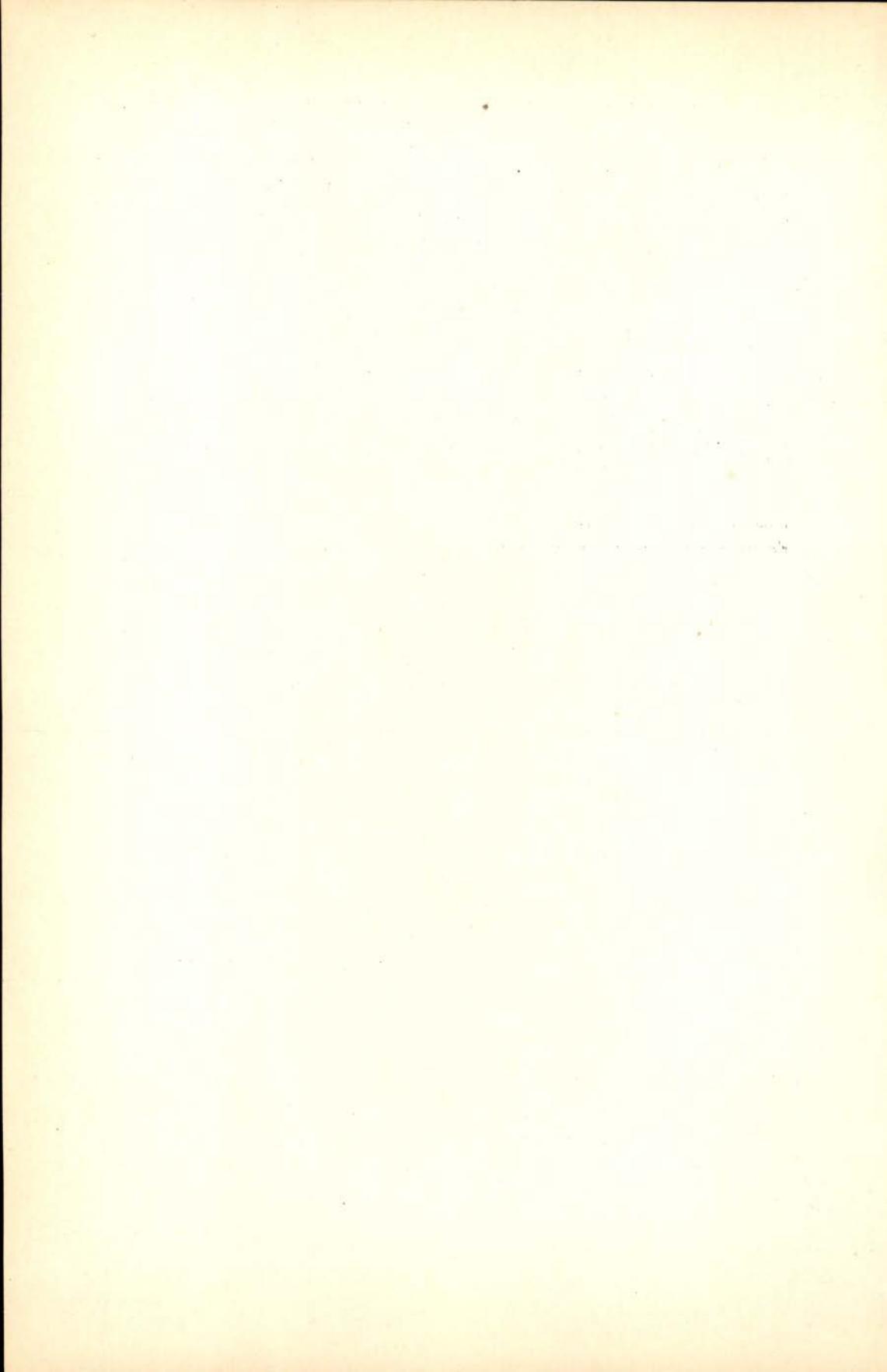
* Pour les indications bibliographiques nous prions le lecteur de se rapporter à notre première note [1].

Quand on employait la méthode de spectrographie magnétique, les neutrons ne pouvaient avoir aucune influence et c'est pourquoi les auteurs qui ont employé cette méthode ont obtenu toujours, pour l'énergie du rayonnement γ , la vraie valeur.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] MARIETA DA SILVEIRA — *Portugaliae Physica*, 1, 151, 1944.
- [2] POLLARD et DAVIDSON — *Applied Nuclear Physics* — ed. John Wiley & Sons, Inc. New-York, 1942.
- [3] MARIETA DA SILVEIRA — *Portugaliae Physica*, 1, 167, 1945.

LABORATOIRE DE PHYSIQUE
FACULTÉ DES SCIENCES DE LISBONNE



MÉCANIQUE ALÉATOIRE

par G. DEDEBANT et PH. WEHRLÉ (à Paris)

1^{ÈRE} PARTIE — LE CALCUL ALÉATOIRE

(Suite) (Reçu le 13 Mars 1945)

NOTE — Dans le volume 1 (1944) — Fasc. 3 — P. 95-150, de cette Revue, nous avons publié la première partie d'un mémoire sur la «Mécanique Aléatoire».

Avant de passer à la seconde partie, nous présentons ici :

- 1.^o) quelques errata, d'ailleurs de peu d'importance, relatifs au texte déjà paru et rectifiant des fautes typographiques.
- 2.^o) trois annexes contenant des développements mathématiques intéressants, mais que nous avons d'abord estimé pouvoir passer sous silence, dans un exposé condensé qui s'adressait surtout aux Physiciens.

ERRATA

(au texte du Vol. 1, fasc. 3, p. 95-150)

- Page 95, ligne 2: supprimer la (,) après «l'idée statistique».
- Page 95, ligne 4: après «W. Gibbs», remplacer (:) par (,).
- Page 97, ligne 18: après «Ne nous y trompons pas» remplacer (,) par (:).
- Page 98, ligne 14: au lieu de «aaleur» lire «valeur».
- Page 100, dernière ligne: au lieu de «suffisantep our» lire «suffisante pour».
- Page 102, ligne 13: au lieu de «molécules différents» lire «molécules différentes».
- Page 108, au bas de la page: remplacer partout $r(t+h, t+k)$ par $r(t+h, t+h+k)$.
- Page 111, ligne 3: au lieu de «orde» lire «ordre».
- Page 114, lignes 4 et 5: remplacer \dot{X}/t par \ddot{X}/t et X/t par \dot{X}/t .
- Page 116, ligne 24: au lieu de $S_n^2 \leq S_{n-1} S_{n-1}$ lire $S_n^2 \leq S_{n-1} S_{n+1}$.
- Page 117, ligne 10: au lieu de $r(h) = \sum_0^{\infty} a_n \cos n\omega$ lire $r(h) = \sum_0^{\infty} a_n \cos n\omega h$.

Page 117, ligne 20: placer une (,) après «le plus général».

Page 119, dernière ligne: au lieu de $\dot{U}_z \dot{U}^x$, lire $\dot{U}_z \dot{U}_x$.

Page 120, ligne 16: au lieu de «dérivés», lire «dérivées».

Page 136, dernière ligne: au lieu de $\frac{\omega^1 x^2 + u^2}{2}$, lire $\frac{\omega^2 x^2 + u^2}{2}$.

Page 137, ligne 18: au lieu de $\frac{\omega^2 x^2 + u^2}{2}$, lire $\frac{\omega^2 x^2 + u^2}{2}$.

Page 139, ligne 21: au lieu de $(\sin^2 \omega (t_2 - t_1))$, lire $\sin^2 \omega (t_2 - t_1)$.

Page 148, ligne 16: au lieu de «léatoire» lire «alcatoire».

ANNEXE I

Sur la condition de dérivabilité aléatoire

1. Une condition *nécessaire* de dérivabilité aléatoire est que $r(t, h)$ étant le coefficient de corrélation entre deux valeurs X/t et $X/t+h$, de la fonction aléatoire X/t — le rapport

$$\frac{1-r(t, t+h)}{h^2}$$

tende vers une limite, lorsque $h \rightarrow 0$ (condition I). Cela entraîne que :

$$\frac{1-r(t, t+h)}{h^2} = \lambda + \varphi(h),$$

λ et $\varphi(h)$, dépendant de t , et $\varphi(h)$ s'annulant avec h .

La condition *nécessaire et suffisante* est qu'il existe un nombre aléatoire \dot{X} , tel que :

$$\overline{(U/h - \dot{X})^2}$$

tende vers zéro avec h , U/h désignant le rapport incrémentiel :

$$\frac{X/t+h - X/t}{h} \quad (\text{condition II})$$

Comme on ne connaît pas d'avance la dérivée, on doit utiliser un critère semblable à la règle de convergence mutuelle que *Cauchy* a employée pour décider de la convergence d'une suite, sans en connaître d'avance la limite. Ce critère est le suivant :

Il faut et il suffit que :

$$\overline{(U/h - U/k)^2}$$

tende vers zéro, lorsque h et k tendent vers zéro, *chacun pour leur compte*.

On peut toujours supposer $|k| \geq |h|$. Or :

$$\overline{(U/h - U/k)^2} = \overline{U^2/h} + \overline{U^2/k} - 2 \overline{U/h U/k}.$$

La condition cherchée se réduit donc à ce que :

$\overline{U/h U/k}$ tende vers $\overline{U^2/0} = S^2$, quand h et k tendent vers 0.

L'on a :

$$\overline{U/h U/k} = \frac{1}{hk} [S(t+h)S(t+k)r(t+h, t+k) - S(t)S(t+h)r(t, t+h) - S(t)S(t+k)r(t, t+k) + S^2(t)],$$

$S(t)$ désignant l'écart type de U à l'instant t .

Supposons $S(t+h)$ développable en série de Taylor jusqu'au second ordre.

On trouve, à des infiniment petits près, que la condition pour que X/t soit dérivable se réduit à :

$$\lim_{h \rightarrow 0} A = \frac{k}{h} [\varphi(k) - \varphi(k-h)] = 0$$

Cette condition n'est pas automatiquement réalisée, car si $\varphi(k)$ et $\varphi(k-h)$ tendent bien vers zéro, on ne peut rien dire du rapport $x = \frac{h}{k}$, sinon qu'il reste compris entre -1 et $+1$.

Notons tout de suite que la valeur $+1$ n'est prise par x que pour $h=k=0$ et $\lim \frac{h}{k} = 1$. En ce cas, la condition est toujours vérifiée.

Nous pourrions donc supposer dorénavant que x ne prend jamais la valeur $+1$.

2. Nous allons montrer que la condition suivante est *suffisante* pour conclure à la dérivabilité :

Théorème — Si la fonction $\varphi(h)$ est de la forme :

$$\varphi(h) = \frac{1}{h} \mu(h),$$

$\mu(h)$ étant telle que, pour $h=0$:

- a) elle soit continue et que $\mu(0)=0$;
- b) elle admette une dérivée première continue et que $\mu'(0)=0$; alors la fonction aléatoire X/t est dérivable.

On a en effet :

$$A = \frac{\mu(k) - x \mu(k) - \mu[k(1-x)]}{kx(1-x)}$$

et, en utilisant la formule des accroissements finis :

$$A = \frac{\mu' [k(1-\theta x)] - \mu'(\theta_1, k)}{1-x} \quad 0 < (\theta \text{ ou } \theta_1) < 1.$$

Quel que soit x — du moment que la valeur 1 peut toujours être écartée. — A tend vers zéro, quand $k \rightarrow 0$, en raison de la propriété de continuité prêtée à μ' .

Ainsi, le coefficient de corrélation suivant — à supposer qu'il satisfasse aux conditions de cohérence — :

$$\begin{cases} r(h) = 1 - \lambda h^2 - \lambda_1 |h|^{5/2} \sin \frac{1}{h}, & \text{pour } h \leq h_0 \\ r(h) = 0 & \text{pour } h > h_0 \end{cases}$$

est, malgré la bizarrerie de la fonction $\sin \frac{1}{h}$ (pour $h=0$), une fonction aléatoire dérivable.

Pour contre, si $\sin \frac{1}{h}$ est remplacé par $\sin \frac{1}{h^2}$, la fonction aléatoire n'est plus dérivable, car si la condition (I) est bien satisfaite, la condition (II) ne l'est pas.

ANNEXE II

Primitive et intégrale d'une fonction aléatoire

1. Soit U/t , une fonction aléatoire — que nous supposons *stationnaire* pour simplifier — non nécessairement dérivable, de valeur probable nulle, d'écart type S , de coefficient de corrélation :

$$r(t_2 - t_1) = r(h).$$

Nous la considérons comme *bien définie* par ces données et nous appelons *primitive* de U/t , toute fonction aléatoire X/t , qui admet U pour dérivée. Sera donc une primitive de U , toute fonction aléatoire X dont le moment rectangle vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \overline{X_1 X_2} = \overline{U_1 U_2}.$$

$\overline{U_1 U_2}$ étant une fonction de $h = t_2 - t_1$, une double intégration donne :

$$\overline{X_1 X_2} = -S^2 \int_0^h (h-s) r(s) ds + c_1(t_1) + c_2(t_2).$$

Mais, $\overline{X_1 X_2}$ étant symétrique en t_1, t_2 , les deux fonctions arbitraires c_1 et c_2 se réduisent en réalité à une seule c , dont il est facile d'ailleurs d'avoir la signification en faisant $t_1 = t_2$. On trouve :

$$2c(t) = \sigma^2(t)$$

$\sigma(t)$ désignant l'écart type de X .

Ainsi :

$$\overline{X_1 X_2} = \frac{1}{2} [\sigma^2(t_1) + \sigma^2(t_2)] - S^2 \int_0^h (h-s) r(s) ds.$$

2. La forme la plus générale du coefficient de corrélation d'une fonction aléatoire stationnaire est :

$$r(s) = 1 - \psi(s)$$

où $\psi(s)$ est une fonction paire, s'annulant pour $s=0$ (nous admettons implicitement qu'elle est telle que r satisfasse aux conditions de cohérence).

Mais, $\psi(s)$ ne saurait être aussi générale, car le fait que X est dérivable entraîne sur la forme de son moment rectangle, des restrictions qui ont leur répercussion sur $r(s)$, donc sur $\psi(s)$. Pour les déterminer, choisissons la primitive stationnaire ($\sigma = c^{10}$), ce qui n'enlève rien d'essentiel au résultat. Le coefficient de corrélation de cette primitive stationnaire est :

$$R(h) = 1 - \frac{S^2}{2\sigma^2} h^2 + \frac{S^2}{2\sigma^2} \int_0^h (h-s) \psi(s) ds$$

$R(h)$ doit satisfaire à la condition que nous avons appelé (II) à l'Annexe précédente et que nous avons transformée par le critère de Cauchy. Cela donne :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{h} \left[\frac{1}{k^2} \int_0^k (k-s) \psi(s) ds - \frac{1}{(k-h)^2} \int_0^{k-h} (k-h-s) \psi(s) ds \right] = 0.$$

Posons $\frac{k}{h} = x$, elle devient :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k^2 x (1-x)^2} \left[(1-x)^2 \int_0^k (k-s) \psi(s) ds - \int_0^{k-kx} (k-kx-s) \psi(s) ds \right] = 0$$

pour k , tendant vers zéro, x restant compris entre -1 et $+1$, mais n'atteignant pas la valeur 1.

Transformant la seconde intégrale et effectuant des simplifications, on trouve :

$$\lim \frac{1}{(1-x)^2} \left[(x-2) \frac{1}{k^2} \int_0^k (k-s) \psi(s) ds - \frac{1}{k} \int_0^k \psi(s) ds + \frac{1}{k} \int_0^k \psi(sx) ds \right] = 0$$

et l'on se rend facilement compte que cela entraîne les deux conditions :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \int_0^k \psi(s) ds = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k^2} \int_0^k s \psi(s) ds = 0$$

La seconde, transformée par la formule de la moyenne, devient :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\theta}{k} \int_0^k \psi(s) ds = 0 \quad 0 < \theta < 1.$$

Elle est donc évidemment satisfaite si la première l'est et, transformant celle-ci par la formule des accroissements finis, on voit finalement que la condition *nécessaire et suffisante* est que $\psi(h)$ soit *continue pour* $h=0$.

On vérifie par ailleurs facilement qu'à cette condition, $R(h)$ satisfait bien au critérium de dérivabilité que nous avons énoncé dans l'Annexe (I).

La condition trouvée signifie que U est continue en moyenne quadratique.

3. Partons maintenant de l'intégrale indéfinie :

$$X/t = \int_a^t U/s ds$$

A , désignant une constante aléatoire, toutes les intégrales de U rentrent dans la forme :

$$X/t = \int_0^t U/s ds + A = Z + A,$$

Z désignant l'intégrale particulière :

$$Z/t = \int_0^t U/s ds$$

On en déduit :

$$\overline{X_1 X_2} = \overline{Z_1 Z_2} + \overline{AZ_1} + \overline{AZ_2} + \overline{A^2}.$$

On doit considérer $\overline{AZ_1} + \frac{A^2}{2}$, comme une fonction arbitraire de t , puisque la corrélation entre Z et la constante aléatoire A peut être choisie à notre gré.

On a donc :

$$\overline{X_1 X_2} = \overline{Z_1 Z_2} + c(t_1) + c(t_2)$$

En faisant $t_1 = t_2$, on trouve une interprétation de $c(t)$:

$$c(t) = \frac{\sigma^2 - \Sigma^2}{2}$$

σ , étant l'écart type de X , et Σ , celui de Z .

Donc :

$$\overline{X_1 X_2} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} + \overline{Z_1 Z_2} - \frac{\overline{Z_1^2} + \overline{Z_2^2}}{2} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} - \frac{(\overline{Z_2 - Z_1})^2}{2}$$

C'est bien la formule de tout à l'heure, car :

$$\overline{(Z_2 - Z_1)^2} = \left(\int_{t_1}^{t_2} Z/s \, ds \right)^2 = 2S^2 \int_0^h (h-s)r(s) \, ds$$

4. Cherchons la condition pour que U/t soit la dérivée de :

$$X/t = \int_a^t U/s \, ds$$

Nous avons vu au chapitre de l'intégration aléatoire qu'il était pour cela nécessaire et suffisant que l'intégrale certaine :

$$\frac{1}{h^2} \iint (\overline{U/\alpha - U/t})(\overline{U/\beta - U/t}) \, d\alpha \, d\beta$$

étendue à un carré de côté h , tende vers zéro avec h .

Nous servant de l'inégalité de Schwarz, nous avons alors montré que c'était bien le cas lorsque U était *continue* en moyenne quadratique. Cette condition suffisante n'apparaissait pas nécessaire. Cherchons à serrer le problème de plus près et pour cela, plaçons nous dans le cas stationnaire.

En posant :

$$r(s) = 1 - \psi(s),$$

la condition cherchée s'exprime ainsi :

$$\lim \frac{1}{h^2} \iint [\psi(\alpha) + \psi(\beta) - \psi(\beta - \alpha)] d\alpha d\beta = 0$$

et elle se réduit à la suivante :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \Phi(h) = \frac{1}{h^2} \int_0^h s \psi(s) ds = 0$$

La formule des accroissements finis, appliquée à la fonction $\Phi(h)$, nulle pour $h=0$ et qui admet la dérivée $h\psi(h)$, nécessairement finie, puisque $\psi(h) < 1$, permet de la remplacer par celle-ci :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \vartheta \Phi(\vartheta h) = 0,$$

ϑ étant un nombre dépendant de h , et compris entre 0 et 1 — *limites exclues* — Comme $\Phi(0)=0$, la condition signifie que Φ est continue pour $h=0$, donc aussi $r(h)$, donc que U est continue en moyenne quadratique.

Ces résultats sont entièrement d'accord avec les précédents. On peut donc énoncer le théorème suivant dont on remarquera l'analogie avec le théorème correspondant de l'Analyse certaine :

Théorème — L'intégrale aléatoire $\int_a^t U/s ds$ admet U/t pour dérivée en tous les points où U/t est continue en moyenne quadratique.

5. Les points de rigueur étant traités, on peut faire quelques réflexions intéressantes du point de vue physique. La primitive X , de U , définie par son moment rectangle, dépend donc d'une *fonction arbitraire*. On peut dire aussi, en langage de la Mécanique, qu'il y a une infinité de corpuscules *distincts* admettant la même vitesse. Cette indétermination est plus grande que celle de la Mécanique certaine, dans laquelle une vitesse définit un *seul* corpuscule, à un changement d'origine près. Il y a là un fait qui augmente beaucoup le pouvoir d'explication de la Mécanique aléatoire.

6. Prenons l'exemple de la fonction aléatoire U dont le moment rectangle est :

$$\overline{U_1 U_2} = S^2 \cos \omega(t_2 - t_1)$$

Ses primitives sont définies par le moment rectangle :

$$\overline{X_1 X_2} = \frac{\sigma^2(t_1) + \sigma^2(t_2)}{2} - \frac{S^2}{\omega^2} + \frac{S^2}{\omega^2} \cos \omega(t_2 - t_1)$$

Il en existe, en particulier, de *stationnaires* (lorsque σ est une constante) :

$$\overline{X_1 X_2} = \left(\sigma^2 - \frac{S^2}{\omega^2} \right) + \frac{S^2}{\omega^2} \cos \omega(t_2 - t_1)$$

Mais le problème de la recherche de la primitive est *bien plus restreint* quand on prête à U une forme analytique certaine, dépendant de constantes aléatoires. Nous avons dit, en son temps, qu'une telle représentation manquait de généralité; nous savons pourtant qu'on obtient un moment rectangle identique à celui que nous venons de choisir pour U, en prenant la fonction aléatoire :

$$V = A \omega \cos(\omega t - \Phi),$$

oscillateur à fréquence certaine (Φ est un nombre aléatoire, compris entre 0 et 2π , de probabilité uniforme et indépendant du nombre aléatoire A).

En intégrant directement l'expression analytique de V, on obtient :

$$Y = A \sin(\omega t - \Phi) + B,$$

B étant une constante aléatoire pouvant, a priori, être corrélée avec A et Φ .

Le moment rectangle de Y est :

$$\begin{aligned} \overline{Y_1 Y_2} &= \frac{\overline{A^2}}{2} \cos \omega(t_2 - t_1) + \overline{AB \cos \Phi} (\sin \omega t_1 + \sin \omega t_2) \\ &\quad - \overline{AB \sin \Phi} (\cos \omega t_1 + \cos \omega t_2) + \overline{B^2} \end{aligned}$$

Il ne dépend plus que de *constantes arbitraires* ($\overline{AB \cos \Phi}$, $\overline{AB \sin \Phi}$, $\overline{B^2}$) et non d'une *fonction arbitraire*.

Par contre, la solution stationnaire redonne le même moment rectangle que tout à l'heure :

$$\overline{Y_1 Y_2} = \overline{X_1 X_2} = \frac{\overline{A^2}}{2} \cos \omega(t_2 - t_1) + \overline{B^2} = \left(\sigma^2 - \frac{S^2}{\omega^2} \right) + \frac{S^2}{\omega^2} \cos \omega(t_2 - t_1)$$

Il n'y a rien dans ces faits qui doive nous surprendre. L'intérêt du concept aléatoire est précisément d'étudier les propriétés communes à toute une classe de fonctions ayant sur des *épreuves individuelles* des

réalisations fort diverses. Mais, ce qu'il est important de retenir de la possibilité de représenter une fonction aléatoire stationnaire par un oscillateur, c'est que — tant qu'on demeure dans la stationnarité — cette représentation, quoique grossière et naïve, possède à peu près toutes les propriétés statistiques requises. Sans doute faut-il voir là la raison profonde pourquoi le schéma de *l'oscillateur* possède en Physique, malgré sa simplicité, un pouvoir d'explication si étendu. On pourrait en dire autant du *schéma des chocs moléculaires*.

7. Une des primitives de U est particulièrement remarquable : c'est l'intégrale

$$Y = \int_0^t U/s ds$$

dont l'écart type est Σ , tel que :

$$\Sigma^2(t) = Y^2 = 2S^2 \int_0^t (t-s)r(s) ds$$

Le moment rectangle de la primitive générale a donc pour expression :

$$\overline{X_1 X_2} = \frac{\sigma^2(t_1) + \sigma^2(t_2) - \Sigma^2(t_2 - t_1)}{2} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \Sigma^2}{2},$$

et son coefficient de corrélation est par suite :

$$R(t_1, t_2) = 1 - \frac{\Sigma^2(t_2 - t_1) - [\sigma(t_2) - \sigma(t_1)]^2}{2\sigma(t_1)\sigma(t_2)} = 1 - \frac{\Sigma^2 - (\sigma_2 - \sigma_1)^2}{2\sigma_1\sigma_2}$$

Rien n'oblige le R ainsi obtenu à être, a priori, « un r », c'est à dire à vérifier les conditions de cohérence. La fonction indéterminée $\sigma(t)$ ne peut donc être choisie arbitrairement. Ainsi, pour que R soit compris entre -1 et $+1$ (1^{ère} condition de cohérence), elle doit satisfaire à l'inégalité triangulaire :

$$|\sigma_2 - \sigma_1| \leq \Sigma \leq \sigma_1 + \sigma_2$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, cette condition redonne l'inégalité déjà connue entre la dérivée de l'écart type et l'écart type de la dérivée :

$$|\sigma'| \leq S$$

8. Cherchons si, parmi les primitives de U , il peut en exister de *stationnaires*. Il faut pour cela que l'écart type $\sigma(t)$ soit une constante. Le coefficient de corrélation se réduit alors à :

$$R = 1 - \frac{\Sigma^2}{2\sigma^2}$$

et il est bien effectivement une fonction de $(t_2 - t_1) = h$, seulement.

Mais cela ne suffit pas. Ici se présente une circonstance caractéristique du Calcul aléatoire : il faut encore que R satisfasse aux conditions de cohérence. La première de ces conditions ($|R| \leq 1$) exige que l'intégrale :

$$\Sigma^2 = 2S^2 \int_0^h (h-s)r(s) ds$$

reste bornée quel que soit h , et en particulier quand $h \rightarrow \infty$, sinon on ne pourrait choisir la constante arbitraire σ de manière que $\sigma \geq \frac{\Sigma}{2}$.

Cela entraîne des restrictions sur la forme de $r(s)$; autrement dit toute fonction aléatoire stationnaire intégrable n'admet pas nécessairement des intégrales stationnaires.

Ainsi, le coefficient de corrélation :

$$r(s) = e^{-s^2}$$

représente une fonction aléatoire qui n'admet aucune intégrale stationnaire. En effet, l'intégrale :

$$\int_0^h (h-s)e^{-s^2} ds$$

a pour expression asymptotique :

$$h \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds$$

et croît donc indéfiniment avec h .

La seconde condition de cohérence conduit à l'inégalité :

$$\frac{\Sigma^4(h)}{\sigma^2} \leq 4 \Sigma^2(h) - \Sigma^2(2h).$$

Elle crée sur Σ la condition suivante :

$$2 \Sigma(h) \geq \Sigma(2h)$$

La courbe $\Sigma(h)$ ne pourra franchir la droite de coefficient angulaire S , à laquelle elle est tangente à l'origine.

On doit prendre σ^2 plus grand que :

$$\frac{\Sigma^4(h)}{4 \Sigma^2(h) - \Sigma^2(2h)}$$

et cette borne est supérieure ou égale à celle, $\frac{\Sigma^2(h)}{4}$, imposée par la 1^{ère} condition de cohérence.

9. Les conditions de cohérence d'ordre supérieur donneraient sans doute des bornes encore plus strictes. Quoi qu'il en soit, si Σ est bornée *supérieurement* (ce qui ne veut pas dire nécessairement que Σ tende vers une limite quand $h \rightarrow \infty$), il existe une infinité d'intégrales stationnaires dont les écarts types σ sont bornés *inférieurement*. Il y en aura généralement une correspondant au minimum σ_0 des σ . Soit $\mathfrak{R}(h)$ son coefficient de corrélation.

Les coefficients de corrélation $R(h)$ des autres intégrales stationnaires s'expriment au moyen de $\mathfrak{R}(h)$ par la formule linéaire :

$$R(h) = \left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right) + \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \mathfrak{R}(h)$$

On déduit de là que :

$$R(h) \geq \mathfrak{R}(h)$$

Ainsi, toutes les courbes $R(h)$ se cantonnent dans la région du plan comprise entre la courbe $\mathfrak{R}(h)$ et la droite d'ordonnée $+1$.

De plus, il est facile de vérifier que, $\mathfrak{R}(h)$ satisfaisant aux conditions de cohérence, $R(h)$ y satisfait a fortiori. En effet, ces conditions expriment que la forme quadratique :

$$\Sigma \lambda_i^2 + 2 \Sigma \Sigma R_{ij} \lambda_i \lambda_j$$

est définie positive.

Or, elle s'écrit :

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} (\Sigma \lambda_i^2 + 2 \Sigma \Sigma \mathfrak{R}_{ij} \lambda_i \lambda_j) + \left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right) (\Sigma \lambda_i)^2,$$

expression qui est positive si le premier terme l'est (puisque $\sigma_0 \leq \sigma$).

10. $\Sigma(h)$ étant une fonction bornée pour toute valeur de h (même pour $h \rightarrow \infty$), la courbe $\Sigma(h)$ peut présenter l'une ou l'autre des deux allures suivantes :

- a) tendre vers une asymptote horizontale.
- b) être périodique ou presque périodique.

Dans le cas a), $R(h)$ tend aussi vers une asymptote horizontale, soit $R = \mu$. Considérons alors p instants; il leur correspond $\frac{p(p-1)}{2}$ coefficients de corrélation et l'on peut toujours s'arranger — quel que grand que soit p — pour que ceux-ci soient aussi voisins de μ qu'on le désire. Or, nous avons vu — à propos de l'Intégration aléatoire, 1^{ère} Partie, page 134 — que si un très grand nombre de variables aléa-

toires présentent deux à deux la même corrélation, celle-ci ne saurait être négative. Donc μ est nécessairement positif ou nul.

On peut donner davantage de précisions. La seconde condition de cohérence, lorsque deux sur trois des coefficients de corrélation sont égaux à μ , s'écrit :

$$R(h) \geq -1 + 2\mu^2$$

$R(h)$ est donc bornée inférieurement par une valeur supérieure à -1 . A mesure que μ croît, le champ de variation possible se restreint et si $\mu=1$, $R(h)$ ne peut plus prendre que la valeur 1 (et l'on est dans le cas d'une constante aléatoire).

Donnons un exemple. Soit :

$$r(h) = -(2h^2 - 1)e^{-h^2}$$

$-2(2h^2 - 1)$ étant le 2^{ème} polynôme d'Hermite — le coefficient de corrélation d'une fonction aléatoire U , d'écart type $S=1$. Une des primitives stationnaires \mathfrak{X} admet l'écart type $\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et le coefficient de corrélation :

$$\mathfrak{R}(h) = e^{-h^2},$$

qui satisfait bien aux conditions de cohérence.

Les autres primitives stationnaires ont pour coefficient de corrélation :

$$R(h) = \left(1 - \frac{1}{2\sigma^2}\right) + \frac{1}{2\sigma^2} e^{-h^2}.$$

Quand $h \rightarrow \infty$, $R(h) \rightarrow 1 - \frac{1}{2\sigma^2}$ et cette quantité doit être ≥ 0 , donc :

$$\sigma^2 \geq \frac{1}{2} = \sigma_0^2.$$

Ainsi, la primitive \mathfrak{X} est celle dont l'écart type est le plus petit possible. Tous les coefficients de corrélation sont au dessus de la courbe de Gauss (e^{-h^2}) et se rapprochent autant qu'on le désire — sans toutefois jamais l'atteindre — de la droite d'ordonnée $+1$.

Voyons maintenant le cas b).

Lorsque $\Sigma(h)$ est périodique, il atteint périodiquement la valeur zéro. Les $R(h)$ et $r(h)$ sont aussi périodiques et atteignent périodiquement la valeur $+1$. Parmi les $R(h)$, il y en a un qui prend périodiquement la valeur -1 : c'est lui qui correspond à la primitive d'écart type minima.

Les choses ne sont guère changées si $\Sigma(h)$ est presque périodique. La primitive d'écart type minima est celle dont le coefficient de corrélation, presque périodique, se rapproche presque périodiquement, autant qu'on le désire, de la valeur -1 .

Exemple simple :

Soit $r(h) = \cos \omega_0 h$, le coefficient de corrélation de la fonction aléatoire stationnaire U , d'écart type $S=1$.

Les coefficients de corrélation des primitives sont :

$$\bar{R}(h) = 1 - \frac{1}{\sigma^2 \omega_0^2} + \frac{1}{\sigma^2 \omega_0^2} \cos \omega_0 h$$

Celle d'écart type minimum correspond à $\left(\sigma_0^2 = \frac{1}{\omega_0^2}\right)$:

$$\Re(h) = \cos \omega_0 h,$$

qui atteint périodiquement la valeur -1 .

11. On peut étudier la question des primitives stationnaires en supposant (ce qui diminue un peu la généralité), que la fonction U possède un coefficient de corrélation de la forme de Khintchine :

$$r(h) = \int_0^{\infty} \cos \omega h d\mathcal{F}(\omega),$$

$\mathcal{F}(\omega)$ étant une fonction de répartition.

On sait qu'un coefficient de corrélation de cette forme satisfait ipso-facto aux conditions de cohérence.

Mais alors que dans le problème de la dérivation, la dérivée est toujours cohérente, dans celui de l'intégration, la primitive ne l'est pas nécessairement, car son coefficient de corrélation :

$$R(h) = 1 - \frac{S^2}{\sigma^2} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \omega h}{\omega^2} d\mathcal{F}(\omega)$$

ne se présente pas sous la forme de Khintchine.

Il y a pourtant un $R(h)$ qui est de cette forme ; c'est :

$$\Re(h) = \frac{S^2}{\sigma_0^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega h}{\omega^2} d\mathcal{F}(\omega) = \int_0^{\infty} \cos \omega h d\Phi(\omega)$$

pour lequel :

$$d\Phi(\omega) = \frac{S^2}{\sigma^2} \frac{d\mathcal{F}(\omega)}{\omega^2} \quad \text{et} \quad \sigma_0^2 = S^2 \left(\frac{1}{\omega^2} \right)$$

$\Re(h)$ existe si $\left(\frac{1}{\omega^2} \right)$ est fini, et satisfait dès lors automatiquement aux conditions de cohérence.

Il en est de même pour toutes les primitives d'écart type *supérieur* à σ_0 , mais il est possible qu'il existe des primitives cohérentes d'écart type *inférieur* à σ_0 .

Développons $R(h)$ en série :

$$R(h) = 1 - \frac{S^2}{\sigma^2} \frac{h^2}{2} + \frac{S^2}{\sigma^2} \frac{h^4}{\omega^2 4!} + \dots + (-1)^n \frac{S^2}{\sigma^2} \frac{h^{2n}}{\omega^{2n-2} (2n)!} + \dots$$

Cette série est convergente, car $R(h)$ est une fonction linéaire de $\Re(h)$ que l'on a supposé exister pour toute valeur de h .

$R(h)$ sera «un r », si les inégalités suivantes sont vérifiées (voir 1^{ère} Partie, § 13, pag. 116) :

$$\frac{S^4}{\sigma^4} \frac{1}{\omega^{2n^2}} \leq \left(\frac{S^2}{\sigma^2} \frac{1}{\omega^{2n-2}} \right) \left(\frac{S^2}{\sigma^2} \frac{1}{\omega^{2n+2}} \right).$$

Or, ces inégalités se ramènent à celles vérifiées par les moments de ω :

$$\frac{1}{\omega^{2n^2}} \leq \frac{1}{\omega^{2n-2}} \frac{1}{\omega^{2n+2}},$$

sauf la première ($n=1$) qui est :

$$\frac{S^4}{\sigma^4} \leq \frac{S^2}{\sigma^2} \frac{1}{\omega^2}$$

et donne :

$$\sigma^2 \geq \frac{S^2}{\omega^2}.$$

L'égalité ne saurait d'ailleurs être atteinte, en général, car cela implique que ω cesse d'être aléatoire et que, par conséquent :

$$r(h) = \cos \omega_0 h.$$

Comme tout à l'heure, on trouve donc que σ est borné inférieurement.

ANNEXE III

Fonctions aléatoires presque périodiques

Nous avons signalé dans la 1^{ère} Partie, au sujet des conditions de cohérence, une propriété remarquable du coefficient de corrélation d'une fonction aléatoire stationnaire :

«Si ce coefficient de corrélation atteint l'une ou l'autre des valeurs $+1$, -1 (pour $h \neq 0$), il est nécessairement une fonction périodique».

Son expression est alors donnée par la série de Fourier :

$$r(h) = \sum_0^{\infty} a_n \cos n\omega h$$

avec $\sum_0^{\infty} a_n = 1$.

Nous avons nommé les fonctions aléatoires correspondantes : *fonctions aléatoires périodiques*.

On peut, en s'aidant de la théorie des fonctions presque-périodiques, généraliser cette propriété de la manière suivante :

«Si, à tout nombre positif ε , aussi petit que l'on veut, on peut faire correspondre une longueur $l(\varepsilon) > 0$, telle que tout intervalle de longueur l contienne au moins un nombre τ pour lequel on ait :

$$\text{soit } r(\tau) < 1 - \varepsilon, \quad \text{soit } r(\tau) > -1 + \varepsilon,$$

le coefficient de corrélation est une fonction presque périodique dont la presque période est, soit τ , soit 2τ .

Ce théorème se démontre aisément ; en faisant $h = \tau$ dans la seconde condition de cohérence :

$$1 - r^2(h) - r^2(k) - r^2(h+k) + 2r(h)r(k)r(h+k) \geq 0,$$

on voit que,

$$\text{soit } [r(k+\tau) - r(k)]^2, \quad \text{soit } [r(k+\tau) + r(k)]^2$$

peuvent être rendus aussi petits qu'on le désire.

Les fonctions aléatoires correspondantes peuvent être appelées *fonctions aléatoires presque périodiques*.

Si l'on se reporte à la forme de Khintchine :

$$r(h) = \int_0^{\infty} \cos \omega h d\mathcal{F}(\omega),$$

on voit que les fonctions aléatoires stationnaires presque périodiques correspondent au cas où $\mathcal{F}(\omega)$ est une fonction discontinue en escalier, puisque le développement d'un « r » presque périodique est :

$$r(h) = \sum_0^{\infty} a_n \cos \lambda_n \omega h,$$

λ_n étant un nombre réel dépendant de l'indice entier n .

Si une fonction aléatoire stationnaire n'est ni périodique, ni presque-périodique, c'est que son spectre contient des bandes.

2^{ÈME} PARTIE — APPLICATIONS PHYSIQUES

VI — MÉCANIQUE DU CORPUSCULE ALÉATOIRE

1. Mécanique aléatoire et Mécanique classique. La Mécanique classique repose essentiellement sur le concept de *point matériel* ou *corpuscule*, qui est un corps doué d'une masse (que nous pouvons supposer égale à l'unité) concentrée en un *point géométrique*.

A ce corpuscule ponctuel, nous voulons pour fonder la Mécanique Aléatoire substituer le *corpuscule aléatoire*, dont voici la définition :

C'est l'ensemble de trois coordonnées X, Y, Z qui sont des *fonctions aléatoires* du temps, *dérivables* au moins *deux fois* en moyenne quadratique.

Il est évident que l'on peut fonder une «*Mécanique Statistique*» encore plus générale en rejetant cette hypothèse de dérivabilité, mais il est bon de ne généraliser que par étapes.

Le corpuscule aléatoire n'est plus un point matériel : il remplit l'espace avec une certaine densité de probabilité de présence.

De là vont résulter dès le début des divergences avec la Mécanique classique, que nous allons indiquer.

Une Mécanique est fondée sur un Principe de Variations ; la Mécanique aléatoire repose sur le principe que l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t_1} \overline{L(X, \dot{X}, t)} dt$$

est extrême, L étant la fonction de *Lagrange*.

Cela conduit, comme nous l'avons vu, aux équations de Lagrange aléatoires :

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right)' - \frac{\partial L}{\partial X} = 0$$

qui s'écrivent dans le cas le plus simple :

$$\ddot{X} = - \frac{\partial V}{\partial X}$$

$V(X)$, étant le potentiel de la force extérieure.

Le mécanicien qui se borne à l'étude du mouvement du point probable \bar{X} , tirera de cette équation l'équation moyenne suivante :

$$\ddot{\bar{X}} = - \frac{\partial V}{\partial X}$$

Plaçons nous maintenant au point de vue de la Mécanique certaine. Celle-ci ignore que le corpuscule est distribué dans l'espace et l'imagine concentré au point probable :

$$x_0 = \bar{X}$$

Elle fait dériver ses lois de l'extréma de l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t_1} L(x_0, x'_0, t) dt$$

et obtient, dans le cas simple où nous sommes placés :

$$x''_0 = \ddot{\bar{X}} = - \frac{\partial V}{\partial x_0}$$

Cela revient à dire qu'elle néglige la force :

$$F = - \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial V}{\partial x_0} \right)$$

qui est fonction de la *distribution en densité* du corpuscule aléatoire ; elle s'écrit en effet explicitement :

$$F = - \int \rho(x, t) \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x_0} \right) dx$$

Pour rendre cette expression encore plus significative, supposons que la composante purement aléatoire de X : $X' = X - \bar{X}$ soit faible devant \bar{X} , de manière qu'on puisse développer $V(X)$ en série de Taylor :

$$V(X) = V(x_0 + X') = V(x_0) + X' \frac{\partial V}{\partial x_0} + \frac{X'^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_0^2} + \dots$$

On obtient alors :

$$F = - \frac{\bar{X}^2}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial x_0^3}$$

Ainsi, la Mécanique certaine ignore-t-elle une force qui dépend de \bar{X}^2 , c'est à dire de la *diffusion* du corpuscule. Si, à un instant donné,

le corpuscule aléatoire se «ponctualise», il y a entre les deux mécaniques une coïncidence mais qui ne dure pas, car le corpuscule aléatoire *diffuse*. Ce n'est que dans le cas où V est une fonction du second degré au plus, de x (oscillateur aléatoire, corpuscule aléatoire libre) que la Mécanique certaine est valable pour l'étude du mouvement probable.

2. Fonctions de distribution relatives au corpuscule aléatoire. Nous allons définir les diverses fonctions de distribution qui servent à exprimer la corrélation entre la position $O(X, Y, Z)$, la vitesse $\omega(U=\dot{X}, V=\dot{Y}, W=\dot{Z})$, et l'accélération $j(A=\ddot{U}, B=\ddot{V}, C=\ddot{W})$ du corpuscule aléatoire.

Nous désignerons par :

$R_1(x, y, z, u, v, w, \alpha, \beta, \gamma; t)$ la fonction de distribution conjuguée de la position et de la vitesse,

$\rho(x, y, z; t)$, la fonction de distribution de la position.

Nous utiliserons aussi des *probabilités liées* et désignerons par :

$f(u, v, w; x, y, z, t)$ la fonction de distribution *liée* de la vitesse pour une position donnée,

$f_1(\alpha, \beta, \gamma; u, v, w, x, y, z, t)$ la fonction de distribution *liée* de l'accélération pour une position et une vitesse donnée.

Soit Ψ une fonction certaine de la position O , de la vitesse ω , de l'accélération j et du temps. Sa moyenne exprimée par l'intégrale :

$$\bar{\Psi}(t) = \int \Psi R_1 d\omega dj$$

est une fonction du temps seulement.

Sa moyenne *doublement liée* pour une position et une vitesse données est :

$$\bar{\Psi}(O, \omega, t) = \frac{1}{R} \int \Psi R_1 dj = \int \Psi f_1 dj$$

C'est une fonction de x, y, z, u, v, w, t .

Si Ψ ne dépend pas de l'accélération, sa moyenne *liée* pour une position donnée est :

$$\bar{\Psi}(O, t) = \frac{1}{\rho} \int \Psi R d\omega = \int \Psi f d\omega$$

Si Ψ dépend de l'accélération, on définit encore sa moyenne *liée* pour une position donnée (abstraction faite de la vitesse), en formant

d'abord la moyenne *doublement liée* pour une position et une vitesse données :

$$\overline{\Psi}(0, \omega, t) = \frac{1}{R} \int \Psi R_1 dj$$

puis la moyenne de $\overline{\Psi}$ pour une position donnée :

$$\overline{\Psi}(0, t) = \frac{1}{\rho} \int \overline{\Psi} R d\omega = \frac{1}{\rho} \int \Psi R_1 d\omega dj.$$

3. Relations vérifiées par les fonctions de distribution. Ces relations forment deux groupes :

a) *Relations générales* exprimant les deux théorèmes fondamentaux du Calcul des Probabilités :

$$\left. \begin{array}{l} \int R_1 d\omega dj = 1 \\ \int R d\omega = 1 \\ \int \rho d\omega = 1 \\ R = \int R_1 dj \\ \rho = \int R d\omega = \int R_1 d\omega dj \end{array} \right\} \text{vérifiées quel que soit } t$$

$$\int f_1 dj = 1 \quad \text{quels que soient } x, y, z, u, v, w, t$$

$$\int f d\omega = 1 \quad \text{quels que soient } x, y, z, t$$

$$R_1 = R f_1, \quad R = \rho f.$$

b) *Relations particulières*, exprimant que la vitesse est la dérivée aléatoire de la position et l'accélération, la dérivée aléatoire de la vitesse.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \frac{\partial}{\partial x} (\rho \overline{U}) = 0 \quad \text{avec} \quad \overline{U} = \frac{1}{\rho} \int R u d\omega$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \sum u \frac{\partial R}{\partial x} + \sum \frac{\partial}{\partial u} (R \overline{A}) = 0 \quad \text{avec} \quad \overline{A} = \frac{1}{R} \int R_1 \alpha dj.$$

La signification mathématique de ces relations est — par exemple pour la dernière — que R est un multiplicateur du système différentiel :

$$dt = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \frac{du}{\overline{A}} = \frac{dv}{\overline{B}} = \frac{dw}{\overline{C}}.$$

4. L'équivalent hydrodynamique du corpuscule aléatoire. L'équation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{U}) = 0$$

est l'équation de continuité d'un fluide de densité ρ dont la vitesse, dans le système de variables d'Euler, serait \bar{U} , \bar{V} , \bar{W} . Nous allons montrer que l'on peut donner de ce fluide une définition complète, mécanique et thermodynamique.

Nous avons établi plus haut l'équation fondamentale de transfert :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{\Psi}) + \sum \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{\Psi} \bar{U}) = \rho \bar{\Psi}$$

Si Ψ est une fonction de x, y, z, u, v, w seulement, on a :

$$\bar{\Psi} = \overline{\left(U \frac{\partial \Psi}{\partial X} + \sum \bar{A} \frac{\partial \Psi}{\partial U} \right)} = \frac{d\bar{\Psi}}{dt}$$

Pour $\Psi=1$, l'équation de transfert nous donne l'équation de continuité.

Introduisons des variables purement aléatoires, c'est à dire dont les moyennes liées en un point sont nulles.

$$\begin{aligned} U' &= U - \bar{U} \\ \Psi' &= \Psi - \bar{\Psi} \end{aligned}$$

Une transformation de calcul simple permet d'écrire l'équation de transfert sous l'une ou l'autre des deux formes :

$$\frac{d\bar{\Psi}}{dt} + \frac{1}{\rho} \sum \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{\Psi}' \bar{U}') = \frac{d\bar{\Psi}}{dt}$$

$$\frac{d\bar{\Psi}'}{dt} = \frac{1}{\rho} \sum \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{\Psi}' \bar{U}')$$

$\frac{d\bar{\Psi}}{dt}$ est l'opérateur :

$$\frac{\partial}{\partial t} + \sum \bar{U} \frac{\partial}{\partial x}$$

Faisons $\Psi=U, V, W$; $\frac{d\bar{\Psi}}{dt}$ devient $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ et l'on obtient les équations du mouvement d'un *fluide turbulent* :

$$\frac{d\overline{U}}{dt} = \overline{A} - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho \overline{U'^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \overline{U'V'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \overline{U'W'}) \right]$$

et deux analogues.

Les quantités $-\rho \overline{U'^2} = N_1, \dots, -\rho \overline{V'W'} = T_1$ forment un tenseur symétrique (qui est, au facteur $-\rho$ près le *tenseur de corrélation* de la vitesse aléatoire du corpuscule en un point.

Ainsi, le corpuscule aléatoire est-il équivalent à un fluide dont nous venons d'écrire les équations (continuité, mouvement). Nous verrons dans un instant que l'on obtient aussi pour ce fluide une équation thermodynamique.

VII — THERMODYNAMIQUE DU CORPUSCULE ALÉATOIRE

5. L'équation thermodynamique du Corpuscule. Alors que le point matériel « certain » est uniquement doué de *propriétés mécaniques*, le corpuscule aléatoire s'enrichit, grâce à son énergie d'agitation (énergie interne) de *propriétés thermodynamiques* que nous allons examiner.

Rappelons d'abord les deux principes de la Thermodynamique classique :

Le premier Principe consiste, en quelque sorte, en la définition de la *quantité de chaleur* (Duhem).

Lorsque les agents extérieurs fournissent à un système thermodynamique un travail, l'équivalent de ce travail ne se retrouve pas tout entier dans l'augmentation de l'énergie interne du système. La différence est la *quantité de chaleur absorbée* par le système ($Q\delta$).

L'énergie d'un corpuscule aléatoire est :

$$\varepsilon = \int RE \, do \, d\omega,$$

l'énergie (aléatoire) d'un élément constituant étant supposée être une fonction des coordonnées et des vitesses.

Or l'on a :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = \frac{d\overline{E}}{dt} + \int E \frac{d}{dt} (R \, do \, d\omega)$$

La quantité de chaleur dégagée est la différence :

$$Q\delta = \frac{d\overline{E}}{dt} - \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}.$$

Pour un corpuscule aléatoire, elle est nulle, en raison de la conservation de la probabilité :

$$\frac{d}{dt} (R d\omega) = 0,$$

ou encore, si l'on veut, en raison de la règle de dérivation sous le signe «trait», qui caractérise la dérivabilité aléatoire.

Le corpuscule aléatoire est donc nécessairement un système *thermiquement isolé* et à ce titre il semble ne fournir qu'une représentation assez particulière d'un système thermodynamique.

Mais ce manque de généralité disparaît si, au lieu de considérer le corpuscule dans son ensemble, on en extrait une partie (ou particule). Cette particule, du fait qu'elle est incluse dans un «champ» va posséder toutes les propriétés thermodynamiques requises.

Faisons, dans l'équation de transfert :

$$\Psi = E = \frac{1}{2} c^2$$

On obtient :

$$\frac{1}{\rho} \mathcal{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \rho \overline{U^2 C^2} \right) = \frac{d\overline{E}}{dt} - \frac{d\overline{E}}{dt}$$

Pour les moyennes liées en un point, il cesse d'y avoir commutativité entre les signes de dérivation et les signes de moyennes, de sorte qu'il existe cette fois une quantité de chaleur dont l'expression est le terme du 1er membre. Sa signification est d'ailleurs évidente, comme on le voit en intégrant ce terme pour un volume fini et en transformant l'intégrale de volume en l'intégrale de surface :

$$\int_{\Sigma} \left[\mathcal{S} \frac{1}{2} \rho \overline{U^2 C^2} \cos(n, x) \right] d\Sigma$$

La quantité de chaleur dégagée est donc le flux d'énergie d'agitation qui traverse la surface Σ entourant la particule fluide, de l'intérieur vers l'extérieur.

Le premier Principe se trouve ainsi établi comme une évidence, en appelant chaleur l'énergie d'agitation du corpuscule.

Le second Principe s'exprime par l'équation de Carnot-Clausius :

$$\partial S + \int \frac{Q^{\delta}}{k} = \mathcal{C}_{nc}$$

S est l'entropie du système, Q^{δ} la chaleur dégagée en un point où le

module d'énergie (température absolue) est k , \mathcal{T}_{nc} est la *transformation non compensée*.

Le second Principe consiste dans l'affirmation que \mathcal{T}_{nc} n'est jamais négatif.

Or, nous obtenons une équation analogue à celle de Carnot-Clausius en faisant, dans l'équation de transfert :

$$\Psi = -\log(\rho f_0)$$

f_0 , désignant la fonction de distribution de Maxwell :

$$(2\pi k)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{c'^2}{2k}}$$

c'est :

$$\frac{d_0 s}{dt} + \frac{1}{\rho} \sum \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \rho \frac{\overline{U' C'^2}}{k} = - \overline{\frac{d}{dt} \log(\rho f_0)}$$

où $s = -\overline{\log(\rho f_0)} = \log(k^{3/2} \rho^{-1}) + c'^2$ est l'entropie du fluide en un point, telle que la définit la thermodynamique.

Intégrons cette équation pour un volume O , limité par une surface Σ . Elle devient, en posant :

$$S = \int_0 \rho s \, do$$

(conformément à la conception thermodynamique, l'entropie d'une masse fluide est la somme des entropies de ses parties); et en transformant l'intégrale de volume en une intégrale de surface :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \int_{\Sigma} \frac{1}{k} \left[\sum \frac{1}{2} \rho \overline{U' C'^2} \cos(n, x) \right] d\sigma = - \int_{\Sigma} \rho \overline{\frac{d}{dt} \log(\rho f_0)} \, do.$$

Le crochet représente le flux d'énergie d'agitation vers l'extérieur (chaleur dégagée de la Thermodynamique), en un point où le module (température absolue de la Thermodynamique) a la valeur k .

Notre terme s'identifie donc au terme :

$$\int \frac{Q \delta}{k}$$

de la Thermodynamique : somme des «valeurs de transformation», autrement dit quotients des quantités de chaleur dégagée par leur température.

Notre terme du 2^o membre représente la *transformation non compensée*. Mais, en ce qui nous concerne, rien ne nous permet d'affirmer qu'elle est positive (ou nulle), comme le voudrait le second principe.

$-\overline{\frac{d}{dt} \log(\rho f_0)}$ s'écrit explicitement :

$$\frac{1}{k\rho} \left[n_1 \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \dots + T_1 \left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \right) + \dots \right] - \frac{1}{2k^2} \sum \overline{U' C'^2} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{k} \sum \overline{\Lambda' U'}$$

en posant :

$$n_1 = \rho (k - \overline{U'^2})$$

$$T_1 = \rho \overline{V' W'}$$

On reconnaît (au facteur $\frac{1}{k}$ près) dans le 1er terme, la *fonction dissipative mécanique* Φ_m de l'hydrodynamique des fluides visqueux, et dans le 2ème terme, la *fonction dissipative thermique* Φ_k de la théorie de la conductibilité.

On voit qu'un 3ème terme s'ajoute à ces fonctions dissipatives : il tient à la corrélation entre la vitesse et l'accélération du corpuscule. Nous verrons plus tard, avec précision, qu'il représente la variation de l'énergie d'agitation d'une particule, primitivement concentrée en un point, non pas quand on la suit dans le mouvement d'ensemble, mais quand on suit tous ses éléments dans leur diffusion. Donc, s'il n'y a pas une source d'énergie extérieure (comme du rayonnement par exemple), s'échangeant avec l'énergie d'agitation, le terme considéré est nul.

6. Variation de l'extension en phase. La variation de l'extension en phase, jouant un grand rôle dans toutes les questions de thermodynamique statistique, nous allons examiner comment elle se présente dans le schéma de la dérivabilité en moyenne quadratique.

La double dérivabilité des coordonnées du corpuscule aléatoire, entraîne la relation :

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \sum u \frac{\partial R}{\partial x} + \sum \frac{\partial}{\partial u} (R \overline{\Lambda}) = 0$$

qu'on peut écrire en abrégé :

$$\frac{d \log R}{dt} + \sum \frac{\partial \overline{\Lambda}}{\partial u} = 0$$

$\frac{d}{dt}$ étant l'opérateur qui suit dans son mouvement (vitesse u , accélération $\overline{\Lambda}$), une cellule ($do d\omega$) de l'espace généralisé des positions et des vitesses.

La dilatation cubique de cette cellule est :

$$\Delta = \frac{d}{dt} \log (do d\omega) = \int \frac{\partial \bar{A}}{\partial u}.$$

Notre équation aux dérivées partielles s'écrit donc :

$$\frac{d \log R}{dt} + \Delta = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt} (R do d\omega) = 0.$$

Elle exprime tout simplement la *conservation de la probabilité*. Lorsque l'extension en phase se conserve, elle se réduit à $\frac{dR}{dt} = 0$. En ce cas, la moyenne $\overline{\varphi(R)}$ d'une fonction quelconque de R est indépendante du temps, car :

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\varphi(R)} = \overline{\varphi'(R) \frac{dR}{dt}} = 0.$$

Ce fait est une conséquence directe de la dérivabilité aléatoire.

L'expression de la dilatation cubique d'une cellule :

$$\Delta = \int \frac{\partial \bar{A}}{\partial u}$$

montre -- bien que ce ne soit pas nécessaire -- que $\Delta = 0$ quand $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ ne dépendent pas de u, v, w .

Alors : $\overline{\dot{A}} = \overline{\dot{A}}$ et $\overline{\dot{A}U} = \overline{\dot{A}U} = \overline{\dot{A}} \overline{U}$ donc $\overline{\dot{A}'U'} = 0$: l'accélération et la vitesse ne sont pas corrélées. Remarquons qu'en ce cas, le 3^e terme de l'équation d'énergie est nul.

7. Probabilité de configuration. La fonction de distribution conjuguée de la position et de la vitesse

$$R(x, y, z, u, v, w; t)$$

est considérée, en théorie cinétique, comme la probabilité de présence du point représentatif d'un état du corpuscule dans l'espace généralisé à six dimensions : position — vitesse. Remarquons que ceci suppose implicitement que l'état du corpuscule est, à un instant donné, parfaitement représenté par les six variables aléatoires (X, Y, Z, U, V, W). Pour que cette conception soit valable, il faut donc nécessairement supposer que \ddot{X} est une fonction certaine de (X, Y, Z, U, V, W), ce qui est le cas d'une «Mécanique aléatoire de Lagrange» qui admet

que le corpuscule obéit à un Principe de Variation :

$$\delta \int \overline{L(X, \dot{X}, t)} dt = 0$$

Dans cette Mécanique aléatoire, qui n'est pas la plus générale, on a nécessairement :

$$\ddot{X} = A = \overline{A}$$

Il n'y a pas de diffusion dans l'espace des vitesses.

Le fait qu'il existe une certaine configuration du corpuscule aléatoire, définie par la fonction R , est susceptible d'une probabilité que nous appelons « probabilité de configuration ». Attribuant des probabilités a priori égales à des éléments égaux de l'extension en phase, un calcul de combinaisons classique donne, dans la statistique de Boltzmann, l'expression suivante pour le logarithme de la probabilité de configuration :

$$\mathcal{H} = - \int R \log R do d\omega$$

Or, dans la « Mécanique aléatoire de Lagrange », on trouve :

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} = - \overline{\frac{d}{dt} \log R} = \overline{\Delta}$$

Donc, lorsque l'extension en phase se conserve (Mécanique Hamiltonienne), \mathcal{H} ne peut varier.

Si l'on renonce à représenter l'état du corpuscule par six variables seulement et que l'on ajoute à sa définition des dérivées d'ordre supérieur, il est visible que l'on retombera toujours sur la même conclusion :

$$\delta \mathcal{H} = 0 \quad \text{si} \quad \Delta = 0$$

Ainsi, il est impossible pour un corpuscule aléatoire d'avoir un « théorème \mathcal{H} » ($\delta \mathcal{H} \geq 0$) ni même d'obtenir une variation de \mathcal{H} d'un signe quelconque. Ce n'est pas à dire cependant que le schéma du corpuscule aléatoire ne puisse fournir une interprétation de la Thermodynamique.

Nous allons maintenant approfondir la question de la probabilité d'une configuration et de ses rapports avec l'entropie.

8. Le théorème \mathcal{H} dans une Mécanique statistique générale. Débarassons-nous de toute hypothèse et posons que l'état d'un corpuscule « statistique » est défini par un certain nombre de variables aléatoires, que nous désignerons uniformément par X , sans préjuger qu'il puisse y avoir entre elles des relations de fonction à dérivée.

Nous appuyant seulement sur les deux théorèmes fondamentaux du Calcul des probabilités, nous allons chercher la variation de la grandeur :

$$\mathcal{H} = - \int R \log R dx$$

R , étant fonction de toutes les variables x , nécessaires pour définir l'état du gaz.

\mathcal{H} représentera, dans la statistique de Boltzmann le logarithme de la probabilité de configuration, si l'on admet l'égale probabilité a priori de tous les éléments de l'extension en phase. Il ne peut plus être question ici de justifier cette hypothèse par la conservation de l'extension en phase, car nous ne savons pas si les X sont dérivables.

Nous désignons par G_{12} la fonction de distribution conjuguée :

$$(x_1, x_2 ; t_1, t_2)$$

de deux positions successives dans l'extension en phase.

G_{21} sera l'une ou l'autre des fonctions :

$$(x_2, x_1 ; t_1, t_2) \quad \text{ou} \quad (x_1, x_2 ; t_2, t_1),$$

identiques en vertu de propriétés de symétrie de G . D'après le théorème des probabilités totales :

$$(x_1, t_1) = R_1(t_1) = \int G_{12} dx_2$$

(G_{12} doit être tel que le paramètre t_2 qu'il contient disparaisse dans l'intégration en même temps que x_2).

De même :

$$(x_1, t_2) = R_1(t_2) = \int G_{21} dx_2$$

d'où :

$$\vartheta [R_1(t_2)] = R_1(t_2) - R_1(t_1) = \int (G_{21} - G_{12}) dx_2.$$

Prêtant à R la propriété de *continuité* relativement à t et choisissant $(t_2 - t_1)$ petit, la variation de \mathcal{H} a pour partie principale :

$$\vartheta \mathcal{H} = - \int [\log R_1(t_1)] \vartheta [R_1(t_1)] dx_1$$

d'où :

$$\vartheta \mathcal{H} = - \int [\log R_1(t_1)] (G_{21} - G_{12}) dx_1 dx_2.$$

On peut en avoir une autre expression en permutant x_1 et x_2 :

$$\vartheta \mathcal{H} = - \int [\log R_2(t_1)] (G_{12} - G_{21}) dx_1 dx_2$$

d'où par addition, l'expression symétrique :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int [\log R_2(t_1) - \log R_1(t_1)] (G_{21} - G_{12}) dx_1 dx_2.$$

Enfin, appliquant le théorème des probabilités composées, on a :

$$G_{12} = R_1(t_1) P_{12}$$

$$G_{21} = R_2(t_1) P_{21}$$

P_{12} et P_{21} sont les *probabilités de passage* dans l'intervalle de temps (t_1, t_2) respectivement de 1 en 2 et de 2 en 1.

Donc :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int (\log R_2 - \log R_1) (R_2 P_{21} - R_1 P_{12}) dx_1 dx_2.$$

Et c'est tout ce que l'application *correcte* des deux théorèmes fondamentaux du Calcul des Probabilités nous permet d'écrire. Il y a, certes, une variation possible de \mathcal{H} mais son *signe n'est pas déterminé*. Ce que nous pouvons dire de général, c'est que $\delta \mathcal{H}$ est positif lorsque l'on a simultanément :

$$R_2 > R_1 \quad \text{et} \quad G_{21} > G_{12}$$

c'est à dire lorsque le *fluide de probabilité s'écoule des régions de forte densité vers les régions de faible densité en phase*.

Le théorème \mathcal{H} ne saurait donc être une vérité statistique générale et s'il a pu être établi en Mécanique Statistique et en Mécanique quantique c'est que l'on a ajouté aux notions statistiques une hypothèse physique *qui leur est entièrement étrangère*. Ainsi la démonstration quantique admet un « principe de microréversibilité » — pas plus évident que le principe de Carnot lui-même — selon lequel :

$$P_{21} = P_{12},$$

d'où il suit que l'intégrale \mathcal{H} est à éléments positifs.

Nous ne pouvons ici développer ces considérations qui sortiraient du cadre de ce mémoire.

9. Comment concevoir une thermodynamique statistique générale. Le schéma du corpuscule deux fois dérivable en moyenne quadratique, bien qu'il ne permette pas sans autre hypothèse de conclure sur le signe de la transformation non compensée, renferme toutes les possibilités d'une représentation correcte des propriétés thermodynamiques

d'un système. Mais l'on a vu que les rapports entre la probabilité et l'entropie ne sont pas les mêmes que dans les conceptions classiques.

L'entropie n'est pas :

$$\mathcal{H} = - \int R \log R dx$$

mais :

$$S = - \int R_0 \log R_0 dx = - \int R \log R_0 dx$$

R_0 , étant la loi de Maxwell.

Les deux notions ne coïncident que pour un système dans l'état de Maxwell.

Renonçant à toute idée préconçue sur les rapports de l'entropie et de la probabilité, nous allons examiner maintenant comment on doit — sous la forme la plus générale — concevoir l'interprétation statistique de la Thermodynamique.

Il nous faut d'abord trouver l'interprétation du premier Principe, c'est-à-dire définir la *quantité de chaleur*.

L'énergie moyenne du corpuscule aléatoire est :

$$\varepsilon = \int RE dx$$

Sa variation $\delta\varepsilon$ qui est le travail fourni au corpuscule, se compose de deux termes :

a) $\overline{\mathcal{D}(E)} = \int R\mathcal{D}(E) dx$, qui est l'augmentation de l'énergie interne du corpuscule.

b) $\int E\mathcal{D}(R) dx = \int E\mathcal{D}(R) dx + \int RE \Delta dx$ (Δ étant la dilatation cubique) — et qui est par conséquent la *chaleur fournie* au corpuscule.

La quantité de chaleur dégagée est par suite :

$$Q\delta = - \int E[\mathcal{D}(R) + R\Delta] dx$$

Et si l'on admet la conservation de l'extension en phase ($\Delta=0$) :

$$Q\delta = - \int E\mathcal{D}(R) dx$$

10. Etat stationnaire et état de maximum de probabilité. Soit

$$\mathcal{H} = \int \varphi(R) dx$$

l'expression de la probabilité de la configuration représentée par la fonction de distribution R , résultant d'une *statistique quelconque*.

Cherchons la fonction φ qui réalise le maximum de probabilité, compte tenu des conditions adjointes classiques :

$$\int R dx = 1$$

$$\int RE dx = \varepsilon$$

On trouve, $\frac{1}{k}$ et λ étant des multiplicateurs de Lagrange :

$$\varphi'(R) = \frac{E}{k} + \lambda$$

Lorsque la fonction R satisfait à cette équation (et nous en désignerons la solution par R_0), le corpuscule est dans un état de maximum de probabilité.

Il convient de noter la différence entre un tel état et un état *stationnaire*.

Dans un état stationnaire, on a :

$$G_{12} = G_{21};$$

le corpuscule est en *équilibre statistique*. Aucun de ses paramètres macroscopiques ne varie. Mais, un état de maximum de probabilité peut être en train d'évoluer, grâce à des actions extérieures, vers un autre état de maximum de probabilité : *c'est la suite des états réversibles* de la Thermodynamique. L'état de maximum de probabilité a la même fonction de distribution qu'un état stationnaire, mais il diffère de celui-ci par les fonctions en deux points ; l'on a :

$$G_{21} - G_{12} \neq 0$$

Le corpuscule n'est pas en équilibre statistique.

11. L'entropie. Supposons que le corpuscule parcourre une suite d'états correspondant tous à un maximum de probabilité (états R_0). Dans cette évolution R est constamment égal à R_0 et

$$\frac{Qd}{k} = - \int E \varpi(R_0) dx = - \int \varphi'(R_0) \varpi(R_0) dx$$

représente la variation de la grandeur :

$$\mathcal{H}_0 = - \int \varphi(R_0) dx$$

Donc $\frac{Q\delta}{k}$ est une différentielle exacte et l'entropie de la thermodynamique doit être assimilée à \mathcal{H}_0 .

Cette définition, obtenue par la considération d'une suite d'états réversibles, est conforme à celle de la Thermodynamique. L'entropie, pour un état de maximum de probabilité, coïncide avec le logarithme de la probabilité. Mais cette coïncidence cesse lorsque le système n'est pas dans un état de maximum de probabilité.

Ce que notre raisonnement général ajoute aux résultats classiques, c'est que la définition de l'entropie ne dépend en aucune manière de la statistique adoptée ($\varphi(\mathbf{R})$ arbitraire). En particulier, il lève le reproche adressé par Duhem à W. Gibbs, sur le rôle essentiel joué dans la Mécanique Statistique par la distribution canonique.

12. Le Second Principe. Plaçons nous maintenant en un état, défini par la fonction de distribution \mathbf{R} , qui ne satisfasse pas à la condition de maximum de probabilité.

Il existe toujours une fonction de distribution \mathbf{R}_0 qui satisfait à cette condition, pour la même énergie moyenne ε du corpuscule.

Elle est définie par :

$$\varphi'(\mathbf{R}_0) = \frac{\mathbf{E}}{k} + \lambda$$

et satisfait aux conditions :

$$\int \mathbf{R}_0 dx = 1$$

$$\int \mathbf{R}_0 \mathbf{E} dx = \varepsilon .$$

Nous dirons que l'état défini par \mathbf{R}_0 est l'état de maximum de probabilité *tangent* à l'état dérangé considéré.

Dans cet état «dérangé», la fonction de distribution est :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0(1 + \eta) .$$

a) *point de vue de la thermodynamique classique.*

La Thermodynamique classique continue à définir l'entropie dans cet état par :

$$S = \int \varphi(\mathbf{R}_0) dx = \mathcal{H}_0 .$$

Ce qui caractérise cette conception, c'est que l'entropie est une *fonction d'état*, c'est-à-dire s'exprimant au moyen des deux paramètres macroscopiques k et λ .

Calculons l'écart de cette entropie avec le logarithme de la probabilité :

$$\mathcal{H} = \int \varphi(R) dx$$

Développons $\varphi(R)$ en supposant η petit :

$$\varphi(R) = \varphi(R_0) + R_0 \eta \varphi'(R_0) + \frac{1}{2} R_0^2 \eta^2 \varphi''(R_0) + \dots$$

Je dis d'abord que :

$$\int R_0 \eta \varphi'(R_0) dx = 0$$

En effet, substituant à $\varphi'(R_0)$ son expression $\frac{E}{k} + \lambda$, il vient :

$$\int R_0 \eta \varphi'(R_0) dx = \frac{1}{k} \int R_0 E \eta dx + \lambda \int \eta R_0 dx$$

et chacune de ces intégrales est nulle, en vertu de la définition de l'état tangent, car :

$$\int R dx = \int R_0 dx = 1$$

$$\int R E dx = \int R_0 E dx$$

Il reste donc :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \frac{1}{2} \int R_0^2 \eta^2 \varphi''(R_0) dx + \dots$$

Quand nous avons voulu exprimer que \mathcal{H} était un *maximum* de probabilité, nous avons en réalité écrit seulement qu'il était *stationnaire*. Nous aurons effectivement un *maximum* lorsque :

$$\varphi''(R_0) \quad \text{sera négatif.}$$

C'est bien le cas pour la statistique de Boltzmann, dans laquelle :

$$\varphi = -R \log R \quad \text{d'où :} \quad \varphi'' = -\frac{1}{R}$$

ainsi que pour les nouvelles statistiques, comme on le vérifie aisément.

Un état stationnaire dans le temps, donc stable, ne pouvant correspondre à un minimum de probabilité, toute statistique doit nécessairement satisfaire à la condition :

$$\varphi''(R_0) < 0$$

Cherchons maintenant l'expression de la quantité de chaleur *absorbée* dans l'état dérangé; c'est :

$$\frac{Q' \delta}{k} = \int E \varpi(R) dx = k \int \varphi'(R_0) \varpi(R) dx$$

Il faut bien remarquer ici que :

$$\frac{Q' \delta}{k}$$

n'est plus égal à δS , donc que $\frac{Q' \delta}{k}$ n'est plus une différentielle exacte.

En effet, l'état tangent ne peut admettre une fonction G_{12}^0 égale à G_{12} sans quoi :

$$R_1 = \int G_{12} dx_2$$

serait égale à :

$$R_1^0 = \int G_{12}^0 dx_2$$

Par conséquent, $\frac{\delta S}{\delta t}$ qui s'exprime au moyen des fonctions G par :

$$\frac{\delta S}{\delta t} = \frac{1}{2} \int [\varphi'_1(R_0) - \varphi'_2(R_0)] (G_{21}^0 - G_{12}^0) dx_1 dx_2$$

est différent de $\frac{Q' \delta}{k \delta t}$ qui est :

$$\frac{Q' \delta}{k \delta t} = \frac{1}{2} \int [\varphi'_1(R_0) - \varphi'_2(R_0)] (G_{21} - G_{12}) dx_1 dx_2$$

Calculons maintenant :

$$\frac{\delta S}{\delta t} - \frac{Q' \delta}{k \delta t}$$

c'est :

$$\mathcal{C}_{nc} = \int \varphi'(R_0) [\varpi(R_0) - \varpi(R)] dx$$

que l'on peut mettre aussi, en s'aidant de l'identité :

$$\int R \varphi'(R_0) dx = \int R_0 \varphi'(R_0) dx$$

qui exprime que l'état dérangé et l'état tangent ont même énergie moyenne \mathcal{E} , sous la forme :

$$\mathcal{C}_{nc} = - \int (R_0 - R) \varphi''(R_0) \varpi(R_0) dx = \int R_0 \eta \varphi''(R_0) \varpi(R_0) dx.$$

En particulier, si l'on adopte l'expression classique de Boltzmann pour le logarithme de la probabilité :

$$\mathcal{H} = - \int R \log R \, dx$$

soit $\varphi''(R) = -\frac{1}{R}$, on obtient :

$$\mathcal{T}_{nc} = - \int R \varnothing (\log R_0) \, dx = - \overline{\varnothing (\log R_0)} = \int \eta \varnothing (R_0) \, dx$$

Le second Principe affirme que \mathcal{T}_{nc} n'est jamais négative. Nous ne pouvons, avec les seules ressources de la statistique nous prononcer sur le signe de \mathcal{T}_{nc} , donc démontrer le Second Principe.

b) *Point de vue du corpuscule aléatoire.*

L'expression de la transformation non compensée, pour une particule fluide est, nous l'avons vu :

$$-\varrho \, do \, \overline{\frac{d}{dt} \log R_0}$$

en posant : $R_0 = \varrho f_0$.

Rapportée à la masse unité, elle est donc conforme à l'expression qu'en donne le point de vue thermodynamique. Et ceci est une confirmation de la légitimité de l'expression de Boltzmann :

$$\mathcal{H} = - \int R \log R \, dx$$

pour représenter le logarithme de la probabilité.

c) *Point de vue de la Mécanique Statistique.*

Il est nettement différent des deux précédents. La Mécanique Statistique continue, en effet, a définir l'entropie dans un état dérangé par le logarithme de la probabilité (à un facteur positif près) :

$$\mathcal{H} = \int \varphi (R) \, dx$$

En faisant le calcul de

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{Q \partial}{k \partial t}$$

on trouve cette fois :

$$\mathcal{T}'_{nc} = \int [\varphi'(R) - \varphi'(R_0)] \varnothing (R) \, dx,$$

soit dans la statistique de Boltzmann :

$$\mathcal{T}'_{nc} = \int \log (1 + \eta) \varnothing (R) \, dx$$

et, si η est petit :

$$\mathcal{T}'_{nc} = \int \eta \mathcal{D}(\mathbf{R}) dx$$

L'expression est différente de celle de tout à l'heure mais, en tous cas, on ne peut toujours pas se prononcer sur le signe de \mathcal{T}'_{nc} , donc démontrer le second Principe.

La conception de la Mécanique Statistique n'est pas conforme à celle de la thermodynamique : l'entropie n'est plus une *fonction d'état* car \mathbf{R} , dans un état dérangé, dépend d'autres variables que l'énergie et la densité : il dépend des dérivées de celles-ci et des gradients de la vitesse d'ensemble.

13. Critique des rapports de la probabilité et de l'entropie. On a voulu assimiler l'entropie à la probabilité, en se basant sur deux propositions :

a) l'une, est ce principe de la thermodynamique selon lequel l'entropie d'un système thermiquement isolé ($Q\delta=0$) ne peut décroître.

b) l'autre est l'affirmation qu'un système isolé évolue spontanément vers des états de plus en plus probables.

La première proposition n'est pas la formulation la plus générale du Second Principe ; celle-ci est que la transformation non compensée n'est jamais négative.

Quant à la seconde, personne ne doute que ce soit une évidence ; pourtant ce n'est pas ce qu'il y paraît lorsqu'on regarde les choses de près.

Il y a lieu de distinguer deux faits en ce qui concerne la variation de la probabilité.

1°) Les fluctuations de la fréquence d'un évènement autour d'une probabilité existant *a priori*, comme la probabilité d'amener face avec une pièce de monnaie rigoureusement symétrique.

2°) L'évolution dans le temps de cette probabilité *a priori*, par exemple par l'usure de la pièce de monnaie.

Au sujet du premier, la loi des grands nombres nous apprend seulement que les fréquences tendent vers les probabilités, de telle sorte que la probabilité d'une fluctuation est d'autant plus faible que la fluctuation est grande. Si parmi les évènements possibles, il y en a un dont la probabilité est énormément plus grande que celle de tous les autres, c'est seulement cet évènement que l'on observera en pratique, de sorte que pour déterminer une répartition réelle, il est logique d'écrire

qu'elle correspond à un maximum de probabilité (méthode de la théorie cinétique pour déterminer la loi de Maxwell).

Mais il en va tout autrement du second fait : l'augmentation avec le temps de la probabilité a priori. Aucun principe du Calcul des probabilités ne nous permet d'affirmer qu'elle augmente systématiquement. Ainsi, si d'une urne contenant des boules blanches et des boules noires, nous faisons des extractions en remettant la boule dans l'urne quand elle est noire, en la conservant quand elle est blanche (intervention d'un agent extérieur), la probabilité d'extraction d'une blanche ira en diminuant. Au contraire, si l'on remet dans l'urne les boules extraites (ce qui semble être l'image d'un système isolé sans intervention d'un agent extérieur), la probabilité a priori d'extraction d'une blanche demeurera invariable.

Ce qui paraît le plus naturel d'admettre, c'est que la probabilité d'un système isolé demeure invariable. Et c'est bien le résultat que nous donne le schéma du corpuscule aléatoire dérivable en moyenne quadratique, quand il y a conservation de l'extension en phase. Ce n'est donc pas dans la probabilité que l'on doit chercher l'image de l'entropie, mais dans quelqu'autre qualité de la distribution qui varie alors même que la probabilité reste constante.

D'où vient donc cette assimilation tellement classique qu'on la trouve dans tous les ouvrages élémentaires de Physique, de l'entropie au logarithme de la probabilité ? Nous n'en voyons guère que deux présomptions :

a) Le fait que Boltzmann établit que le logarithme de la probabilité (à une Cte près) :

$$\mathcal{H} = - \int R \log R \, d\omega$$

a, lorsque $R = \rho f\omega$, $f\omega$ étant la loi de Maxwell, la même expression $\rho \log (k^{3/2} \rho^{-1}) \, d\omega$ que la thermodynamique donne, d'autre part, de l'entropie d'un gaz.

b) Un «raisonnement» de Max Planck, qui est le suivant.

L'entropie est additive, donc si nous avons deux systèmes :

$$S_{12} = S_1 + S_2$$

Les probabilités se combinent par produit :

$$P_{12} = P_1 P_2$$

Donc si $S = f(P)$, f satisfait à l'équation fonctionnelle :

$$f(P_1 P_2) = f(P_1) + f(P_2)$$

et par conséquent :

$$S = k \log P$$

k étant > 0 , car S et P varient dans le même sens.

Qui ne se rend compte que l'on commet ici encore une fois l'erreur de presque toutes les applications du Calcul des Probabilités à la Physique : celle d'appliquer le théorème des probabilités composées comme si les probabilités composantes étaient indépendantes ? En réalité, tout ce que nous avons le droit d'écrire, en général, est :

$$f(P_{12}) = f(P_1) + f(P_2).$$

P_{12} étant une quantité qui ne résulte en aucune manière de P_1 et de P_2 , on ne peut déduire de là, la forme fonctionnelle de f .

Qui plus est : ce n'est pas parce que deux grandeurs sont fonctions (même non décroissantes) du temps, qu'en éliminant le temps, on trouvera entre S et P une relation fonctionnelle simple. On doit d'autant plus en douter que, dans la théorie cinétique — P est une fonction en « escalier » qui augmente d'une marche chaque fois qu'un choc s'est produit entre deux molécules, tandis qu'en thermodynamique, S est une fonction d'état (c'est à dire des paramètres macroscopiques définissant le gaz) variant continûment avec le temps.

14. L'entropie et l'incertitude. Dans le Schéma du corpuscule aléatoire, la probabilité de configuration est constante dans le temps. Ce n'est donc pas dans la croissance de cette probabilité qu'il faut chercher une explication de l'augmentation d'entropie. L'entropie est liée à une qualité de la configuration qui varie même lorsque celle-ci conserve sa probabilité. Nous allons voir que c'est l'*incertitude*.

Soit un corpuscule aléatoire ayant une densité ρ et un module k uniformes : ce pourra être une particule infiniment petite, découpée au sein d'un corpuscule pourvu d'un champ.

Son entropie est :

$$S = \log(k^{3/2} \rho^{-1})$$

$k = \frac{\overline{U^2 + V^2 + W^2}}{3}$, la moyenne étant prise avec la fonction R .

Mais on peut tout aussi bien la considérer prise avec la fonction R_0 (égalité de l'énergie dans les deux états).

Donc

$$k = \overline{U^2}^0$$

$k^{3/2}$ est alors le produit des incertitudes $s_1 s_2 s_3$ sur les composantes de la vitesse (calculées avec R_0).

Montrons que ρ^{-1} est proportionnel au produit $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ des incertitudes sur les coordonnées.

Supposons la particule cubique, d'arête $2l$.

On a :

$$\sigma_1^2 = \rho l^2 \int_{-l}^l x^2 dx = \frac{2}{3} \rho l^5$$

d'où¹ :

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \approx \rho^{3/2} l^{15/2}$$

D'autre part, la masse M est égale à $8 \rho l^3$

Eliminant l , il vient :

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \approx M^{15/2} \rho^{-1} \approx \rho^{-1}$$

Ainsi :

L'entropie d'un corpuscule aléatoire est le produit des incertitudes sur chaque couple coordonnée-vitesse (les incertitudes étant calculées avec la fonction de distribution de l'état R_0 tangent).

En tous cas, l'augmentation de l'entropie est liée à l'étalement de la distribution dans l'extension en phase. Nous trouvons là — indépendamment de toute considération de probabilité — l'idée fondamentale que la qualité de l'énergie que mesure l'entropie est son *degré de concentration*. Dire que l'énergie se dégrade c'est dire qu'elle se dilue.

Le minimum d'incertitude étant, en Mécanique Quantique, égal à $\frac{h}{4\pi}$ il est assez naturel de définir l'entropie d'un corpuscule à un seul

degré de liberté par l'expression :

$$S = \log \frac{4\pi \sigma s_1}{h}$$

qui est nulle lorsque l'incertitude est minima et, hors ce cas, toujours positive.

15. Minimum de dissipation. Pour expliciter les équations de la Mécanique du Corpuscule aléatoire, il nous faut connaître la fonction de distribution :

$$R = R_0 (1 + \eta)$$

dans un état dérangé.

R_0 est la fonction de distribution de l'état «tangent», c'est-à-dire de l'état de même énergie, de même densité, correspondant en chaque

¹ Le signe \approx veut dire : «proportionnel à».

point au maximum de probabilité. On sait que dans la Statistique de Boltzmann :

$$R_0 = \rho f_0,$$

f_0 étant la loi de Maxwell :

$$f_0 = (2\pi k)^{-3/2} \frac{e^{-c'^2}}{2k} \quad (c'^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2)$$

De même qu'en Mécanique rationnelle, le mouvement réel d'un système jouit par rapport aux mouvements virtuels permis par les liaisons, de la propriété de rendre stationnaire l'intégrale d'action, il doit y avoir pour un état dérangé réel une propriété analogue qui permette de déterminer la fonction η .

Nous postulons que cette propriété est le « *Minimum de dissipation* »¹. Cette induction n'est vérifiable que par ses conséquences.

Un corpuscule aléatoire étant dans un état dérangé, caractérisé par la fonction de distribution :

$$R = \rho f = \rho f_0 (1 + \eta),$$

le taux de variation de la transformation non compensée en un point, est :

$$\frac{\partial \bar{G}_{nc}}{\partial t} = - \int f \frac{d}{dt} \log(\rho f_0) d\omega$$

L'expression détaillée de $\frac{d}{dt} \log(\rho f_0)$ est la suivante² :

$$\begin{aligned} - \frac{d}{dt} \log(\rho f_0) &= \left(\frac{3}{2} - \frac{c'^2}{2k} \right) \frac{d_0 \log k}{dt} - \mathcal{S} \frac{u'}{k} \left[\frac{d_0 u_0}{dt} - \bar{A} + k \frac{\partial s}{\partial x} \right] + \\ &+ \theta - \frac{1}{k} \left[u'^2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \dots + v' w' \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial z} \right) + \dots \right] - \mathcal{S} \frac{u' c'^2}{2k} \frac{\partial \log k}{\partial x}. \end{aligned}$$

θ désigne, pour abrégier l'écriture, la divergence de la vitesse d'ensemble :

$$\mathcal{S} \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

¹ Nous avons eu l'idée d'une Principe de Moindre dissipation, vers 1931, et en avons fait des applications à la Rotation du Soleil et à la Circulation générale de l'Atmosphère.

Voir par exemple : CRAS — 3 déc. 1934.

² Pour rendre les formules plus lisibles, nous désignons ici par u_0, v_0, w_0 , les composantes de la vitesse d'ensemble du fluide, appelées jusqu'à présent $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$.

\overline{A} désigne la moyenne doublement liée de l'accélération pour une « cellule » position-vitesse donnée. C'est en général une fonction de (x, y, z, u, v, w, t) qui nous est inconnue. Nous ferons l'hypothèse que (A, B, C) et (U, V, W) ne sont pas corrélées ; alors \overline{A} s'identifiera avec la moyenne simplement liée \overline{A} , qui représente en fait, la force extérieure agissant sur le corpuscule aléatoire (ou plus précisément sur les éléments du fluide équivalent). Cette hypothèse entraîne la *conservation de l'extension en phase*.

On voit d'abord que :

$$\int f_0 \frac{d}{dt} \log(\rho f_0) d\omega$$

est nul, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\partial \overline{C}_{nc}}{\partial t} = - \int f_0 \eta \frac{d}{dt} [\log(\rho f_0)] d\omega$$

Nous allons écrire que l'état tangent étant donné (c'est-à-dire les fonctions ρ et k), la fonction inconnue η réalise le minimum de cette expression, compte tenu des conditions adjointes suivantes :

1°) $\int f_0 \eta d\omega = 0$ (conséquence du théorème des probabilités totales).

2°) $\int f_0 \eta c'^2 d\omega = 0$ (qui exprime que le fluide dans l'état tangent a la même énergie en chaque point que le fluide dans l'état dérangé).

3°) $\int f_0 \eta u' d\omega = \int f_0 \eta v' d\omega = \int f_0 \eta w' d\omega = 0$ (qui exprime que u', v', w' sont les vitesses d'agitation en chaque point).

4°) $-\int f_0 (1 + \eta) \log(1 + \eta) d\omega = C^{nc}$

Cette dernière condition signifie que les fluides virtuels appelés en comparaison ont, en chaque point, même probabilité. En effet celle-ci a pour logarithme :

$$H = - \int f \log f d\omega = - \int f_0 \log f_0 d\omega - \int f_0 (1 + \eta) \log(1 + \eta) d\omega$$

or $H_0 = - \int f_0 \log f_0 d\omega$ est le même pour tous les fluides comparés, en raison des conditions adjointes 1°) et 2°).

La condition de minimum s'écrit :

$$\log(1 + \eta) = \tau \left[- \frac{d}{dt} \log(\rho f_0) + \lambda + \mu c'^2 + au' + bv' + cw' \right]$$

$\tau, \lambda, \mu, a, b, c$, sont des multiplicateurs de Lagrange qui peuvent, en général, être fonctions du point (x, y, z) et même du temps t .

Nous attirons l'attention sur la *grandeur* τ , qui a les dimensions d'un temps et qui confère au corpuscule aléatoire une propriété «temporelle» qui n'existe pas chez le point matériel de la Mécanique.

Le problème de minimum que nous nous sommes posés est entièrement déterminé puisqu'il suffit maintenant de calculer les multiplicateurs de Lagrange par les conditions adjointes. Cependant ce problème est difficile à résoudre directement en termes finis, à cause de la forme $\log(1+\eta)$. On doit procéder par approximations. Nous nous contenterons ici de la première: celle où η étant assez petit, on peut remplacer $\log(1+\eta)$ par η .

Les conditions adjointes donnent alors :

$$1^{\circ}) \quad \lambda + 3\mu k = 0$$

$$2^{\circ}) \quad a = \frac{5}{2} \frac{\partial \log k}{\partial x} + \frac{1}{k} \left(\frac{d_0 u_0}{dt} - \bar{\Lambda} + k \frac{\partial S}{\partial x} \right); \quad b = \dots; \quad c = \dots$$

$$3^{\circ}) \quad -2 \frac{d_0 s}{dt} + 3(\lambda + 5\mu k) = 0$$

Ces équations déterminent λ, μ, a, b, c , par les formules :

$$1^{\circ}) \quad \lambda = -\frac{d_0 s}{dt}$$

$$2^{\circ}) \quad a \text{ comme ci-dessus.}$$

$$3^{\circ}) \quad \mu = \frac{1}{3k} \frac{d_0 s}{dt}$$

Et l'on trouve :

$$\eta = -\frac{\tau}{k} \left\{ \left[\left(u^2 - \frac{c'^2}{3} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} + \dots + v' w' \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial z} \right) + \dots \right] \right. \\ \left. + S u' \left(\frac{5}{2} - \frac{c'^2}{2k} \right) \frac{\partial \log k}{\partial x} \right\}$$

Quant à τ , on peut en avoir une expression au moyen de la condition 4^o) qui, à l'approximation consentie, s'écrit :

$$H_0 - H = \frac{1}{2} \int f_0 \eta^2 d\omega = \frac{1}{2} \tau^2$$

Cela donne :

$$H_0 - H = \frac{\tau^2}{2} \left[\frac{3}{2} S \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + S \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \rho^2 + \frac{5}{2k} \left(\frac{\partial k}{\partial x} \right)^2 \right]$$

C'est — aux coefficients près — la formule donnée par Boltzmann, dans ses *Leçons sur la théorie dynamique des gaz* (traduction française, tome I, 1908, p. 182).

La quantité entre crochets est la somme Φ des fonctions dissipatives mécanique Φ_m et thermique Φ_k . On voit qu'elle est essentiellement positive (ou nulle), en la mettant sous la forme :

$$\frac{2}{3} S \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + S \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{5k}{2} \left(\frac{\partial \log k}{\partial x} \right)^2$$

Une expression approchée de τ est :

$$\tau = \sqrt{\frac{2(H_0 - H)}{\Phi}}$$

Calculons l'expression approchée de $\frac{\partial \bar{\mathcal{C}}_{nc}}{\partial t}$; pour cela prenons la moyenne de la condition de minimum, avec la fonction f . On obtient :

$$\int f \log(1 + \eta) d\omega = \tau \frac{\partial \bar{\mathcal{C}}_{nc}}{\partial t} + \lambda + 3\mu k$$

Prenons d'autre part cette moyenne avec la fonction f_0 ; cela donne :

$$\int f_0 \log(1 + \eta) d\omega = \lambda + 3\mu k$$

d'où par soustraction :

$$\tau \frac{\partial \bar{\mathcal{C}}_{nc}}{\partial t} = \int f_0 \eta \log(1 + \eta) d\omega = \bar{\eta}^2 + \dots$$

Le second membre est, en tous cas, positif car $\eta \log(1 + \eta) > 0$ quel que soit le signe de η . Mais cela ne nous permet pas de conclure sur le signe de $\frac{\partial \bar{\mathcal{C}}_{nc}}{\partial t}$ car, rien dans notre calcul ne nous permet de décider du signe de τ . C'est seulement en invoquant le Second principe que nous reconnaissons que τ doit être positif.

De τ , on peut encore donner l'expression approchée suivante :

$$\tau = \frac{2(H_0 - H)}{\left(\frac{\partial \overline{\mathcal{C}}_{nc}}{\partial t}\right)}$$

Enfin $\overline{\mathcal{C}}_{nc}$ et la fonction dissipative Φ sont liés par la relation :

$$\frac{1}{\tau} \frac{\partial \overline{\mathcal{C}}_{nc}}{\partial t} = \Phi$$

ce qui légitime d'appeler : principe de moindre dissipation, un principe qui consistait au début à écrire le minimum du taux de variation de la transformation non compensée.

Le principe de moindre dissipation qui, appliqué à chaque particule du fluide, nous a permis de déterminer la fonction de distribution des vitesses dans un état dérangé, peut ensuite être appliqué au fluide entier (minimum de l'intégrale $\frac{1}{2} \int \tau^2 \Phi d\omega$), moyennant des conditions adjointes convenables. Il permet alors de déterminer le champ macroscopique des vitesses (u_0, v_0, w_0) et le champ du module d'énergie (k) du fluide¹.

16. Moindre dissipation et maximum de probabilité. On sait que les questions d'extrémum liés (c'est-à-dire avec des conditions adjointes) donnent lieu à plusieurs problèmes mathématiquement équivalents lorsqu'on assujettit l'intégrale qui doit être extréma, à garder une valeur constante donnée et qu'on décide que sera extréma une des intégrales qui, dans le problème primitif, devait garder une valeur donnée fixe.

Par conséquent, nous aurions pu, sans en changer la solution, présenter ainsi notre problème de calcul des Variations :

L'intégrale :

$$\int f_0(1 + \eta) \log(1 + \eta) d\omega$$

¹ Voir à ce sujet :

G. Dedeabant, Ph. Schereschewsky et Ph. Wehrlé : Sur une classe de mouvements naturels des fluides visqueux caractérisés par un minimum de puissance dissipée. Cas du soleil (CRAS — 3 déc. 1934).

Théorie de la Circulation générale de l'Atmosphère — Le champ moyen de température (CRAS — 29-7-1935).

Théorie de la Circulation générale de l'Atmosphère : La loi de rotation et le champ de pression (CRAS — 19-8-1935).

qui représente $(H_0 - H)$ est *maxima*, avec les conditions adjointes suivantes :

$$1.^{\circ}) \quad \int f_0 \eta d\omega = 0$$

$$2.^{\circ}) \quad \int f_0 \eta c'^2 d\omega = 0$$

$$3.^{\circ}) \quad \int f_0 \eta u' d\omega = \int f_0 \eta v' d\omega = \int f_0 \eta w' d\omega = 0$$

$$4.^{\circ}) \quad - \int f_0 \eta \frac{d}{dt} \log(\rho f_0) d\omega = c^{te} = \frac{\partial \mathcal{C}_{nc}}{\partial t}$$

Le problème ainsi posé signifie que l'état dérangé réel représente un maximum de probabilité par rapport à tous les états dérangés virtuels admettant le même état de Maxwell (ρf_0) tangent et le même taux de variation $\left(\frac{\partial \mathcal{C}_{nc}}{\partial t}\right)$ de la transformation non compensée.

C'est cette dernière condition adjointe qui est cause que la loi de Maxwell ne peut réaliser le maximum de probabilité (car pour elle $\frac{\partial \mathcal{C}_{nc}}{\partial t} = 0$; elle ne satisfait donc pas à la condition adjointe posée).

Le problème étant pris sous cet aspect, il saute aux yeux que le maximum de probabilité réalisé par un état réel (et que l'on doit considérer, comme une évidence statistique — cet état étant alors énormément plus fréquent que les autres, donc le seul à se manifester effectivement à notre observation —) est une propriété absolument étrangère à l'évolution d'un système vers des états de plus en plus probables (ce qui n'est en aucune manière une évidence, et qui, plus est, est inexact).

Nous avons vu que l'on peut écrire, pour le maximum de probabilité (état réel) :

$$H = H_0 - \frac{\tau}{2} \frac{\partial \mathcal{C}_{nc}}{\partial t}$$

d'où — à supposer même τ indépendant du temps — :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H_0}{\partial t} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{nc}}{\partial t^2}$$

Si la particule garde une densité et une énergie (k) constantes, on a seulement :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{nc}}{\partial t^2}$$

L'évolution vers des états de plus en plus probables correspond donc à :

$$\frac{\partial^2 \overline{C}_{nc}}{\partial t^2} \leq 0$$

Cette condition n'a rien à voir avec le Second Principe qui réclame :

$$\frac{\partial \overline{C}_{nc}}{\partial t} \geq 0$$

mais n'impose aucune espèce de condition à la variation seconde de \overline{C}_{nc}

17. Explicitation des équations du mouvement. En possession de la fonction de distribution des vitesses dans un état dérangé, il nous est facile d'expliciter complètement les équations du mouvement et l'équation d'énergie du corpuscule aléatoire, qui ne sont autres d'ailleurs que les équations des fluides.

Rappelons d'abord pour mémoire l'équation de continuité pour laquelle il n'est pas besoin de connaître f :

$$\frac{d_0 \log \rho}{dt} + \sum \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0$$

Pour les équations du mouvement, il nous faut calculer le tenseur des moments rectangles des composantes de la vitesse. On trouve :¹

$$\rho \left(\overline{u'^2} - \frac{c'^2}{3} \right) = -\nu \left(2 \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{2}{3} \sum \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)$$

$$\rho \overline{U'V'} = -\nu \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \dots$$

On a posé :

$$\nu = \rho k \tau$$

Cette grandeur s'identifie avec le coefficient de *viscosité cinématique*. Les équations du mouvement sont :

¹ Tous ces calculs nécessitent la connaissance des moments de la loi de Maxwell. Voici les formules nécessaires :

$$\overline{U'^2} = \overline{V'^2} = \overline{W'^2} = k; \quad \overline{C'^2} = 3k; \quad \overline{U'^4} = 3k^2; \quad \overline{U'^2 V'^2} = k^2; \quad \overline{U'^2 C'^2} = 5k^2 \quad \overline{C'^4} = 15 k^2.$$

$$\frac{d_0 u_0}{dt} = \overline{A} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) \right] - \frac{2}{3\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\nu \theta) \\ + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right]$$

et deux analogues.

On a posé :

$$p = k\rho$$

D'après les équations du mouvement, p s'identifie avec la pression et la formule qui la définit n'est autre que la formule des gaz parfaits.

$$\theta = \int \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

est la dilatation cubique.

\overline{A} s'identifie à la force extérieure.

Dans les cas où ν ne dépend pas de (x, y, z) , les équations du mouvement prennent la forme de *Navier-Stokes* :

$$\frac{d_0 u_0}{dt} = \overline{A} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{\rho} \Delta u_0 + \frac{1}{3} \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

L'équation d'énergie nécessite le calcul de $\overline{U' C'^2}$; on trouve :

$$\overline{U' C'^2} = -5 \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial k}{\partial x}$$

d'où l'équation :

$$\frac{d_0 s}{dt} - \frac{5}{2\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \log k}{\partial x} \right) = \frac{\nu}{p} \left[2 \int \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \int \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \theta^2 \right] + \\ + \frac{5\nu}{\rho} \int \left(\frac{\partial \log k}{\partial x} \right)^2$$

Le second membre est la fonction dissipative.

S'il n'y a pas de mouvement d'ensemble : $u_0 = v_0 = w_0 = 0$, et que ν soit constant, on retrouve l'équation de la chaleur de Fourier :

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{5\nu}{3\rho} \Delta k$$

Le coefficient de conductibilité est les $\frac{5}{3}$ du coefficient de viscosité.

On eut trouvé évidemment d'autres rapports avec un corpuscule aléatoire doué de plus de 3 degrés de liberté.

Les équations qui viennent d'être écrites, ne sont pas nouvelles dans leur forme. Les méthodes de l'énergétique, d'une part, de la théorie cinétique d'autre part, permettent de les établir.

L'intérêt de la Mécanique aléatoire, outre son élégance, est son extrême généralité.

Si l'on y réfléchit, deux bases seulement ont été mises en oeuvre :

1°) une base mathématique, qui est l'hypothèse de la dérivabilité en moyenne quadratique.

2°) une base physique : le principe de moindre dissipation. Imitant en cela la Mécanique Statistique de Gibbs qui se refuse à adopter la représentation concrète des molécules comme étant de petites sphères élastiques et raisonne sur des « systèmes », les résultats obtenus, sont entièrement indépendants de la nature des objets étudiés et s'appliquent en particulier aux mouvements des fluides comportant des « étages turbulents ». Ils s'adaptent aussi bien à une structure intime *continue* que *discontinue*, des fluides.

Pourtant l'extension des équations de Navier Stokes aux mouvements turbulents a généralement peu réussi. Nous en voyons trois raisons principales :

1°) la mauvaise définition de la turbulence et la confusion de ses différents étages. Avant d'appliquer des équations, il est indispensable de disposer d'instruments qui mesurent correctement les grandeurs physiques qui figurent dans ces équations.

2°) la grande variabilité dans l'espace, du coefficient de viscosité turbulente, principalement à partir d'une paroi. Il faut donc prendre garde à ne pas remplacer systématiquement ν par une constante.

3°) la non-isotropie de la turbulence au voisinage d'une paroi, qui a pour conséquence que le module d'énergie k qui est un scalaire, doit être remplacé par une grandeur de caractère tensoriel.

18. Equation du « son » pour le corpuscule aléatoire. Soit un corpuscule aléatoire dans l'état de Maxwell. Son état est défini par les paramètres macroscopiques ρ_0 et k_0 , qui sont uniformes dans tout le fluide équivalent.

Imaginons que nous fassions subir au corpuscule une « perturbation sonore », c'est à dire que nous modifions en chaque point ρ_0 et k_0 , de sorte que les dérivées d'espace soient négligeables par rapport aux dérivées de temps.

Dans ces conditions, la loi de Maxwell subsiste: ses paramètres sont seulement devenus des fonctions du temps. L'équation d'énergie se simplifie alors considérablement car toutes les variations par rapport à x, y, z sont négligeables.

Il reste $\frac{d_0 s}{dt} = 0$ qui se réduit à $\frac{\partial s}{\partial t} = 0$ puisqu'on néglige les dérivées d'espace devant les dérivées de temps.

On a donc :

$$k^{3/2} \bar{\rho}^{-1} = k_0^{3/2} \bar{\rho}_0^{-1} = c^{10}$$

dans tout l'espace.

Considérons d'autre part, l'équation aux dérivées partielles du 2.^o ordre en ρ , que nous avons obtenue dans la 1.^{ère} Partie, comme conséquence de la double dérivabilité de X, Y, Z , soit :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \sum \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\overline{X^2} \rho) - \sum \frac{\partial}{\partial x} (\overline{X} \dot{\rho})$$

Les \overline{X} étant nulles dans l'état de Maxwell, l'équation se réduit à :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \sum \frac{\partial^2}{\partial x^2} (k \rho)$$

D'autre part, en vertu de l'équation d'énergie, k est proportionnel à $\rho^{2/3}$ donc :

$$\rho k = \rho_0 k_0 + \frac{5}{3} k_0 (\rho - \rho_0)$$

d'où finalement :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{5}{3} k_0 \Delta \rho$$

Ainsi la perturbation de densité se propage avec la vitesse :

$$a_0 = \sqrt{\frac{5k}{3}}$$

Dans le cas de la théorie cinétique, on reconnaît là, la vitesse du son de Laplace (k étant proportionnel à la température absolue). Mais nous voyons de plus qu'une perturbation de densité, apportée dans un « étage de turbulence », se propage avec une vitesse correspondant au module d'énergie de l'étage.

Ce fait est susceptible d'offrir à la Météorologie dynamique une explication de la vitesse de déplacement des grandes perturbations qui est de l'ordre de 60 km/h. Ces perturbations seraient considérées comme

une «turbulence de grande échelle» de la Circulation générale de l'Atmosphère et leur vitesse de propagation serait alors de l'ordre de la vitesse des vents. L'hydrodynamique classique ne connaît que les ondes sonores proprement dites, ces dernières ayant une vitesse d'un ordre de grandeur énormément plus grand que celui qu'il s'agit d'expliquer.

VIII—LA CONNEXION DU CORPUSCULE ALEATOIRE

19. Sens physique et définition de la connexion. On sait qu'il n'est pas possible d'attribuer aux gaz une structure intime continue, sans quoi on n'expliquerait pas leur compressibilité. Le plus ou moins grand degré de «cohésion» d'un gaz peut se concevoir comme mesuré par la distance moyenne qui sépare ses molécules, notion qui se rattache à celle de *temps de libre parcours* τ , temps moyen séparant deux chocs successifs. Les coefficients de diffusion, de viscosité, de conductibilité d'un gaz, dépendent essentiellement de ce temps τ . La conception de *milieux continus* (comme les liquides incompressibles et les solides rigides) exclut entièrement une telle notion (τ étant alors nul).

Au contraire, elle est naturellement incluse dans la conception du corpuscule aléatoire où, sous le nom de «*connexion*», elle apparaît dans toute sa généralité et se prête à une analyse détaillée.

La connexion est intimement liée aux lois de probabilité en deux points, comme on s'en aperçoit tout de suite en se référant au «schéma des libres parcours» cité en exemple dans la 1ère Partie, pour lequel on a établi que

$$r(h) = 1 - \Phi(|h|)$$

$r(h)$, étant le coefficient de corrélation entre les vitesses du corpuscule en deux instants séparés par l'intervalle h , et $\Phi(\theta)$, la fonction de répartition des libres parcours.

Définissons d'une manière générale ce que nous entendons par connexion de deux variables aléatoires.

Soient $F_1(u_1)$ et $F_2(u_2)$, leurs lois de probabilité individuelles. On crée une dépendance de probabilité entre U_1 et U_2 en choisissant la loi conjuguée :

$$F_{12}(u_1, u_2) = F_1(u_1)F_2(u_2) + L(u_1, u_2)$$

$L(u_1, u_2)$ s'appelle la *fonction lien*.¹ Lorsqu'elle est identiquement nulle, les variables aléatoires U_1 et U_2 sont indépendantes et réciproquement.

¹ Cette dénomination est due à Mr. Kamp de Fériet.

Nous dirons que la fonction lien exprime la connexion entre les variables aléatoires U_1 et U_2 . La loi conjuguée F_{12} contient bien l'idée de connexion, mais pas à l'état pur: elle la mélange avec les lois de probabilité individuelles.

Pour obtenir une *mesure* de la connexion, nous considérerons le coefficient de corrélation :

$$r = \frac{\overline{U_1' U_2'}}{\sqrt{\overline{U_1'^2}} \sqrt{\overline{U_2'^2}}}$$

20. Lois de probabilité dans un fluide. Nous ne diminuerons pas la portée des idées qui vont suivre et nous en faciliterons la compréhension, en réduisant l'espace à une seule dimension, ce qui revient en somme à employer une notation abrégée consistant à condenser l'écriture de plusieurs coordonnées en un symbole unique.

Soit X/t un corpuscule aléatoire et $U = \dot{X}/t$, sa vitesse, dérivée en moyenne quadratique de la fonction aléatoire X .

Représentons par : (x_1, u_1, x_2, u_2) la *loi de probabilité conjuguée des positions et des vitesses* aux instants t_1, t_2 c'est à dire la probabilité pour que le corpuscule se trouve à l'instant t_1 dans la «cellule» (x_1, u_1) , et à l'instant t_2 dans la «cellule» (x_2, u_2) .

C'est une fonction :

$$G_{12} = G(x_1, u_1, x_2, u_2; t_1, t_2)$$

de 4 variables x_1, u_1, x_2, u_2 qui sont les *valeurs courantes* de 4 variables aléatoires, et de *deux paramètres certains* : t_1 et t_2 . Pour bien distinguer les caractères de ces deux sortes de variables, nous avons écrit *d'abord* les valeurs courantes des variables aléatoires et les avons séparées par un *point-virgule* des paramètres certains, écrits *ensuite*.

Lorsque nous utiliserons la notation «parenthèses» — (x_1, u_1, x_2, u_2) — sans nommer par une lettre la fonction envisagée, nous omettrons d'écrire t_1 et t_2 ; on saura cependant par les indices des autres variables que ces paramètres figurent dans la fonction.

De la fonction G , on peut faire dériver toutes les lois de probabilité en deux points relatives au corpuscule (ou à son fluide équivalent), soit en supprimant une ou plusieurs variables — nous obtenons ainsi les autres *lois conjuguées* et, quand il ne reste plus qu'une variable, les *lois individuelles* —, soit en donnant à une ou plusieurs variables des *valeurs fixes* (c'est à dire en considérant ces variables non plus comme les valeurs courantes d'aléatoires, mais comme des paramètres certains) et alors nous obtenons les *lois liées*.

Tout un tissu de relations obtenues par l'application du théorème des probabilités totales et du théorème des probabilités composées, unit entre elles les diverses lois de probabilité dans un fluide. En particulier, toutes peuvent s'obtenir à partir de la loi génératrice G , par application répétée de ces deux théorèmes.

Il est commode de voir comment cette application opère sur les notations que nous avons introduites.

1°) Le *théorème des probabilités totales* se traduit par l'opération de « contraction ».

En sommant une loi par rapport à une variable courante, on obtient une loi ne contenant plus cette variable.

Ainsi :

$$(u_1, u_2; x_1) = \int (u_1, u_2, x_2; x_1) dx_2$$

Cette règle est la même que celle du Calcul Tensoriel, de la sommation par rapport aux indices muets. On peut en effet convenir d'omettre le signe \int et d'intégrer par rapport aux variables répétées dans l'élément différentiel, ce qui donne la notation simplifiée :

$$(u_1, u_2; x_1) = (u_1, u_2, x_2; x_1) dx_2$$

En appliquant plusieurs fois le procédé, on fait dériver de G n'importe quelle loi conjuguée ou individuelle.

Exemple :

$$(x_1) = (x_1, x_2) dx_2 = (x_1, x_2, u_1) dx_2 du_1 = (x_1, x_2, u_1, u_2) dx_2 du_1 du_2$$

2°) Le *théorème des probabilités composées* se traduit par le franchissement du point virgule.

Dans le quotient de deux lois, toute variable qui figure en haut et en bas à gauche du point virgule, passe à droite du point virgule dans la loi qui exprime le quotient.

Exemples :

$$(u_1, u_2, x_2; x_1) = \frac{(u_1, u_2, x_1, x_2)}{(x_1)}$$

$$(u_1, u_2; x_1, x_2) = \frac{(u_1, u_2, x_2, x_1)}{(x_2; x_1)}$$

$$(u_1, u_2; x_1, x_2) = \frac{(u_1, u_2, x_1, x_2)}{(x_1, x_2)}$$

Toute relation existant entre les lois de probabilité dans un fluide peut s'obtenir par combinaison et répétition des deux opérations qui viennent d'être décrites.

Exemple :

$$(u_1, u_2; x_1) = (u_1, u_2, x_2; x_1) dx_2 = (u_1, u_2; x_1, x_2)(x_2; x_1) dx_2$$

21. Nature des diverses lois de probabilité dans un fluide. Au point de vue de leur signification physique, les lois de probabilité dans un fluide sont de trois natures différentes :

a) *les lois corpusculaires* sont les lois conjuguées (non liées). Elles expriment la probabilité d'avoir un certain *état cinématique* (ou seulement géométrique) du corpuscule.

Elles dérivent toutes par contraction de la loi :

$$(x_1, u_1, x_2, u_2)$$

Ainsi :

$$(x_1, x_2) = (x_1, u_1, x_2, u_2) du_1 du_2$$

$$(x_1) = (x_1, x_2) dx_2$$

b) *les lois de champ* sont les lois liées correspondant à des valeurs fixées des coordonnées. Ainsi :

$$(u_1, u_2; x_1, x_2), (u_1; x_1)$$

c) *les lois de « transition » ou de « passage »* concernent la probabilité d'une certaine transformation de l'état du corpuscule : ce sont les lois liées dans lesquelles les variables situées d'un côté du point virgule ont toutes l'indice 1, et celles situées de l'autre côté, toutes l'indice 2.

Exemples :

$$(x_2, u_2; x_1, u_1) \quad (x_2; x_1)$$

Les lois de champ correspondent au point de vue d'*Euler* en hydrodynamique, et les lois de passage au point de vue de *Lagrange*.

Examinons un peu en détail les propriétés de la probabilité de passage :

$$(x_2; x_1) = P(x_2; x_1, t_1, t_2) = P_{12}$$

$P_{12} dx_2$ est la probabilité pour que le corpuscule qui, à l'instant t_1 se trouvait au point x_1 se trouve à l'instant t_2 dans un domaine dx_2 entourant le point x_2 .

On a :

$$(x_2; x_1) = \frac{(x_1, x_2)}{(x_1)}$$

La probabilité de passage est une notion pleine d'intérêt, largement utilisée dans la théorie du mouvement brownien et plus généralement, dans le problème des probabilités en chaîne.

Voyons sa signification hydrodynamique. Dans un fluide « certain », la méthode de Lagrange considère la position x_2 d'une particule à l'instant t_2 , comme une fonction certaine: $x_2(x_1, t_1, t_2)$ de la position x_1 occupée à l'instant t_1 par la particule.

En vertu de la continuité du fluide certain, la relation :

$$x_2 = x_2(x_1, t_1, t_2)$$

établit une correspondance *biunivoque* entre x_1 et x_2 , de sorte que les paramètres x_1 et t_1 permettent de repérer et d'identifier sans ambiguïté la particule dont on parle.

Au contraire, dans un fluide aléatoire, à la particule située en x_1 au temps t_1 correspond au temps t_2 non pas *une* particule, mais un *sous-ensemble* de particules dont la coordonnée x_2 est une fonction *aléatoire* : $x_2/x_1, t_1, t_2$ et qui se particularisera au sein des autres éléments du fluide par sa fonction de distribution :

$$P(x_2; x_1, t_1, t_2)$$

tandis que celle de l'ensemble des particules situées en x_2 au temps t_2 est :

$$\rho(x_2; t_2)$$

La probabilité de passage P nous permet donc de connaître parmi toutes les particules situées en x_2 au temps t_2 , la proportion de celles qui émanent de x_1 où elles étaient au temps t_1 .

La correspondance $x_2 \rightarrow x_1$ n'est plus *univoque* et c'est en cela que consiste la diffusion du fluide en lui-même, propriété essentielle des fluides naturels, que l'hydrodynamique classique passe sous silence, ce qui est la cause principale de ses insuccès.

22. Moyennes de Lagrange. a). Soit d'abord une fonction certaine de x et de t :

$$\Psi(x, t)$$

Considérons la comme attachée à l'élément fluide ayant la coordonnée x à l'instant t .

Au point x_1 , à l'instant t_1 , cette fonction a la valeur :

$$\Psi(x_1, t_1) = \Psi_1$$

Au temps t_2 , les éléments fluides qui étaient concentrés en x_1 à l'instant t_1 , ont diffusé et possèdent une coordonnée aléatoire X_2 .

Nous appellerons *moyenne de Lagrange* de Ψ , la moyenne de Ψ prise sur ces éléments X_2 qui émanent de x_1 .

C'est donc :

$$\widehat{\Psi} = \int P_{12} \Psi(x_2, t_2) dx_2$$

$\widehat{\Psi}$ est finalement une fonction de x_1 , t_1 et de t_2

La variation $(\widehat{\Psi} - \Psi_1)$ représente visiblement la variation de Ψ due à des actions extérieures, puisque *tous* les éléments ont été suivis dans leur diffusion.

Si l'on fait en particulier $\Psi = x$, on obtient la position du centre de gravité des éléments fluides qui ont diffusé à partir de x_1 :

$$\widehat{X} = \int P_{12} x_2 dx_2$$

Quant à leur dispersion, c'est :

$$\widehat{X^2} - (\widehat{X})^2 = \int P_{12} (x_2 - \widehat{X})^2 dx_2$$

b). Considérons maintenant une fonction certaine de (x, u, t) :

$$\Psi(x, u, t)$$

On peut définir sa moyenne de Lagrange dans l'espace généralisé [en considérant (x, u) comme un point], par l'intégrale :

$$\widehat{\Psi} = \int \pi_{12} \Psi(x_2, u_2, t_2) dx_2 du_2$$

où $\pi_{12} = (x_2, u_2; x_1, u_1)$ est la probabilité de passage d'une cellule de l'espace position-vitesse, à une autre. $\widehat{\Psi}$ est une fonction du point initial (x_1, u_1) , de l'instant initial t_1 et de l'instant final t_2 .

Si l'on fait maintenant la moyenne de $\widehat{\Psi}$ pour toutes les vitesses initiales u_1 , on obtient la moyenne de Lagrange proprement dite :

$$\widehat{\Psi} = \int \widehat{\Psi} \cdot (u_1; x_1) du_1 = \int Q_{12} \Psi_2 dx_2 du_2$$

avec

$$Q_{12} = (x_2, u_2; x_1)$$

Lorsque Ψ ne dépend pas de u , on peut effectuer l'intégration par rapport à u_2 et l'on retombe bien sur la moyenne de Lagrange définie plus haut pour une fonction de x et de t seulement.

Si Ψ ne dépend pas de x , on peut — au contraire — intégrer par rapport à x_2 et l'on obtient cette nouvelle forme de la moyenne de Lagrange d'une fonction des vitesses seulement :

$$\bar{\Psi} = \int \Phi_{12} \Psi_2 du_2$$

avec

$$\Phi_{12} = (u_2; x_1)$$

c). On comprend sans peine l'intérêt physique considérable que présentent les moyennes de Lagrange : elles permettent *littéralement* de *suivre* à travers le fluide — et cela malgré leur diffusion — tels éléments fluides que l'on désire. Ainsi, plaçons-nous en un point x : en ce point se trouve à un instant donné une *particule*. Plus tard, cette particule aura diffusé, à cause du *caractère aléatoire de la vitesse* et cessé d'être ponctuelle, ses éléments constituants (les *microparticules*) s'étant dispersés à travers le fluide. Pourtant, les moyennes de Lagrange permettront de calculer la valeur prise par une fonction qui lui était primitivement attachée, tout comme si l'on n'avait pas perdu de vue les éléments maintenant éparpillés de la particule.

Si au lieu d'un point x de l'espace, nous considérons un point (x, u) de l'espace généralisé, nous aurons une *cellule*. Les éléments qui la constituent (*molécules*) diffusent parce que l'accélération (pour une position et une vitesse donnée) est encore *aléatoire*¹. Les moyennes de Lagrange dans l'espace généralisé donnent cependant le moyen de calculer la valeur d'une fonction de x et de u attachée à ces éléments.

23. Diverses sortes de moyennes. Il importe naturellement de bien distinguer les *moyennes de Lagrange* (symboles \frown et \smile) des deux sortes de moyennes que nous avons déjà employées :

1°) Moyennes liées en un point de l'espace (symbole \sqcap), ou de l'espace généralisé (symbole \sqsupset), ou encore en deux points de l'espace (symbole ---), que nous pouvons appeler des *moyennes d'Euler*.

2°) Moyennes étendues à tout le corpuscule, ou *moyennes corpusculaires* (symbole ---).

Les moyennes corpusculaires sont d'un ordre supérieur aux moyennes de Lagrange et d'Euler, puisqu'elles suppriment toute condition liée; elles s'en déduisent par intégration.

¹ Ce n'est pas le cas pour une Mécanique aléatoire de Lagrange, dans laquelle on sait que \ddot{X} est une fonction certaine de \dot{X}, X, t .

Ainsi :

$$\overline{\Psi}_1 = \Psi_1 \cdot (u_1, x_1) dx_1 du_1 = \Psi_1 \cdot (u_1; x_1)(x_1) dx_1 du_1 = \overline{\Psi}_1 \cdot (x_1) dx_1 = \overline{\overline{\Psi}_1}$$

D'autre part, soit :

$$\widehat{\Psi}_1 = \Psi_2 \cdot (x_2; x_1) dx_2$$

on a :

$$\overline{\widehat{\Psi}_1} = \widehat{\Psi}_1 \cdot (x_1) dx_1 = \Psi_2 \cdot (x_1)(x_2; x_1) dx_1 dx_2 = \Psi_2 \cdot (x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \overline{\Psi}_2$$

24. Développement des moyennes de Lagrange. Les moyennes de Lagrange et celles d'Euler sont du même ordre; leurs relations sont compliquées et ne peuvent s'exprimer que sous forme d'un développement.

La moyenne de Lagrange d'une fonction de x, u, t :

$$\Psi(x, u, t)$$

est, ainsi que l'on vu plus haut :

$$\widehat{\Psi} = \Psi_2 \cdot (x_2, u_2; x_1) dx_2 du_2$$

Changeons ici légèrement nos notations pour abrégier l'écriture : l'instant initial t_1 sera l'instant zéro et l'indice 2 relatif au second état sera supprimé.

Supposons X/t analytique, de sorte que Ψ soit développable en série de Mac-Laurin :

$$\Psi(X, U, t) = \Psi_0 + t\dot{\Psi}_0 + \frac{t^2}{2}\ddot{\Psi}(0) + \dots$$

ou, symboliquement :

$$\Psi(X, U, t) = e^{(\cdot)} \Psi_0$$

L'opérateur «point» (\cdot) est la dérivation totale aléatoire par rapport à t (ou dérivation de Lagrange).

Il ne doit pas être confondu avec l'opérateur $\frac{d}{dt}$.

La différence entre ces deux opérateurs est en effet (pour une fonction de x et de u) :

$$(\cdot) - \frac{d}{dt} = \int (A - \overline{A}) \frac{\partial}{\partial u}$$

Elle disparaît seulement dans une Mécanique aléatoire de Lagrange (car alors A , fonction certaine de X, U, t , est égale à \overline{A}).

Prenons les moyennes des deux membres du développement de Ψ pour un point initial donné.

On obtient ainsi :

$$\overline{\Psi} = \overline{\Psi}_0 + t \overline{\dot{\Psi}}_0 + \frac{t^2}{2} \overline{\ddot{\Psi}}_0 + \dots = e^{t(\cdot)} \overline{\Psi}_0$$

On peut donc écrire d'une manière générale :

$$\overline{\Psi}^{(n)} = \left(\frac{\partial^n \overline{\Psi}}{\partial t^n} \right)_{t=0}$$

et, en particulier :

$$\overline{\dot{\Psi}}_0 = \left(\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial t} \right)_{t=0}$$

Cette formule nous conduit à une interprétation physique claire du second membre de l'équation de transfert :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \overline{\Psi}) + \sum \frac{\partial}{\partial x} (\rho \overline{\Psi U}) = \rho \overline{\dot{\Psi}}$$

Considérons à l'instant initial zéro, une particule ponctuelle, concentrée au point x_0 . A l'instant postérieur t , infiniment voisin, cette particule a diffusé autour du point moyen \widehat{X} , parce que les microparticules qui la composent n'ont pas la même vitesse. De plus, les éléments (molécules) qui composent une microparticule n'ont pas la même accélération : les points représentatifs ont diffusé dans l'espace des vitesses. Le point de vue de Lagrange consiste à *suivre* dans l'espace généralisé les éléments (molécules) qui composaient initialement la particule ponctuelle x_0 . La dérivée $\left(\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial t} \right)_0$ de la moyenne de Lagrange

est la variation de la moyenne d'une fonction de x et de u attachée à ces éléments. Notre analyse suivant strictement ceux-ci dans leur individualité — c'est-à-dire sans en perdre un seul de vue ni en laisser pénétrer d'étranger —, il va de soi que les causes de la variation $\left(\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial t} \right)_0$ ne peuvent provenir que d'*agents extérieurs* (par exemple champ de forces extérieur ; molécules échangeant de l'énergie avec le milieu ambiant).

Il faut bien souligner ce que l'analyse (aléatoire) de Lagrange a de remarquable : en dépit de la diffusion s'effectuant non seulement dans l'espace des positions, mais aussi dans l'espace des vitesses, elle per-

met de reconnaître au milieu du troupeau, tels individus antérieurement spécifiés. Dans la mécanique statistique classique, l'étalement de l'extension en phase finit par donner à la cellule initiale une forme extrêmement compliquée, mais qu'il est cependant possible d'enfermer dans une frontière. En Mécanique aléatoire, les éléments constitutifs d'une cellule initiale, se dispersent dans tout l'espace généralisé et s'imbriquent dans les autres d'une manière inextricable : seule la méthode *purement statistique des lois de probabilité liées* permet de les distinguer et de les soumettre au Calcul.

La relation :

$$\overline{\Psi}_0 = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)_{t=0}$$

va nous donner toutes précisions sur les principes de conservation implicitement contenus dans la Mécanique du corpuscule aléatoire deux fois dérivable. L'équation de continuité qui correspond à $\Psi=1$, est une évidence qui n'entraîne l'introduction d'aucun principe physique.

Dans les équations du mouvement, si l'on identifie la moyenne liée de l'accélération : \overline{A} à la force extérieure F_x , on exprime la loi physique :

$$\rho \left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} \right)_0 = \rho F_x,$$

qui signifie que la variation de la quantité de mouvement des éléments constituant une particule et suivis dans leur individualité, est égale à la force extérieure.

Enfin, l'équation d'énergie exprime que :

$$\left(\frac{\partial \frac{1}{2} \overline{C^2}}{\partial t} \right)_0 = S \overline{A \overline{U}} = S \overline{U} \overline{A} + S \overline{U' A'} = S u_0 F_x + S \overline{A' U'}.$$

Quand nous avons posé que : $S \overline{A' U'} = 0$ nous avons donc admis que les éléments du corpuscule satisfaisaient au théorème des forces vives autrement dit qu'ils étaient *parfaits*. Cela s'écrit, si l'on veut :

$$\left(\frac{\partial \frac{1}{2} \overline{C^2}}{\partial t} \right)_0 = 0$$

c'est à dire que l'énergie cinétique d'agitation (ou énergie interne) de la particule concentrée initialement en x_0 , se conserve lorsqu'on suit la particule dans toute son individualité.

Il pourrait ne pas en être ainsi, par exemple, si cette énergie d'agitation s'échangeait avec une autre forme d'énergie (telle que le rayonnement) contenue dans le milieu ambiant.

$\int \overline{A' U'}$ représente une « quantité de chaleur », mais alors que les quantités de chaleur considérées jusqu'à présent dans la Thermodynamique du Corpuscule étaient de l'énergie d'agitation qui sortait d'une particule ou y entrait par diffusion (ou perte d'individualité de cette particule) et demeuraient cependant de l'énergie d'agitation, la nouvelle quantité de chaleur correspond — maintenant que la particule conserve toute son individualité — à des transformations en une *autre* forme d'énergie :

En théorie cinétique, avec des chocs parfaits,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \overline{C^2} \right)_0$$

est bien nul ; en effet les molécules qui ne subissent pas de chocs conservent leur énergie cinétique et il en est de même pour les paires qui se choquent car, dans le point de vue de Lagrange, les molécules choquées continuent à appartenir à la *même* particule.

25. Champ aléatoire — Connexion cinématique a) *Fonction aléatoire de deux paramètres.*

Abandonnant pour un moment le corpuscule aléatoire dont les coordonnées n'étaient fonction que d'un seul paramètre certain : t , nous allons maintenant considérer une grandeur aléatoire Φ (un vecteur par exemple), qui soit fonction aléatoire de t et d'un point de l'espace. Φ constitue un *champ aléatoire*.

Pour simplifier l'exposé, supposons l'espace réduit à une seule dimension : x .

La notion de champ aléatoire nous amène à dire préalablement quelques mots d'une fonction aléatoire dérivable de deux paramètres certains x et t .

$\Phi/x, t$ admet une dérivée par rapport à x et une dérivée par rapport à t , s'il existe des fonctions aléatoires $\dot{\Phi}_x$ et $\dot{\Phi}_t$ telles que :

$$\left(\frac{\Phi/x+k, t - \Phi/x, t}{k} - \dot{\Phi}_x \right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\Phi/x, t+h - \Phi/x, t}{h} - \dot{\Phi}_t \right)^2$$

tendent vers zéro en même temps que k et h . Dans le cas de fonctions stationnaires analytiques, le coefficient de corrélation entre deux

valeurs de Φ se développe ainsi :

$$r(h, k) = 1 - \frac{1}{2\sigma^2} (S^2 k^2 + 2\rho ST hk + T^2 h^2) + \dots$$

σ étant l'écart type de Φ , S et T ceux de Φ_x et Φ_t et ρ le coefficient de corrélation entre Φ_x et Φ_t

La forme quadratique entre parenthèses est toujours définie positive car

$$\rho^2 \leq 1$$

Comme cela se passe dans le cas d'une fonction aléatoire d'un seul paramètre, on s'aperçoit que les conditions de cohérence sont satisfaites à la limite par la fonction :

$$r(h, k) = \cos(\omega h - \mu k)$$

et on en déduit que le coefficient de corrélation de la fonction Ana. Stat. la plus générale peut se mettre sous la forme :

$$r(h, k) = \overline{\cos(\Omega h - M k)} = \int \cos(\omega h - \mu k) d_{\omega, \mu} F(\omega, \mu),$$

F étant une fonction de répartition, ce qui étend au cas de plusieurs paramètres la forme que Khintchine a donnée pour un seul paramètre.

La fonction aléatoire la plus simple donnant un coefficient de corrélation de cette forme est l'onde aléatoire (extension bien naturelle de l'oscillateur aléatoire) :

$$\Phi = A \cos(\Omega t - Mx + \Psi)$$

où A est une Cte aléatoire de valeur probable nulle, Ω et M des constantes aléatoires, Ψ une cte aléatoire de distribution uniforme. A et Ψ sont indépendantes entre elles et indépendantes de Ω et de M. Ces dernières peuvent être corrélées.

b) *Connexion cinématique.*

La connexion de la fonction Φ , que nous appellerons *connexion cinématique*, peut être sommairement décrite par le moment rectangle :

$$\overline{\Phi \Phi'} = \int (\varphi, \varphi_1; x, t, x_1, t_1) \varphi \varphi_1 d\varphi d\varphi_1$$

Si Φ était un vecteur de l'espace à trois dimensions et de valeur probable non nulle, on considérerait le *tenseur de connexion cinéma-*

tique, associé à la forme bilinéaire :

$$\overline{(\Phi\Lambda)(\Phi_1\Lambda_1)} - \overline{(\Phi\Lambda)}\overline{(\Phi_1\Lambda_1)} = \sum \overline{A'A'}\lambda\lambda + \sum (\overline{A'B'}\lambda\mu_1 + \overline{A'B}\lambda_1\mu)$$

Λ et Λ_1 sont deux vecteurs certains arbitraires.

$(\Phi\Lambda)$ est un produit scalaire et $A' = A - \overline{A}$ etc., sont les composantes purement aléatoires du vecteur Φ .

Les moyennes : $\overline{\quad}$ sont des *moyennes d'Euler*, c'est-à-dire prises avec la fonction de distribution :

$$(\varphi, \varphi_1; x, t, x_1, t_1)$$

qui jouit des propriétés suivantes :

$$1^{\circ}) \quad (\varphi; x, t) = (\varphi, \varphi_1; x, t, x_1, t_1) d\varphi_1$$

c'est-à-dire qui est telle que l'intégration par rapport à φ_1 fait non seulement disparaître φ_1 , mais encore le groupe de paramètres certains : (x_1, t_1) .

$$2^{\circ}) \quad \text{Lorsque } x_1 \rightarrow x \text{ et } t_1 \rightarrow t, (\varphi, \varphi_1; x, t, x_1, t_1) \text{ tend vers } (\varphi; x, t).$$

L'intérêt physique de la connexion cinématique est qu'elle nous est donnée — expérimentalement parlant — par la méthode d'observation « en réseau » (celle qu'emploient les services météorologiques par exemple) et qui consiste à placer des instruments enregistreurs ou statistiques, en des points fixes.

Soit par exemple des enregistrements « fins » obtenus en deux points O et O_1 . Le moment rectangle $\overline{AA_1}$ s'estime par la somme des produits des valeurs successives de A en O_1 autour de l'instant t par les valeurs successives de A en O , autour de l'instant t_1 : c'est une « corrélation *différée* ».

Si l'on considère un seul instrument, celui placé en O par exemple, les moyennes \overline{A} ou $\overline{A^2}$ sont celles des valeurs de A (ou de A^2) autour de l'instant t . Elles sont identiques aux moyennes que nous avons déjà désigné par \overline{A} et $\overline{A^2}$. C'est cette identité qu'exprime la propriété signalée en 2°) de la fonction $(\varphi, \varphi_1; x, t, x_1, t_1)$.

La connexion cinématique comprend deux cas particuliers, soit que les points O et O_1 sont confondus, auquel cas nous l'appellerons *connexion locale* (ou connexion dans le temps), soit que les instants t et t_1 sont confondus et elle devient alors la *connexion géométrique* dont le tenseur a déjà été envisagé par de Kármán.

Il importe de remarquer que la donnée de la connexion géométrique et de la connexion locale ne suffisent pas à faire connaître la connexion cinématique, pas plus que la connaissance de ses dérivées par rapport à x et par rapport à t n'équivaut à celle d'une fonction de deux variables (x, t) : il faut encore connaître les dérivées mixtes par rapport à x et à t .

c). *Exemple de l'onde aléatoire.*

La connexion cinématique s'exprime par :

$$\overline{\Phi\Phi_1} = \frac{\overline{A^2}}{2} \overline{\cos(\Omega h - Mk)}$$

Pour $h=0$, on a la connexion géométrique: $\overline{\cos \Omega h}$ et pour $k=0$ la connexion locale: $\overline{\cos Mk}$. On voit bien que la donnée de ces deux connexions (qui ne contient que les lois individuelles de Ω et de M) ne suffit pas à faire connaître la connexion cinématique (qui contient la loi conjuguée de Ω et de M).

Pour $h \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$, $\overline{\Phi\Phi_1}$ tend vers $\frac{\overline{A^2}}{2}$ c'est-à-dire vers $\overline{\Phi^2}$ (qui est aussi $\overline{\Phi^2}$ en raison de la stationnarité).

Un cas particulier intéressant est celui où: $M = \pm \frac{\Omega}{c}$, c étant une constante certaine.

Alors :

$$r(h, k) = \overline{\cos \Omega \left(h \pm \frac{k}{c} \right)}$$

Et l'on voit qu'étant donnés deux points x et x_1 , si l'on choisit les instants t et t_1 de sorte que :

$$x_1 - x = \pm c(t_1 - t),$$

le coefficient de corrélation restera constamment égal à l'unité. Les enregistrements de la grandeur Φ en x et en x_1 coïncident avec un décalage de temps égal à $\pm \left(\frac{x_1 - x}{c} \right)$

Φ est donc une fonction aléatoire de la combinaison $(x \pm ct)$: c'est une grandeur qui se propage par onde.

Le coefficient de corrélation est une fonction de la combinaison $\left(h \pm \frac{k}{c} \right)$: c'est une onde — l'onde de corrélation — qui se propage avec la vitesse c .

Inversement, cherchons la condition pour que le coefficient de corrélation puisse prendre la valeur 1 (en dehors du cas $h=k=0$). Nous savons, d'après les propriétés spéciales des «*r*» (voir 1ère partie: conditions de cohérence) qu'il faut et suffit pour cela que le terme du second ordre de son développement soit nul (les autres l'étant alors nécessairement), c'est-à-dire ici :

$$\overline{\Omega^2 h^2} - 2\overline{\Omega M} h k + \overline{M^2} k^2 = 0$$

Or $\overline{\Omega M^2} \leq \overline{\Omega^2} \overline{M^2}$; il faut donc d'abord que $\overline{\Omega M^2} = \overline{\Omega^2} \overline{M^2}$, ce qui entraîne que M et Ω soient proportionnels, soit :

$$M = \pm \frac{\Omega}{c}$$

Alors la forme quadratique devient un carré parfait :

$$\overline{\Omega^2} \left(h \pm \frac{k}{c} \right)^2$$

et elle est nulle si

$$\frac{k}{h} = \pm c$$

On peut considérer c comme un nombre aléatoire susceptible de prendre les deux valeurs c et $-c$, avec des probabilités α et $1-\alpha$. On obtient alors ainsi la forme générale suivante, pour le coefficient de corrélation d'un champ admettant une onde de corrélation :

$$r(h, k) = \alpha \cos \Omega \left(h - \frac{k}{c} \right) + (1-\alpha) \cos \Omega \left(h + \frac{k}{c} \right)$$

En particulier pour $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} r(h, k) &= \frac{1}{2} \left[\overline{\cos \Omega \left(h - \frac{k}{c} \right)} + \overline{\cos \Omega \left(h + \frac{k}{c} \right)} \right] = \overline{\cos 2\Omega h \cos 2\frac{\Omega k}{c}} \\ &= 1 - \Omega^2 \left(h^2 + \frac{k^2}{c^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

c). *Connexion stationnaire ; connexion homogène ; connexion isotrope.*

Plaçons-nous dans le cas général d'un espace à trois dimensions. Le tenseur de connexion cinématique est dit *stationnaire*, s'il n'est fonction des instants t et t_1 que par la différence $(t_1 - t)$.

En ce cas, la *connexion géométrique* (obtenue pour $t=t_1$) est *permanente* et la *connexion locale, stationnaire*.

La *connexion cinématique* est dite *homogène* lorsque son tenseur de connexion n'est fonction des points O et O_1 que par les différences de leurs coordonnées: x_1-x, y_1-y, z_1-z . La même propriété appartient ipso-facto à la *connexion géométrique*. Quant à la *connexion locale* (que l'on obtient pour $O=O_1$), elle est *uniforme* dans tout le fluide.

La *connexion cinématique* est dite *isotrope* quand son tenseur admet la symétrie de révolution autour de OO_1 et reste invariant quand la distance $OO_1=d$ reste constante. On a vu (1^{ère} partie) qu'alors elle s'exprime au moyen de deux fonctions de d seulement: $f(d)$ et $g(d)$ par les formules:

$$a_{ij} = \frac{f(d)-g(d)}{d^2} x_i x_j + g(d) \delta_{ij}$$

$f(d)$ est le coefficient de corrélation entre les composantes des vecteurs Φ et Φ_1 portés par la droite OO_1 et $g(d)$ le coefficient de corrélation entre les composantes normales à OO_1 .

26. Connexion cinématique dans l'espace-temps. Nous venons de voir que dans un espace, et un temps distincts, un coefficient de connexion cinématique *stationnaire* est fonction de (x_1-x) et de (t_1-t) , l'homogénéité n'étant autre chose que la stationnarité dans la dimension « temps ».

Dans un espace-temps *relativiste*, l'espace et le temps ne sont plus séparés et l'on doit appeler *stationnaire* un coefficient de connexion qui ne dépend que de l'invariant:

$$c^2 (t_1-t)^2 - (x_1-x)^2$$

c , étant la vitesse de la lumière.

Alors:

$$r(h, k) = f \left[\left(h^2 - \frac{k^2}{c^2} \right) \right] = 1 - \frac{\Omega^2}{2} \left(h^2 - \frac{k^2}{c^2} \right) + \dots$$

Le fait qu'il est toujours inférieur à l'unité se traduit par la condition: $\frac{k^2}{h^2} \leq c^2$ qui exprime qu'aucun élément corpusculaire ne peut se mouvoir plus vite que la lumière.

Il est facile de former une fonction aléatoire qui possède un coefficient de connexion de cette forme. Nous allons pour cela définir les *fonctions trigonométriques d'un vecteur s* . Les fonctions trigonométriques d'un scalaire (arc du cercle unitaire par exemple) peuvent être considérées comme définies par des séries qui ne sont qu'une suite d'additions et de multiplications algébriques.

Substituons à ces opérations algébriques la somme vectorielle et le produit scalaire. Rien ne sera changé, ces opérations vectorielles jouissant exactement des mêmes propriétés que les opérations algébriques correspondantes (associativité, commutativité etc.). Et il est facile de voir que l'on obtient :

$$\cos s = \cos |s| \quad (\text{fonction paire})^1$$

$$\sin s = \frac{s}{|s|} \quad (\text{fonction impaire})^1$$

Soit maintenant la fonction aléatoire élémentaire :

$$\Phi = \cos \left(\Omega \frac{s}{c} + \Psi \right)$$

Elle admet pour coefficient de connexion :

$$\overline{\Phi \Phi_1} = \cos \left(\Omega \frac{s_1 - s}{c} \right) = \cos \frac{\Omega}{c} |s_1 - s| = \cos \left(\Omega \sqrt{h^2 - \frac{k^2}{c^2}} \right)$$

Prenons alors :

$$\Phi = \int \Phi/\omega \sqrt{dF(\omega)}$$

les Φ/ω étant normalisées (et indépendantes ($\overline{\Phi/\omega_i \Phi/\omega_j} = \delta_{ij}$)) on obtient le coefficient de connexion :

$$r(h, k) = \int \cos \left(\omega \sqrt{h^2 - \frac{k^2}{c^2}} \right) dF(\omega)$$

qui est la forme générale d'un «*r*» stationnaire dans l'espace-temps.

27. Corpuscule aléatoire plongé dans un champ. Nous venons d'étudier la connexion d'un «*champ aléatoire*», c'est à dire d'une grandeur aléatoire Φ attachée en chaque point de l'espace, et en outre

¹ Le lecteur friand de curiosités mathématiques, verra combien simplement on établit la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique à l'aide de ces notions. La formule d'addition des lignes trigonométriques :

$$\cos (s_1 - s) = \cos s \cos s_1 + \sin s \sin s_1$$

donne en effet :

$$\cos |s_1 - s| = \cos |s| \cos |s_1| + \frac{s \cdot s_1}{|s| |s_1|} \sin |s| \sin |s_1|$$

Or $s \cdot s_1 = |s| |s_1| \cos (s, s_1)$ d'où la formule souhaitée :

$$\cos |s_1 - s| = \cos |s| \cos |s_1| + \sin |s| \sin |s_1| \cos (s, s_1)$$

fonction du temps, et nous nous sommes ainsi provisoirement éloignés du point de vue du corpuscule. Nous allons maintenant plonger un corpuscule dans ce champ; pour cela il suffit de remplacer la coordonnée x par une fonction aléatoire X/t . Φ cessera alors d'être une grandeur de champ pour devenir une grandeur attachée à un corpuscule.

Inversement si nous donnons, pour un instant t déterminé, à la variable aléatoire X/t une valeur fixe x , Φ est encore une variable aléatoire, mais une *variable liée* dont le champ de probabilité dépend de la fixation qui a été faite de la coordonnée x . On peut la considérer comme engendrant une fonction aléatoire de deux paramètres: $\Phi/x, t$, c'est à dire un champ aléatoire.

Exemples.

1°) Soit l'onde aléatoire:

$$\Phi = A \cos(\Omega t - Mx + \Psi).$$

Remplaçons le paramètre certain x , par la fonction aléatoire:

$$X = Ut,$$

U étant une constante aléatoire.

On a ainsi «plongé» dans le champ de l'onde aléatoire, un corpuscule — d'ailleurs particulièrement simple: ses éléments se meuvent en ligne droite avec une vitesse constante.

La grandeur Φ attachée à ce corpuscule, devient une fonction aléatoire du temps, qui est l'oscillateur stationnaire:

$$\Phi/t = A \cos \left[\Omega \left(1 - \frac{MU}{\Omega} \right) t + \Psi \right].$$

L'onde aléatoire était entièrement définie par la loi de probabilité conjuguée $(a, \omega, \mu) - \Psi$ étant d'autre part un angle de probabilité uniforme. Pour définir le corpuscule, il faut y ajouter la loi de probabilité liée:

$$(u; a, \omega, \mu)$$

qui se réduit à (u) si U ne dépend pas des autres constantes aléatoires.

2°) Soit le corpuscule stationnaire:

$$X = A \sin(\Omega t - \Psi).$$

Considérons la fonction aléatoire attachée à ce corpuscule — :

$$\Phi = \Lambda \Omega \cos(\Omega t - \Psi)$$

(qui est d'ailleurs la vitesse de ce corpuscule).

Si l'on fixe la valeur de X : $X=x$, on peut éliminer une des constantes aléatoires, par exemple Ψ . Il se trouve que le temps s'élimine en même temps, et l'on voit que Φ devient la fonction de champ permanente :

$$\Phi/x = \pm \Omega \sqrt{\Lambda^2 - x^2}$$

Φ/x est connu par la loi de probabilité (ω, α) .

27. Connexion physique du corpuscule. La connexion cinématique est la connexion décrite du point de vue du *champ* : elle correspond au point de vue d'*Euler* en hydrodynamique. Mais dans les applications, c'est la *connexion physique* qui intervient ; elle correspond au point de vue de *Lagrange*. Soit X/t un corpuscule. Choisissons une position initiale O et un instant initial t . L'élément du corpuscule qui, à cet instant, se trouvait en ce point, se trouve à l'instant postérieur dans la position O_1 , fonction aléatoire de t, t_1 et de O . Soit Φ la grandeur attachée au corpuscule : Φ_1 est aussi une fonction aléatoire de t, t_1 et O .

La *connexion physique* est la connexion entre Φ_1 et la valeur de Φ à l'instant t au point O . Nous la représenterons par le tenseur dérivé de la forme bilinéaire :

$$\overbrace{(\Phi \Lambda)} (\Phi_1 \Lambda_1) - \overbrace{(\Phi \Lambda)} (\Phi_1 \Lambda_1)$$

le symbole de moyenne $\overbrace{(\quad)}$, indiquant qu'il s'agit d'une moyenne de Lagrange.

Les lois de probabilité à introduire dans ces moyennes sont :

$(\varphi, \varphi_1; x)$ lorsqu'interviennent à la fois Φ et Φ_1 , et $(\varphi; x) = (\varphi, \varphi_1; x)(\varphi_1)$, $(\varphi_1; x) = (\varphi, \varphi_1; x)(\varphi)$, lorsque Φ (ou Φ_1) interviennent seuls.

La connexion physique se distingue de la connexion cinématique, par le fait que Φ_1 n'est plus une valeur attachée à un point fixe, mais en un point *aléatoire* dont la position (incertaine) se déduit de O, t et t_1 . On peut dire qu'elle est la connexion entre les valeurs successives de Φ , attachée à un même élément, suivi sur sa trajectoire.

L'importance de la connexion physique vient de ce qu'elle régit les *phénomènes de diffusion*. La diffusion consiste en effet, en ce qu'un petit nuage de fumée, émis au temps t au voisinage de O , se trouve au temps t_1 dispersé à l'intérieur d'un volume fini (point O_1 aléatoire). La

distribution des grains de fumée à l'intérieur de ce volume dépend essentiellement de la connexion entre les vitesses successives prises par les grains de fumée.

Les phénomènes de *viscosité et de conductibilité*, qui sont des transferts de quantité de mouvement et d'énergie, sont également commandés par la connexion physique.

Le tenseur de connexion physique \mathcal{C} se relie bien simplement au tenseur de connexion cinématique, par l'intermédiaire de la *probabilité de passage*.

On a, en effet :

$$(u, u_1; x) = (u, u_1; x, x_1)(x_1; x) dx_1$$

d'où :

$$\mathcal{C} = \int (x_1; x) \Theta dx_1$$

Cette formule est très éloquente : elle sépare en deux parties les propriétés du corpuscule aléatoire :

1° les *propriétés du champ* dans lequel il est plongé qui sont représentées par le tenseur de connexion cinématique Θ .

2° les *propriétés mécaniques* du corpuscule, qu'exprime la probabilité de passage $(x_1; x)$.

Ces considérations entraînent une conséquence fort importante pour l'organisation des recherches expérimentales sur les fluides turbulents. Se fiant à l'analogie fournie par l'hydrodynamique certaine, on pourrait croire qu'il suffit d'explorer un champ fluide par des instruments placés en un série de points fixes (réseau) pour tout connaître de la Mécanique du Fluide. Il n'en est rien : cette recherche expérimentale (statistique) fournira seulement le tenseur Θ , et il est encore nécessaire de connaître la probabilité de passage $(x_1; x)$ pour obtenir le tenseur de connexion physique \mathcal{C} qui régit, lui, toutes les applications.

Pour que la connexion physique soit stationnaire [\mathcal{C} fonction de $(t_1 - t)$] il ne suffit pas que la connexion cinématique le soit ; il faut de plus que la probabilité de passage $(x_2; x_1)$ ne dépende que de $(t_1 - t)$.

28. Relations entre le corpuscule et le champ. *a) Point de vue classique.*

Dans le point de vue classique où l'espace et le temps sont distincts, la connexion du champ lorsqu'elle est stationnaire et homogène est une fonction de $(x_1 - x)$ et de $(t_1 - t)$ séparément, car ces deux grandeurs sont chacune invariants.

Prenons d'abord le cas où il existe une onde de corrélation de vitesse certaine c . Le coefficient de corrélation est alors

$$\overline{\cos \Omega \left(h - \frac{k}{c} \right)}$$

Plongeons dans le champ le corpuscule aléatoire :

$$X = Ut + B$$

U et B étant des constantes aléatoires, indépendantes de Ω ; soit u_0 la valeur probable et S , l'écart type de U .

Nous créons ainsi une fonction aléatoire de t , dont le coefficient de corrélation physique est :

$$r(h) = \overline{\cos \Omega \left(1 - \frac{U}{c} \right) h} = \overline{\cos \Omega' h}$$

Entre la pulsation « physique » Ω' et la pulsation du champ Ω , nous avons entre autres, la relation :

$$\overline{\Omega'^2} = \overline{\Omega^2} \left[\left(1 - \frac{u_0}{c} \right) + \frac{S^2}{c^2} \right]$$

Cette formule peut être considérée comme la généralisation de la formule de Doppler, que l'on retrouve quand Ω et U sont des constantes certaines ($\overline{\Omega^2} = \Omega^2$; $S^2 = 0$).

Dans le cas général, le coefficient de corrélation cinématique se développe ainsi :

$$1 - \frac{1}{2} \left(\overline{\Omega^2} h^2 - 2 \overline{\Omega M} h k + \overline{M^2} k^2 \right) + \dots$$

En multipliant par la probabilité de passage $(x_1 ; x)$ et intégrant par rapport à x_1 , on obtient le coefficient de corrélation physique. Or, u_0 et S étant la valeur probable et l'écart type de la vitesse du corpuscule plongé dans le champ, on a

$$\begin{aligned} \widehat{k} &= u_0 h \\ \widehat{k^2} &= (u_0^2 + S^2) h^2 \end{aligned}$$

d'où

$$r = 1 - \frac{h^2}{2} \left(\overline{\Omega^2} - 2 \overline{\Omega M} u_0 + \overline{M^2} u_0^2 + \overline{M^2} S^2 \right) + \dots$$

et

$$\overline{\Omega'^2} = \overline{\Omega^2} \left[1 - 2 \frac{\overline{\Omega M}}{\overline{\Omega^2}} u_0 + \frac{\overline{M^2}}{\overline{\Omega^2}} (u_0^2 + S^2) \right]$$

b) *Point de vue relativiste.*

Nous avons vu que :

$$r(h, k) = \cos \Omega \sqrt{h^2 - \frac{k^2}{c^2}} = 1 - \frac{\overline{\Omega^2}}{2} \left(h^2 - \frac{k^2}{c^2} \right) + \dots$$

Si l'on plonge un corpuscule, dans le champ précédent, on a entre la pulsation physique et la pulsation cinématique, la relation :

$$\overline{\Omega^2} = \overline{\Omega'^2} \left(1 - \frac{u_0^2 + S^2}{c^2} \right)$$

qui, pour Ω certain ($S=0$) redonne la formule connue de transformation des fréquences pour un système en mouvement relatif (u_0) par rapport au système de référence.

29. L'onde associée au corpuscule. Nous allons tenter de donner une interprétation de l'onde de Louis de Broglie, grâce au schéma aléatoire.

a) *Point de vue classique*

Un champ dans lequel existe une onde de corrélation, de vitesse c , a pour connexion cinématique :

$$\begin{aligned} r(h, k) &= \alpha \cos \Omega \left(h - \frac{k}{c} \right) + (1 - \alpha) \cos \Omega \left(h + \frac{k}{c} \right) = \\ &= 1 - \overline{\Omega^2} \left[h^2 + 2(1 - 2\alpha) \frac{hk}{c} + \frac{k^2}{c^2} \right] + \dots \end{aligned}$$

Au voisinage du point $h=k=0$, les courbes d'égale corrélation sont des ellipses concentriques. Un rayon vecteur de coefficient angulaire $\frac{k}{h} = u_0$, représente la vitesse d'un corpuscule plongé dans le champ.

Si, à partir du point (h, k) on se déplace suivant la direction V conjuguée de u_0 , le coefficient de corrélation reste *stationnaire*, puisqu'on se déplace sur la tangente à l'ellipse qui passe par le point (h, k) . Nous dirons que V représente la vitesse d'une *onde de corrélation*. A chaque vitesse u_0 du corpuscule est associée une vitesse V de l'onde. Ces deux vitesses sont liées par la relation :

$$V = - \frac{c + (1 - 2\alpha) u_0}{\frac{u_0}{c} + 1 - 2\alpha}$$

Dans le cas de $\alpha = \frac{1}{2}$, elle se réduit à :

$$V = -\frac{c^2}{u_0}$$

qui est la formule de Louis de Broglie, sauf que V étant de signe contraire à u_0 , l'onde voyage en *sens inverse* du corpuscule.

b) *Point de vue relativiste*

Cette fois :

$$r(h, k) = f\left(h^2 - \frac{k^2}{c^2}\right)$$

Les courbes d'égalité de corrélation sont, non plus des ellipses, mais des hyperboles.

Pour que r reste stationnaire, il faut se déplacer à la vitesse V telle que :

$$V = \frac{c^2}{u_0}$$

qui est, maintenant, en grandeur et en signe, la relation même de Louis de Broglie.

Nous donnons cette interprétation pour ce qu'elle vaut. Il est en tous cas curieux que le schéma aléatoire suggère directement l'idée d'associer une onde à un corpuscule.

30. Connexion corpusculaire. La connexion physique concernait les éléments du corpuscule qui, à un instant t , se trouvaient en un point déterminé O . Si l'on s'affranchit de cette condition, on obtient la *connexion corpusculaire*, définie par le tenseur $\overline{\mathcal{C}c}$ rattaché à la forme bilinéaire :

$$\overline{(\Phi\Lambda)(\Phi_1\Lambda_1)} - \overline{(\Phi\Lambda)(\Phi_1\Lambda_1)},$$

le symbole de moyenne : $\overline{\quad}$ étant étendu à *tous les éléments* du corpuscule, c'est à dire que la moyenne est prise avec la fonction de distribution :

$$(\varphi, \varphi_1)$$

La relation :

$$(\varphi, \varphi_1) = (\varphi, \varphi_1; x)(x) dx$$

montre que l'on a :

$$\overline{\mathcal{C}c} = \int (x) \overline{\mathcal{C}} dx$$

L'on a également :

$$\overline{\mathcal{C}c} = \int (x, x_1) \Theta dx dx_1$$

La connaissance de la connexion corpusculaire nécessite, en plus de la connexion cinématique Θ , et de la probabilité de passage $(x_1; x)$, la donnée de la probabilité de présence (x) .

31. La conception aléatoire d'une grandeur physique. Un des plus grands bouleversements qu'apportent les Nouvelles Mécaniques dans nos idées traditionnelles, est à coup sûr de cesser de concevoir une grandeur physique comme un *simple nombre* et de la représenter par un *opérateur* ou une *matrice*. Cela semble décourager par avance toute tentative d'explication tant soit peu concrète. Pourtant, nous allons voir que la conception d'une grandeur physique comme *fonction aléatoire* — notion que l'on doit considérer comme naturelle et fondamentale au même titre que celle de fonction au sens habituel du terme — coïncide avec celles de la Mécanique ondulatoire et de la Mécanique quantique. C'est ce qui constitue, à nos yeux, une explication concrète du symbolisme de ces mécaniques.

Sans s'attacher à une rigueur que le sujet mériterait cependant, on peut présenter la question de la manière suivante.

On a vu qu'une fonction aléatoire équivaut à une fonction d'une infinité de variables : la fonction de distribution conjuguée :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

des valeurs de X à n instants successifs — pour tout n —. Cette fonction ne peut être choisie arbitrairement à cause des conditions de *cohérence* dont nous avons parlé dans la première partie. Mais elle peut être *construite* à partir des *lois liées*, par application répétée du théorème des probabilités composées :

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1)(x_2; x_1)(x_3; x_1, x_2) \dots$$

Chacun des facteurs du produit est une loi de probabilité à *une seule variable* et peut être choisie arbitrairement sous la seule condition de vérifier le théorème des probabilités totales ; ainsi :

$$(x_3; x_1, x_2) dx_3 = 1$$

quels que soient x_1 et x_2 .

On peut dire que la suite des fonctions :

$$(x_1), (x_2; x_1), (x_3; x_1, x_2) \dots$$

équivaut à une fonction aléatoire.

Considérons maintenant les valeurs successives prises par X , au cours d'une épreuve faite au *voisinage* du temps t , c'est à dire à des instants :

$$t + \delta t_1, t + \delta t_2, \dots$$

appartenant à l'intervalle $(t, t + \Delta t)$, soit

$$x_1^*, x_2^*, \dots,$$

comme les composantes d'un vecteur dans l'espace de *Hilbert*. On peut le faire, car la série :

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_i^*)^2$$

représente une «*estimation*» de la moyenne quadratique $\overline{X^2}(t)$ et converge par conséquent (sauf sur un ensemble de mesure nulle). Lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, $\delta t_1, \delta t_2, \dots$ tendent aussi vers zéro et les lois de probabilité liées tendent vers des limites qui ne dépendent plus que de l'instant t :

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, t) \\ &F_1(x_1, x_2, t) \\ &\dots \end{aligned}$$

Il importe ici de remarquer que dans ce que devient une fonction aléatoire à l'instant t , il y a *plus qu'un simple nombre aléatoire*. Il y a aussi la *limite vers laquelle tend la connexion* (figurée par exemple, dans le cas d'une fonction indéfiniment dérivable par la loi de probabilité conjuguée de la fonction et de toutes ses dérivées).

Le produit scalaire de deux vecteurs X et Y sera :

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_i^* y_i^*)$$

estimation du moment rectangle: $\overline{X(t)Y(t)}$.

A la notion de vecteurs *orthogonaux* correspondra donc celle de vecteurs *non corrélés*.

Remarquons maintenant que la suite des fonctions F_1, F_2, \dots représente une *application* de l'espace de *Hilbert* sur lui-même. On peut d'ailleurs donner à cette transformation une forme canonique remarquable.

Posons :

$$\begin{aligned} y_1 &= \int_{-\infty}^{x_1} (\xi) d\xi - \frac{1}{2} \\ y_2 &= \int_{-\infty}^{x_2} (\xi; x_1) d\xi - \frac{1}{2} \\ &\dots \end{aligned}$$

On a :

$$dy_1 dy_2 \dots = (x_1)(x_2; x_1) \dots dx_1 dx_2 \dots = (x_1, x_2 \dots) dx_1 dx_2 \dots$$

Ainsi, le jacobien de la transformation est la loi de probabilité conjugée des valeurs successives de X et, à ce titre il est positif ou nul (cette dernière éventualité ne se produisant pas, au moins à l'intérieur d'un certain domaine). La transformation admet par suite un inverse.

Les y sont des nombres aléatoires, compris entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, de valeur probable nulle et *non corrélés* entre eux. Donc, les vecteurs $(y_1, 0, 0 \dots)$, $(0, y_2, 0 \dots)$ forment une *base orthogonale* de l'espace de *Hilbert*.

Nous admettrons que les propriétés précédentes restent vraies quand on passe à la limite ($\Delta t \rightarrow 0$), les y tendant alors vers des z et la transformation qui fait passer des x aux z , ne dépendant plus que de l'instant t .

Ainsi, on peut faire correspondre à chaque instant t , à une fonction aléatoire, une transformation ponctuelle du domaine de l'espace de *Hilbert* dont les points ont des coordonnées cartésiennes comprises entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. Chacune de ces transformations définit une fonction aléatoire à l'instant t .

Or, l'espace de Hilbert étant *isomorphe* à l'espace fonctionnel des fonctions de carré sommable, une application de cet espace sur lui-même équivaut à un *opérateur* A transformant une fonction f en une fonction g :

$$g = A(f).$$

C'est précisément le point de vue de la Mécanique ondulatoire selon lequel une grandeur physique est un opérateur et non plus un simple nombre.

Il est certain que les considérations précédentes mériteraient d'être développées et améliorées dans le sens de la rigueur (limites, convergence, etc.). Telles qu'elles sont cependant, elles permettent d'espérer qu'un jour, les Nouvelles Mécaniques pourront être exposées comme des Mécaniques aléatoires particulières, ce qui contribuera beaucoup à leur conférer un caractère concret.

IX — LA DIFFUSION

33. La diffusion en général. La diffusion est un phénomène banal et pourtant essentiel, qui se produit au sein de tous les fluides naturels; cependant l'hydrodynamique classique n'en tient pas compte (notion

trop rigide de «surface fluide»). La théorie cinétique, qui est en somme une Mécanique aléatoire basée sur un schéma particulier, corrige cette imperfection et donne une expression de la diffusion moléculaire. Mais les fluides naturels, dont le mouvement est toujours turbulent, diffusent à des échelles bien plus grandes que l'échelle moléculaire et les phénomènes de diffusion y prennent une importance énorme. Nous allons, dans ce chapitre, étudier la diffusion dans un corpuscule aléatoire, dérivable en moyenne quadratique; les résultats obtenus seront indépendants de l'échelle des phénomènes et applicables par conséquent aux fluides naturels.

Soit O_1 un point fixé, à l'intérieur d'un fluide. A l'instant t_1 , s'y trouve une microparticule. La méthode de Lagrange consiste à suivre cette microparticule dans son mouvement. L'hydrodynamique classique admet qu'au temps t_2 , cette microparticule occupe la position O_2 , telle que :

$$x_2 = x_2(x_1, t_1, t_2)$$

x_2 étant une fonction analytique continue et dérivable des paramètres x_1, t_1, t_2 , qui s'inverse d'une manière univoque, de sorte que l'on a également :

$$x_1 = x_1(x_2, t_1, t_2).$$

Dans un milieu aléatoire, et non plus continu, les coordonnées de O_2 sont des fonctions aléatoires, que nous supposerons généralement dérivables en moyenne quadratique, des coordonnées de O_1 et des instants t_1 et t_2 :

$$X_2 = X_2/x_1, t_1, t_2$$

L'inversion de cette fonction n'est évidemment pas possible d'une manière univoque; tout ce que l'on peut dire, c'est que X_1 est également une fonction aléatoire que nous admettrons être aussi dérivable :

$$X_1 = X_1/x_2, t_1, t_2.$$

Au temps t , la microparticule qui, à l'instant t_1 se trouvait en O_1 , peut se trouver *n'importe où dans le fluide* et, *en chaque point*, il existe une certaine probabilité ($x_2; x_1$) pour que cette microparticule y soit située.

Il résulte de ce schéma mathématique que si l'on considère à l'instant t_1 , une particule entourant le point O_1 , comme cette particule se compose d'un grand nombre de *microparticules* dont le sort est aléatoire, la particule aura, au temps t_2 , répandu dans le fluide toutes les microparticules qui la constituaient et, vu le grand nombre de celles-ci,

elles seront distribuées selon des fréquences conformes à la probabilité de passage $(x_2; x_1)$.

Le problème de la diffusion va consister essentiellement en l'étude de la fonction aléatoire :

$$X_2/x_1, t_1, t_2$$

c'est-à-dire d'un fragment du corpuscule aléatoire X , équivalent au fluide, *sélectionné* par le fait qu'à un instant donné, ce fragment occupait une position ponctuelle déterminée.

Une image physique d'un pareil « sous-corpuscule » est le nuage de fumée émis par une cheminée d'usine au sein de l'atmosphère.

Le sous-corpuscule X_2 peut avoir des propriétés fort différentes du corpuscule. Soit par exemple l'oscillateur stationnaire à fréquence certaine :

$$X = A \sin(\omega t - \Phi).$$

La moyenne quadratique $\overline{X^2}$ de X , est constante. Ce corpuscule ne manifeste donc, macroscopiquement, aucune propriété périodique. Mais portons notre attention sur le sous-corpuscule X_2 formé par les éléments qui au temps $t=0$, avaient la coordonnée $X=0$. Ce sous-corpuscule peut être matériellement réalisé en disposant un écran percé d'une ouverture et en démasquant cette ouverture pendant un temps très court; ce sera par exemple une bouffée de la fumée émise par une cheminée. Pour le sous-corpuscule X_2 , Φ cesse d'être un angle aléatoire de probabilité uniforme; il devient l'angle certain $\Phi=0$, de sorte que :

$$X_2 = A \sin \omega t$$

et

$$\overline{X_2^2} = \overline{A^2 \sin^2 \omega t} = \frac{\overline{A^2}}{2} (1 - \cos 2\omega t).$$

Ainsi la dispersion du sous-corpuscule X_2 , présente une variation périodique. En particulier, X_2 redevient périodiquement ponctuel. On peut dire que ces phénomènes périodiques, s'ils étaient contenus en puissance dans le corpuscule X (dans sa connexion, qui est périodique), n'avaient pas l'occasion de se manifester: ils ont été en quelque sorte « libérés » par la sélection qu'une expérience a opérée sur les éléments de X .

Un autre genre de diffusion nous est donné par le *corpuscule aléatoire libre*.

$$X = At + B.$$

Considérons les éléments qui, au temps $t=0$, ont l'abscisse $X=0$. Pour ces éléments, B cesse d'être un nombre aléatoire et devient le nombre certain zéro. Comme tout à l'heure, le sous-corpuscule X_2 ainsi défini peut être matériellement isolé par un dispositif convenable. L'on a :

$$\widehat{X}_2^2 = \overline{A^2} t^2$$

$$\sigma_2^2 = \widehat{X_2^2} = \overbrace{(X_2 - \overline{X}_2)^2} = \overline{A^2} t^2.$$

Ainsi l'écart type de la diffusion est proportionnel au temps. Le cas du corpuscule libre est évidemment aussi celui d'un corpuscule (dérivable) quelconque pour un temps infiniment petit.

34. Forme générale du problème de la diffusion. Ce problème est, nous l'avons dit, l'étude de la fonction aléatoire :

$$X_2/x_1, t_1, t_2$$

c'est à dire le calcul de ses moments principaux :

$$\widehat{X}_2, \widehat{X}_2^2 \text{ et } \widehat{X}_2 X_3.$$

Les moyennes de Lagrange donnent une solution du problème sous forme d'un développement de Taylor faisant intervenir les moments liés, pour un point donné, de toutes les dérivées en moyenne quadratique de X . Cette solution est évidemment toute théorique et n'offre d'intérêt pratique que pour des intervalles de temps très petits. Aussi allons nous poser maintenant le problème en termes finis.

Les moments \widehat{X}_2 et \widehat{X}_2^2 se calculent au moyen de la probabilité de passage $(x_2; x_1)$, par les formules :

$$\widehat{X}_2 = \int x_2 \cdot (x_2; x_1, t_1, t_2) dx_2$$

$$\widehat{X}_2^2 = \int x_2^2 \cdot (x_2; x_1, t_1, t_2) dx_2$$

Lorsque la probabilité de passage ne dépend que des différences $(t_2 - t_1)$ et $(x_2 - x_1)$, ces moments sont indépendants du point initial x_1 et ne sont fonctions que de l'intervalle de temps $(t_2 - t_1)$. La diffusion est alors *homogène et stationnaire*.

Pour obtenir le moment rectangle $\widehat{X}_2 X_3$, il est nécessaire de faire intervenir une loi de probabilité *en trois points* :

$$\widehat{X}_2 X_3 = \int x_2 x_3 \cdot (x_2, x_3; x_1, t_1, t_2, t_3) dx_2 dx_3.$$

Ces notations sont surtout formelles. Pour faire un pas de plus, souvenons nous que, dans les fluides, l'expérience atteint non la coordonnée du corpuscule, mais sa vitesse et que celle-ci est la dérivée en moyenne quadratique de celle-là. Le problème de la diffusion se pose ainsi comme un problème *d'intégration aléatoire*, la fonction X_2 s'exprimant par :

$$X_2 = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} U/s \, ds.$$

La valeur probable de X_2 est :

$$\widehat{X}_2 = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} ds \int u \cdot (u; x_1, t_1, s) \, du.$$

Son calcul nécessite la connaissance d'une loi de probabilité en *deux points* (t_1, s) . Un cas particulier intéressant est celui où cette loi ne dépend que de la différence $(s - t_1)$ et ne contient pas la coordonnée initiale x_1 . Alors le chemin $\widehat{X}_2 - x_1$, parcouru par le point moyen ne dépend pas du point de départ ni de l'instant initial, mais seulement de l'intervalle de temps $(t_2 - t_1)$.

Voyons quelles restrictions entraînent nos hypothèses. Lorsque $(u; x_1)$ ne dépend pas de x_1 , il en est de même en particulier de $(u_1; x_1)$, fonction de distribution des vitesses en un point : celle-ci est donc *uniforme* dans tout le fluide. De plus, comme $(u_1; x_1)$ ne contient pas t_1 , la distribution des vitesses est *permanente*. Par contre il n'y a aucune restriction sur la loi de densité (x_1) . Ainsi nous avons affaire à un fluide sans mouvement d'ensemble, avec un module uniforme et constant de la vitesse d'agitation, mais pouvant avoir une densité différenciée, comme celle qui résulte de la présence d'un champ de forces. Une atmosphère *isotherme* en équilibre vertical sous l'action de la gravité, donne un modèle d'un tel fluide.

Par contre les hypothèses précédentes ne conviennent certainement pas, à l'échelle de la *turbulence*, pour représenter convenablement la diffusion dans les couches basses de l'atmosphère où la vitesse d'ensemble et le module de la vitesse turbulente sont systématiquement différenciés. Ceci montre la difficulté qu'on doit rencontrer dans l'étude théorique de phénomènes en apparence aussi simples que la diffusion de fumées ou de fumigènes dans les couches d'air voisines du sol.

Passons maintenant au calcul du moment rectangle $\widehat{X}_2 \widehat{X}_3$, qui contient comme cas particulier le moment quadratique \widehat{X}_2^2 . On a :

$$\widehat{(X_2 - x_1)(X_3 - x_1)} = \int u \zeta \cdot (u, \zeta; x_1, t_1, s, t) \, ds \, dt \, du \, d\zeta.$$

L'intégrale (double) par rapport aux variables s et t , est étendue au rectangle ayant pour sommets :

$$(t_1, t_1), (t_2, t_1), (t_2, t_3), (t_1, t_3).$$

Il intervient une loi liée en *trois points*, et ceci reste vrai pour le moment quadratique $\widehat{(X_2 - x_1)^2}$ qui se calcule exactement par la même formule, sauf que l'aire d'intégration a cette fois pour sommets :

$$(t_1, t_1), (t_2, t_1), (t_2, t_2), (t_1, t_2)$$

(l'une des diagonales du rectangle est la bissectrice des axes de coordonnées).

En dérivant la formule précédente, on obtient la relation :

$$\widehat{U_2 U_3} = \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_3} \widehat{X_2 X_3}$$

qui étend, aux moyennes de Lagrange, une formule que nous connaissons déjà pour les moyennes corpusculaires.

35. Diffusion stationnaire et homogène. Intéressons nous plus spécialement au cas où une loi en *deux points* serait suffisante pour le calcul du moment rectangle. Il faut pour cela que la loi $(u, \xi; x_1)$ ne contienne pas x_1 . Il en résulte que :

$$(u; x_1) = (u, \xi; x_1) d\xi$$

ne contient pas x_1 non plus.

Comme tout à l'heure, la fonction de distribution des vitesses en un point : $(u; x_1)$ est *uniforme* dans le fluide. Ajoutons encore l'hypothèse que la loi $(u, \xi; x_1)$ ne dépend des instants que par les différences $(s - t_1)$ et $(t - t_1)$. Le moment rectangle ne dépendra alors que des différences $(t_2 - t_1)$ et $(t_3 - t_1)$. Cette nouvelle hypothèse entraîne comme conséquence que la loi $(u; x_1)$ qui déjà ne dépendait pas de x_1 , ne dépend pas non plus de t_1 .

Nous qualifierons la diffusion dans ce cas particulier de *stationnaire* et d'*homogène*. Insistons sur le fait que la loi de densité reste absolument quelconque.

Ce cas comporte d'importantes simplifications. On voit, en effet, qu'en général le problème de la diffusion est ramené au problème de la *connexion physique* de la vitesse, c'est-à-dire à l'étude des propriétés du moment :

$$\widehat{U_s U_t}.$$

Or, quand la connexion physique ne dépend pas du point initial x_s , elle est identique à la connexion corpusculaire, car :

$$\overline{U_s U_t} = \int (x_s) \widehat{U_s U_t} dx_s = \widehat{U_s U_t}$$

puisqu'on peut faire sortir cette dernière quantité—indépendante de x_s —du signe d'intégration.

La connexion cinématique revêt aussi une forme particulière. Considérons en effet, la relation :

$$\widehat{U_s U_t} = \int (x_t ; x_s) \overline{U_s U_t} dx_t \quad s \leq t.$$

La diffusion étant stationnaire et homogène, le premier membre est fonction de $(t-s)$; $(x_t ; x_s)$ est fonction de $(t-s)$ et de $(x_s - x_t)$. Il en est donc de même par conséquent de $\widehat{U_s U_t}$: la connexion cinématique est, elle aussi, stationnaire et homogène.

Désignons par S^2 le carré de l'écart type des vitesses d'agitation : $\overline{U^2}$, qui en pareil cas est aussi bien égal à la moyenne corpusculaire $\overline{U^2}$, qu'à la moyenne de Lagrange $\widehat{U^2}$.

Soit $r(t-s)$, le coefficient de corrélation physique entre les vitesses U/t et U/s d'une microparticule aux instants t et s .

L'on a :

$$\widehat{X^2} = S^2 \iint r(t-s) ds dt$$

l'intégrale étant étendue au carré $(0, 0)$, $(t, 0)$, $(0, t)$, (t, t) , si l'on prend zéro comme instant initial. On trouve :

$$\widehat{X^2} = 2 S^2 \int_0^t (t-s) r(s) ds.$$

Nous étudierons tout à l'heure le comportement de cette intégrale. Auparavant, faisons la remarque que s'il s'agit d'un problème théorique, c'est-à-dire que si l'on connaît a priori la Mécanique du corpuscule, on a sans peine $r(s)$ qui est à la fois le coefficient de corrélation physique et le coefficient de corrélation corpusculaire.

Au contraire, s'il s'agit de l'étude expérimentale d'un fluide turbulent au point de vue d'Euler (observations en des points fixes), l'expérience atteint seulement le coefficient de corrélation cinématique ρ . Pour remonter de là au coefficient de corrélation physique, il est nécessaire de connaître la probabilité de passage $(x_2 ; x_1)$, qui est d'ailleurs ici de la forme $P(\xi, \tau)$ où ξ est la différence des deux coordonnées et s la différence des deux époques. Il semble donc qu'on ne soit que très

médiocrement avancé, puisqu'aussi bien la connaissance de $(x_2; x_1)$ nous eût fourni aussitôt $\overline{X^2}$ par une moyenne de Lagrange.

Mais on peut dire d'une part, que des expériences directes sur la diffusion, combinées avec l'exploration du fluide au point de vue d'Euler, nous permettent inversement, de déterminer $(x_2; x_1)$ c'est-à-dire en somme la Mécanique du corpuscule. Et d'autre part, on peut obtenir une valeur approchée de la corrélation physique à partir de la corrélation cinématique, sans connaître exactement $(x_2; x_1)$.

Nous avons, en effet,

$$r(\tau) = \int \rho(\xi, \tau) P(\xi, \tau) d\xi.$$

Posons $\xi = u\tau$; il vient:

$$r(\tau) = \int \rho(u\tau, \tau) P(u\tau, \tau) \tau du.$$

Or $P(u\tau, \tau) \tau du$, tend vers $(u) du$, lorsque $\tau \rightarrow 0$, (u) étant la fonction de distribution des vitesses. Une première approximation consistera à remplacer P par cette limite, ce qui donne:

$$r(\tau) = \overline{\rho(\tau u, \tau)}.$$

Consentant encore une approximation, on peut réduire u à sa valeur probable u_0 et l'on a la formule:

$$r(\tau) = \overline{\rho(\tau u_0, \tau)},$$

qui donne des résultats suffisamment approchés, dans la mesure où $S^2 = \overline{U^2}$ est faible devant u_0 . C'est le cas des souffleries aéro-dynamiques dans lesquelles la vitesse de la veine (u_0) est de l'ordre de $10^m/\text{sec}$ et S de l'ordre de $0,1^m/\text{sec}$.

En admettant l'existence d'une onde de corrélation de vitesse c , on a:

$$r(\tau) = \overline{\cos \Omega \left(1 - \frac{u_0}{c} \right) \tau},$$

ce qui donne pour la moyenne quadratique de la pulsation physique:

$$\overline{\Omega'^2} = \overline{\Omega^2} \left(1 - \frac{u_0}{c} \right)^2.$$

Or, dans les études de la turbulence en soufflerie, faites par divers auteurs, on étudie la connexion *géométrique*, c'est-à-dire la connexion entre les vitesses, au même instant, en deux points séparés par la dis-

tance x , comptée dans l'axe de la veine. C'est donc :

$$\rho(x, 0) = \cos \Omega \frac{x}{c}$$

et l'on admet comme évident que la connexion physique s'obtient en substituant τu_0 à x , ce qui donne :

$$r_1(\tau) = \cos \Omega \frac{u_0}{c} \tau.$$

On voit bien qu'en général r_1 n'est pas égal au véritable coefficient de corrélation physique r . Cela n'arriverait que pour $c = 2u_0$, mais il n'y a évidemment aucune raison pour cela.

La comparaison des mesures expérimentales directes de la dispersion et du coefficient de connexion géométrique permettrait, au contraire, de déterminer la vitesse c de l'onde de corrélation.

36. Coefficient de diffusion. Dans la théorie du *mouvement brownien*, le rapport :

$$\chi = \frac{\overline{X^2}}{2t}$$

est une constante indépendante de t , que l'on appelle le coefficient de diffusion.

Mais en général, le précédent rapport est une fonction de t . Il arrive que cette fonction tende vers une limite finie lorsque $t \rightarrow \infty$ et même que, pratiquement, cette limite soit déjà presque atteinte pour des valeurs de t relativement faibles. On pourra encore dire qu'il existe en pareil cas un coefficient de diffusion.

Représentons $r(\tau)$ par l'intégrale de Fourier :

$$r(\tau) = \int_0^{\infty} \cos \omega t d\Phi(\omega).$$

Nous traitons donc seulement des fonctions aléatoires analytiques stationnaires.

χ a pour expression :

$$\chi = \frac{2S^2}{t} \int_0^t \frac{\sin^2 \frac{\omega t}{2}}{\omega^2} d\Phi(\omega).$$

D'après la théorie des *intégrales de Dirichlet*, la valeur asymptotique de $\chi(t \rightarrow \infty)$ dépend, à cause du dénominateur ω^2 du comportement de $\Phi(\omega)$ à l'origine.

$\Phi(\omega)$ est, rappelons-le, une fonction non négative, non décroissante, nulle pour $\omega=0$, égale à 1 pour ω infini. Elle peut présenter une discontinuité dès l'origine, de sorte que $\Phi(+0)$ ne soit pas nul. Par exemple :

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= \alpha_0 \text{ pour } 0 < \omega \leq \omega_1 \\ \Phi(\omega) &= 1 \text{ pour } \omega_1 < \omega\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$r(\tau) = \alpha_0 + (1 - \alpha_0) \cos \omega_1 \tau,$$

qui est bien le coefficient de corrélation d'une fonction ana-stat.

Trois cas sont donc à envisager :

a) $\Phi(+0) = \alpha_0 > 0$.

On démontre alors que :

$$\chi = S^2 t [\alpha_0 + \psi(t)]$$

$\psi(t)$, étant une fonction qui tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$, par valeurs positives.

χ augmente donc indéfiniment : il n'y a pas de coefficient de diffusion.

Un exemple banal de ce cas est le corpuscule aléatoire libre, pour lequel :

$$\widehat{X}^2 = S^2 t^2$$

donc

$$\chi = \frac{S^2}{2} t.$$

Il correspond à :

$$\alpha_0 = 1.$$

b) $\Phi(+0) = 0$.

On démontre que χ a pour partie principale : Δt^m avec $m < 1$. I peut donc arriver que :

χ tende vers l'infini (mais moins vite que t).

χ tende vers zéro.

χ tende vers une limite finie.

Un cas particulier intéressant est celui où $\Phi(\omega)$ est continue et dérivable (spectre continu).

Alors χ a pour expression asymptotique :

$$\chi = S^2 \left[\int_0^t r(s) ds + \frac{1}{t} \int_0^t s r(s) ds \right].$$

On aura donc un coefficient de diffusion si :

$$\int_0^{\infty} r(s) ds \quad \text{a un sens}$$

et si $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t s r(s) ds$ existe.

Le crochet qui multiplie S^2 a les dimensions d'un temps et peut être considéré comme une sorte de « temps de libre parcours ».

c) $\Phi(\omega) = 0$ tant que $\omega < \alpha$.

χ a alors toujours une limite pour $t \rightarrow \infty$; il existe toujours un coefficient de diffusion.

Donnons quelques exemples de *spectres* et des coefficients de diffusion correspondants.

1°) Une seule raie de pulsation ω_0 .

C'est le cas de l'oscillateur à fréquence certaine :

$$X = A \cos(\omega_0 t + \Phi)$$

qui admet pour coefficient de corrélation :

$$r(\tau) = \cos \omega_0 \tau,$$

ce qui correspond à :

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= 0 & \text{si } \omega < \omega_0 \\ \Phi(\omega) &= 1 & \text{si } \omega > \omega_0. \end{aligned}$$

Le coefficient de diffusion est :

$$\chi(t) = \frac{2 S^2}{t} \frac{\sin^2 \frac{\omega_0 t}{2}}{\omega_0^2}.$$

La limite pour $t \rightarrow \infty$ est nulle.

Imaginons de la fumée émise en un point, au sein du fluide représenté par un tel corpuscule et supposons S petit devant la vitesse d'ensemble u_0 , de manière que les phénomènes qui se produisent dans le temps, se retrouvent dans l'espace par la transformation $x = u_0 t$. La diffusion a lieu suivant deux sinusoïdes, les éléments diffusés se rassemblant périodiquement en des noeuds. Si l'on ajoute à cette diffusion périodique une diffusion générale « en paraboloïde », on obtient un aspect fréquemment réalisé dans les fumées émises par les cheminées d'usine : émission par « bouffées ».

2°) Une bande limitée

$$\Phi(\omega) = \frac{\omega}{\alpha} \quad \text{si } \omega \leq \alpha$$

$$\Phi(\omega) = 1 \quad \text{si } \omega > \alpha.$$

On a :

$$r(\tau) = \frac{\sin \alpha \tau}{\alpha \tau}$$

et

$$\chi(t) = \frac{S^2}{\alpha} \int_0^t \frac{\sin \alpha s}{s} ds - \frac{S^2}{\alpha^2} \frac{1 - \cos \alpha t}{t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) = \frac{\pi S^2}{2\alpha}.$$

3°) Spectre continu (et Φ dérivable)

a) $\Phi'(\omega) = a e^{-a\omega}.$

On a :

$$r(\tau) = \frac{a^2}{a^2 + t^2}$$

$$\chi(t) = a S^2 \operatorname{arctg} \frac{t}{a} - \frac{a^2 S}{t} \log \sqrt{1 + \frac{t^2}{a^2}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) = \frac{\pi S^2 a}{2}.$$

b) $\Phi'(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\theta^2}{1 + \theta^2 \omega^2}.$

C'est le cas complémentaire du précédent : $r(\tau) = e^{-\frac{\tau}{\theta}}$

$$\chi(t) = S^2 \theta - \frac{S^2 \theta}{t} (1 - e^{-\frac{\tau}{\theta}})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) = S^2 \theta.$$

c) $\Phi'(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \theta e^{-\frac{\theta^2 \omega^2}{2}}.$

On a :

$$r(\tau) = e^{-\frac{\tau^2}{2\theta^2}}$$

$$\chi(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} S^2 \theta - \frac{S^2 \theta}{t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) = S^2 \theta \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

La courbe $\chi(t)$ se rapproche très rapidement de son asymptote, de sorte que la valeur limite du coefficient de diffusion est pratiquement atteinte au bout d'un temps très court.

37. Le schéma des libres parcours. Ce schéma qui joue un rôle fondamental en théorie cinétique peut se décrire ainsi :

Des points matériels quelconques (Molécules, granules browniens, bulles de savon équilibrées soumises à la turbulence d'une soufflerie¹ etc.) décrivent à vitesse constante des trajets rectilignes (libres parcours), troublés accidentellement par de brusques déviations (les chocs) causant une discontinuité de la vitesse. Les vitesses avant et après le choc, sont supposées *indépendantes en probabilité*.

Nous désignons par :

$$\Phi(\theta)$$

la probabilité (I) pour que la durée d'un libre parcours soit *inférieure* ou égale à θ , qui est aussi celle pour qu'un choc au moins survienne pendant la durée θ .

On a fait implicitement l'hypothèse de *l'homogénéité du temps et de l'espace*, c'est-à-dire que l'on admet que Φ ne dépend pas de l'instant ni du lieu où débute le libre parcours.

$\Phi(\theta)$ est une «fonction de répartition» ou «fonction des probabilités totales», jouissant par conséquent des propriétés suivantes :

1°) $\Phi(\theta)$ n'est jamais négative ni décroissante.

2°) $\Phi(0)=0$, $\Phi(\infty)=1$.

De la connaissance de $\Phi(\theta)$, on déduit un certain nombre de probabilités intéressantes dont nous allons parler.

(II) Probabilité pour que la durée d'un libre parcours soit *supérieure* ou égale à θ , ou encore qu'il n'y ait pas de choc pendant la durée θ ; c'est :

$$\psi(\theta)=1-\Phi(\theta).$$

(III) Probabilité pour que la durée d'un libre parcours soit *comprise* entre θ_1 et θ_2 ($\theta_2 > \theta_1$), qui est aussi celle pour qu'il y ait au moins un choc entre les instants t_1 et t_2 , mais pas avant t_1 .

Pour la calculer, nous appliquerons le théorème des probabilités

¹ M. Kampé de Fériet, Directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille a imaginé d'étudier la turbulence d'une soufflerie par la diffusion de bulles de savon. Il a, avant la guerre, exécuté de très nombreuses expériences dans la grande soufflerie de Lille.

totales. L'évènement contraire de l'évènement considéré est que la durée de libre parcours soit :

$$\begin{aligned} a) & \leq \theta_1 \\ b) & \geq \theta_2. \end{aligned}$$

Ces deux circonstances s'excluent mutuellement, donc la probabilité de l'évènement contraire est d'après (II) et (III) :

$$\Phi(\theta_1) + 1 - \Phi(\theta_2).$$

Par suite, celle de l'évènement cherché est :

$$1 - [\Phi(\theta_1) + 1 - \Phi(\theta_2)] = \Phi(\theta_2) - \Phi(\theta_1).$$

(IV) Probabilité pour qu'une molécule ayant déjà accompli un libre parcours de durée θ_1 , accomplisse un libre parcours total de durée inférieure à θ_2 ($\theta_2 > \theta_1$). C'est aussi la probabilité pour que la molécule n'ayant pas subi de choc pendant la durée θ_1 , en éprouve *au moins un* entre θ_1 et θ_2 .

Elle se déduit du théorème des probabilités composées.

L'évènement envisagé dans la probabilité (III) résulte des deux suivants :

a) un libre parcours de durée supérieure ou égale à θ_1 , a déjà été accompli : probabilité $1 - \Phi(\theta_1)$.

b) le libre parcours suivant a une durée inférieure à $(\theta_2 - \theta_1)$; c'est la probabilité de cet évènement que nous cherchons et nous la désignons par :

$$P(\theta_1, \theta_2 - \theta_1).$$

On a donc :

$$\Phi(\theta_2) - \Phi(\theta_1) = [1 - \Phi(\theta_1)] P(\theta_1, \theta_2 - \theta_1)$$

d'où

$$P(\theta_1, \theta_2 - \theta_1) = \frac{\Phi(\theta_2) - \Phi(\theta_1)}{1 - \Phi(\theta_1)}.$$

(V) Probabilité pour qu'une molécule ayant accompli un *libre parcours nul* accomplisse ensuite un libre parcours de durée θ , c'est-à-dire pour qu'une molécule qui vient de recevoir un choc, en éprouve *au moins un autre* pendant la durée θ . C'est :

$$P(0, \theta) = \Phi(\theta).$$

Ainsi, lorsqu'une molécule vient d'être choquée, la probabilité liée d'un libre parcours inférieur à une durée donnée est égale à la probabilité a priori.

Lorsque $(\theta_2 - \theta_1)$ devient infiniment petit, et supposant $\Phi(\theta)$ dérivable, les probabilités revêtent les expressions :

$$(III) \quad \Phi'(\theta) d\theta$$

$$(IV) \quad P(\theta, d\theta) = \frac{\Phi'(\theta) d\theta}{1 - \Phi(\theta)}$$

$$(V) \quad P(0, d\theta) = \Phi(d\theta) = \begin{cases} \Phi'(0) d\theta & \text{si } \Phi'(0) \neq 0 \\ \frac{1}{2} \Phi''(0) d\theta^2 & \text{si } \Phi'(0) = 0 \text{ et } \Phi''(0) \neq 0. \end{cases}$$

On remarquera en outre que la probabilité pour qu'il se produise *un choc* dans l'ensemble du « gaz » est égale à la probabilité pour qu'une molécule subisse *au moins un choc*, donc à $\Phi(\theta)$.

38. La connexion dans le schéma des libres parcours. Pour un intervalle infiniment petit, le nombre des chocs est proportionnel à $\Phi(d\theta)$, donc de l'ordre de $d\theta$ si $\Phi'(0) \neq 0$, et de l'ordre de $d\theta^2$ si $\Phi'(0) = 0$ mais $\Phi''(0) \neq 0$.

L'intérêt que présente le schéma des libres parcours est qu'il permet grâce à la fonction $\Phi(\theta)$, de construire la *connexion* du gaz. La liaison entre $\Phi(\theta)$ et le coefficient de connexion (*corpusculaire*) entre les vitesses d'une molécule aux instants t et $t+h$, s'établit en effet, avec une grande simplicité par le raisonnement suivant :

a) les molécules dont la durée de libre parcours est *inférieure* à $|h|$ n'apportent aucune contribution à la moyenne $\overline{U_1 U_2}$, car U_1 et U_2 sont par hypothèse indépendants.

b) les molécules dont la durée de libre parcours est *supérieure* à $|h|$, qui sont en nombre relatif :

$$1 - \Phi(|h|)$$

apportent la contribution :

$$\overline{U^2} [1 - \Phi(|h|)]$$

car pour elles : $U_1 = U_2$.

Finalement :

$$r(h) = 1 - \Phi(|h|) = \Psi(|h|).$$

Le raisonnement n'est pas altéré si, au lieu de considérer toutes les molécules du gaz, on l'applique à celles qui à un instant donné se trouvaient en un point donné ; $r(h)$ représente donc aussi le coefficient de *connexion* physique ; on se trouve dans le cas d'une connexion stationnaire et homogène.

Cette liaison entre $r(h)$ et $\Phi(\theta)$ entraîne une double conséquence : $r(h)$ est soumis aux conditions qui dérivent du fait que $\Phi(\theta)$ est une fonction de répartition et $\Phi(\theta)$ à celles qui résultent du fait que $1 - \Phi|h|$ est « un r ».

Ainsi $r(h)$ est une fonction qui n'est jamais croissante ni jamais négative ; elle tend vers zéro pour $h \rightarrow \infty$. Elle représente donc une forme très particulière de la corrélation.

$[1 - \Phi(\theta)]$ doit satisfaire, elle, aux conditions de cohérence. Ceci entraîne entre autres, que les libres parcours offrent nécessairement une dispersion. En effet, s'ils étaient tous égaux à θ_0 , on aurait :

$$\begin{cases} \Phi(\theta) = 0 & \text{pour } \theta < \theta_0 \\ \Phi(\theta) = 1 & \text{pour } \theta_0 \leq \theta \end{cases}$$

et par conséquent :

$$\begin{cases} r(h) = 1 & \text{pour } |h| < \theta_0 \\ r(h) = 0 & \text{pour } \theta_0 \leq |h|. \end{cases}$$

Or ceci est impossible, en vertu des conditions de cohérence : r ne saurait être égal à 1 sur un intervalle ayant la puissance du continu, sans être égal à 1 pour toute valeur de h .

En outre, il n'est pas possible que $\Phi''(0)$ soit nul car sinon r serait toujours égal à 1.

39. Dépendance des libres parcours successifs. La probabilité (IV) nous permet d'étudier l'influence du libre parcours déjà accompli, sur la probabilité du prochain choc. Introduisons pour cela la probabilité :

(VI) Probabilité pour qu'une molécule ayant déjà accompli un libre parcours de durée θ_1 , accomplisse un autre parcours de durée totale supérieure à θ_2 ($\theta_2 > \theta_1$) ou encore pour que la molécule qui n'a pas subi de choc pendant la durée θ_1 , n'en éprouve pas entre θ_1 et θ_2 .

C'est la complémentaire de la probabilité (IV), soit :

$$Q(\theta_1, \theta_2 - \theta_1) = 1 - P(\theta_1, \theta_2 - \theta_1) = \frac{\Psi(\theta_2)}{\Psi(\theta_1)}.$$

Il faut comparer cette probabilité à la probabilité *a priori* :

$$\Psi(\theta_2 - \theta_1)$$

qui est la probabilité pour qu'une molécule n'éprouve pas de choc dans l'intervalle $(\theta_2 - \theta_1)$, quand on ne sait rien sur son passé.

Q et Ψ s'expriment facilement au moyen du coefficient de corrélation:

$$Q(\theta_1, \theta_2 - \theta_1) = \frac{r(\theta_2)}{r(\theta_1)}$$

$$\Psi(\theta_2 - \theta_1) = r(\theta_2 - \theta_1).$$

Lorsque les probabilités Q et Ψ sont égales, cela veut dire que la durée du trajet déjà accompli sans choc, est *sans influence* sur la probabilité du prochain choc. On est donc dans le cas que la théorie cinétique appelle: «indépendance des libres parcours».

L'équation fonctionnelle:

$$\frac{r(\theta_2)}{r(\theta_1)} = r(\theta_2 - \theta_1)$$

détermine le coefficient de corrélation qui est l'*exponentielle simple*:

$$r(\theta) = e^{-\lambda\theta} \quad (\lambda > 0).$$

Le corpuscule aléatoire représentatif du gaz n'est alors pas deux fois dérivable en moyenne quadratique.

Mais, dans le schéma de la théorie cinétique où nos points matériels sont en réalité de petites sphères de rayon fini se choquant entre elles, cette hypothèse de l'indépendance des libres parcours n'est pas admissible.

Il est net en effet qu'une molécule qui vient de subir un choc (θ_1 nul) est, tant qu'elle reste voisine de la molécule choquante ($\theta_2 - \theta_1$, petit), protégée par elle comme par un écran, contre les chocs des autres molécules. Elle a donc moins de chances de subir un nouveau choc dans l'intervalle ($\theta_2 - \theta_1$) qu'une molécule qu'un libre parcours notable déjà accompli (θ_1 relativement grand) aurait dégagée de la molécule qui l'a choquée pour la dernière fois.

Cette condition de dépendance, imposée par l'image précise des molécules, se traduit dans nos notations par:

$$Q(\theta_1, \theta_2 - \theta_1) < Q(0, \theta_2 - \theta_1)$$

c'est à dire

$$\frac{r(\theta_2)}{r(\theta_1)} < r(\theta_2 - \theta_1).$$

Cette inégalité doit avoir lieu pour ($\theta_2 - \theta_1$) assez petit. On doit donc pouvoir trouver ($\theta_2 - \theta_1$) assez petit pour que:

$$\frac{r'(\theta_1)}{r(\theta_1)} < r'(0) + \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} r''(0).$$

a) Lorsque $r'(0) \neq 0$ (corpuscule non dérivable), cette inégalité entraîne la suivante :

$$\frac{r'(\theta_1)}{r(\theta_1)} < r'(0) \quad \text{et aussi :} \quad r''(0) < r'^2(0)$$

qui porte sur la *forme* du coefficient de corrélation, et qui signifie que la courbe $r(\theta)$ s'amorce *au-dessous* de l'exponentielle simple.

b) Lorsque $r'(0) = 0$ (corpuscule dérivable), l'inégalité peut toujours être satisfaite pour $(\theta_2 - \theta_1)$ assez petit.

Ainsi le schéma des chocs entre molécules non ponctuelles est compatible aussi bien avec un corpuscule dérivable qu'avec un corpuscule non dérivable, mais dans ce dernier cas une restriction est apportée à la forme du coefficient de corrélation.

Exemples :

1) Soit $r(h) = e^{-\lambda h^2}$, forme qui entraîne la dérivabilité.

On a :

$$\frac{r(\theta_2)}{r(\theta_1)} = e^{-\lambda (\theta_2^2 - \theta_1^2)}$$

$$r(\theta_2 - \theta_1) = e^{-\lambda (\theta_2 - \theta_1)^2}$$

d'où pour le rapport de la probabilité d'un choc pour une molécule ayant déjà accompli un libre parcours à la probabilité d'un choc pour une molécule qui vient d'en subir un :

$$e^{-2\lambda \theta_1 (\theta_2 - \theta_1)}$$

Ce rapport, inférieur à l'unité, n'atteint cette valeur que pour $(\theta_2 - \theta_1)$ infini. Les chances d'un choc augmentent constamment avec la durée d'un libre parcours.

2) Soit $r(h) = \frac{\tau}{\tau + |h|}$ (corpuscule non dérivable).

On a :

$$\frac{r(\theta_2)}{r(\theta_1)} = \frac{\tau + \theta_1}{\tau + \theta_2} = 1 - \frac{\theta_2 - \theta_1}{\tau + \theta_2}$$

$$r(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tau}{\tau + \theta_2 - \theta_1} = 1 - \frac{\theta_2 - \theta_1}{\tau + \theta_2 - \theta_1}$$

Par conséquent :

$$\frac{r(\theta_2)}{r(\theta_1)} > r(\theta_2 - \theta_1)$$

c'est-à-dire que la probabilité d'un choc est plus petite pour une molécule ayant accompli un libre parcours de durée θ_1 , que pour une molécule qui vient d'être choquée : cette forme r ne convient donc pas à la théorie cinétique.

$$3) r(h) = e^{-\lambda h - \frac{\nu h^2}{2}} \text{ (corpuscule non dérivable).}$$

Le rapport des deux probabilités est :

$$e^{-\nu \theta_2 (\theta_2 - \theta_1)}.$$

Il est inférieur à 1 : cette forme de r convient à la théorie cinétique.

40. La diffusion dans le schéma des libres parcours. Le coefficient de corrélation physique étant égal au coefficient de corrélation corpusculaire, la diffusion est donnée par l'intégrale :

$$\widehat{X^2} = 2 S^2 \int_0^t (t-s) r(s) ds = 2 S^2 \int_0^t (t-s) [1 - \Phi(s)] ds.$$

Supposons $\Phi(\theta)$ dérivable et soit $\varphi(\theta)$ sa dérivée.

La dispersion peut s'écrire :

$$\widehat{X^2} = S^2 \left[t^2 - \int_0^t (t-s)^2 \varphi(s) ds \right].$$

Admettons, ce qui est bien naturel, que les moments de $\varphi(s)$ existent — au moins jusqu'à l'ordre 2 — On voit alors que la valeur asymptotique de $\widehat{X^2}$ (pour t grand) est

$$[2 S^2 \int_0^\infty s \varphi(s) ds] t - S^2 \int_0^\infty s^2 \varphi(s) ds = at + b.$$

La valeur asymptotique du coefficient de diffusion est :

$$\chi = \frac{X^2}{2t} = S^2 \int_0^\infty s \varphi(s) ds = S^2 \bar{\theta}.$$

Il est possible d'ailleurs, dans le schéma des libres parcours de calculer le moment d'un ordre quelconque de X et l'on montre que si tous les moments de $\varphi(\theta)$ existent, X est équivalent à l'infini à $\xi \sqrt{t}$, ξ étant une variable aléatoire gaussienne, ce qui généralise le résultat classique de la théorie du mouvement brownien.

Pour t petit, $\widehat{X^2}$ est infiniment petit de l'ordre de t^2 .

X — EXEMPLES DE CORPUSCULES ALÉATOIRES

42. Corpuscule aléatoire libre. Le plus simple des corpuscules aléatoires est le corpuscule aléatoire libre, qui vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{X}=0.$$

Celui-ci correspond au système différentiel canonique :

$$X=U \quad \dot{U}=0.$$

L'inconnue du problème est la fonction de distribution conjuguée de X, \dot{X} . C'est une fonction de deux intégrales premières du système différentiel associé :

$$\frac{dx}{u} = \frac{du}{0} = dt$$

soit :

$$R(u, x-ut)$$

On peut la déduire de son expression initiale $R(u_0, x_0)$ pour $t=0$.

L'expression formelle de X est simple :

$$X=U_0 t + X_0$$

X_0 est la position initiale, U_0 la vitesse initiale. Ce sont deux constantes aléatoires dont la loi de probabilité $R(x_0, u_0)$ est considérée comme une donnée.

Le moment conjugué général de X et de U est :

$$X^\alpha U^\beta = \iint x^\alpha u^\beta R(u, x-ut) dx du = \iint (\xi+ut)^\alpha u^\beta R(u, \xi) du d\xi.$$

C'est un polynôme de degré α en t , dont les coefficients sont des moments initiaux.

En particulier :

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \bar{X}_0 + t\bar{U}_0 \\ \bar{X}^2 &= \bar{X}_0^2 + 2\bar{X}_0\bar{U}_0 t + \bar{U}_0^2 t^2 \\ \overline{XU} &= \bar{X}_0\bar{U}_0 + \bar{U}_0^2 t. \end{aligned}$$

Rapportons le corpuscule à ses axes propres, c'est-à-dire par rapport auxquels :

$$\bar{X}_0=0 \quad \bar{U}_0=0.$$

Alors, à tout instant :

$$\bar{X}=0 \quad \bar{U}=0.$$

La position et la vitesse sont par rapport à ces axes des variables purement aléatoires.

Supposons maintenant que X_0 et U_0 soient indépendantes. En particulier, l'on a :

$$\overline{X_0 U_0} = 0.$$

Posons :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \overline{X^2} ; \sigma_0^2 = \overline{X_0^2} ; S^2 = \overline{U^2} = \overline{U_0^2} \\ r &= \frac{\overline{XU}}{S\sigma} ; r_1 = \frac{\overline{X_0 U_0}}{\sigma_0 \sigma} \end{aligned}$$

Les formules de tout à l'heure deviennent avec ces notations :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma_0^2 + S^2 t^2 \\ r &= \frac{S}{\sigma} t = \frac{S t}{\sqrt{\sigma_0^2 + S^2 t^2}} \\ r_1 &= \frac{\sigma_0}{\sigma} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sigma_0^2 + S^2 t^2}} \end{aligned}$$

On peut se représenter le corpuscule aléatoire libre comme une espèce de «nébuleuse» dont la densité est égale à la probabilité de présence :

$$\rho(x, t) = \int R(u, x-ut) du.$$

La nébuleuse se déplace d'un *mouvement d'ensemble rectiligne et uniforme*, mais en outre ses éléments sont doués d'un *mouvement d'agitation* dont l'énergie est constante.

Ainsi, le principe d'inertie appliqué à un corpuscule aléatoire libre ($\ddot{X}=0$) ne donne pas seulement comme conséquence que son centre de gravité est en mouvement rectiligne et uniforme, mais y ajoute que l'énergie d'agitation est constante. On s'explique de cette manière qu'il est tout à fait naturel que les molécules d'un gaz soient douées d'un mouvement d'agitation statistiquement permanent.

Si l'on regarde l'énergie d'agitation comme étant *l'énergie interne* du corpuscule, on peut énoncer que l'énergie interne d'un corpuscule aléatoire libre (donc isolé) se conserve. Avec le temps, le corpuscule se dilate et son énergie se dilue, comme le montre l'expression de la dispersion :

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + S^2 t^2.$$

Si l'on appelle *incertitude* le produit $S\sigma$ et que l'on désigne par $\frac{h}{4\pi}$ l'incertitude initiale ($S\sigma_0$), on a :

$$S\sigma = S \sqrt{\sigma_0^2 + \left(\frac{ht}{4\pi\sigma_0}\right)^2} \geq \frac{h}{4\pi}.$$

L'incertitude va toujours en croissant au cours du temps. La formule :

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + \left(\frac{ht}{4\pi\sigma_0} \right)^2$$

est exactement celle qu'on obtient en traitant le problème du corpuscule libre par l'équation de Schrödinger. Cette analogie n'est par fortuite car la Mécanique ondulatoire est vraisemblablement une Mécanique aléatoire en général *non lagrangienne*, mais l'étant accidentellement pour un problème aussi simple que celui du corpuscule libre.

Particularisons encore le problème en posant que $R(u_0, x_0)$ est une loi de Gauss :

$$R(u_0, x_0) = \frac{1}{2\pi S \sigma_0} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2} - \frac{u_0^2}{2S^2}}$$

d'où par suite :

$$R(u, x - ut) = \frac{1}{2\pi S \sigma_0} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{\sigma_0^2} - \frac{2xut}{\sigma_0^2} + \frac{u^2 \sigma_0^2}{S^2 \sigma_0^2} \right]}$$

et

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

avec : $\sigma^2 = \sigma_0^2 + S^2 t^2$.

La vitesse de l'équivalent hydrodynamique est la moyenne liée :

$$\bar{U} = \frac{1}{\rho} \int R u \, du = \frac{S^2 t}{\sigma^2} x.$$

On vérifie facilement que ρ satisfait bien à l'équation de continuité :

$$\frac{d_0}{dt} \log \rho + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = 0$$

où

$$\frac{d_0}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{S^2 t}{\sigma^2} x \frac{\partial}{\partial x}.$$

La vitesse quadratique moyenne d'agitation est :

$$\overline{U^2} = \frac{1}{\rho} \int R \cdot (u - \bar{U})^2 \, du = \frac{S^2 \sigma_0^2}{\sigma^2}$$

et l'équation du mouvement de l'équivalent hydrodynamique :

$$\frac{d_0 \overline{U}}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \overline{U^2} = - \overline{U^2} \frac{\partial \log \rho}{\partial x} = \frac{\sigma_0^2 S^2}{\sigma^4}.$$

La force de pression :

$$\frac{\sigma_0^2 S^2}{\sigma^4} x = \left(\frac{h}{4\pi} \right)^2 \frac{x}{\sigma^4}$$

coincide avec la *force quantique* :

$$\frac{h^2}{8\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x} \right)$$

à laquelle est soumis le « fluide de probabilité » de la Mécanique ondulatoire.

Le corpuscule aléatoire libre est doué d'une *entropie*. Si on la calcule au sens de *Boltzmann*, c'est-à-dire par la formule :

$$\mathcal{H} = - \iint R \log R \, dx \, du$$

ou trouve :

$$\mathcal{H} = \log(\sigma_0 S) + C^{te}.$$

Elle est donc *constante*, résultat conforme à ce que nous avons vu dans la Thermodynamique du corpuscule aléatoire (deux fois dérivable) — car il y a évidemment ici conservation de l'extension en phase.

Or ceci est choquant car si l'énergie du corpuscule libre se conserve, par contre elle se dégrade car le corpuscule se dilate et l'on a ordinairement l'intention de mesurer par l'entropie le degré de dilution de l'énergie.

L'explication est la même que celle déjà donnée à propos de la Thermodynamique. Pour calculer l'entropie, il faut imaginer une transformation virtuelle, composée d'une suite d'états de maximum de probabilité *tangents aux états réels* (suite réversible) et non pas prendre la suite des états dans l'évolution réelle.

Un état de maximum de probabilité tangent à l'état réel défini par les paramètres macroscopiques S et σ , a pour fonction de distribution la loi de Gauss :

$$\mathcal{G}_0 = \frac{1}{2\pi\sigma S} \exp \left[- \frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{u^2}{2S^2} \right]$$

L'entropie (conforme à la conception de la Thermodynamique) est :

$$\mathcal{H}_0 = - \iint R \log R_0 \, dx \, du.$$

On voit qu'elle est égale à :

$$\mathcal{H} = \log(\sigma S) + C^{10}$$

et qu'elle croit par conséquent avec le temps. Conformément à un résultat déjà trouvé, elle est égale (à une C^{10} additive près) au logarithme de l'incertitude.

La variation d'entropie entre les instants 0 et t est :

$$\log(S\sigma) - \log(S\sigma_0) = \log \frac{\sigma}{\sigma_0} > 0.$$

C'est la valeur de *transformation non compensée* entre les instants 0 et t .

Ainsi, le corpuscule aléatoire libre est-il doué non pas seulement des propriétés d'un simple point matériel mais de toutes celles, bien plus riches, d'un système *thermodynamique*.

43. Rotateur plan aléatoire. Traitons maintenant d'un corpuscule à deux dimensions : le *rotateur plan*, c'est-à-dire un corpuscule aléatoire dont les deux coordonnées sont des oscillateurs aléatoires de même pulsation.

Ses équations différentielles sont :

$$\begin{cases} \ddot{X} + \Omega^2 X = 0 \\ \ddot{Y} + \Omega^2 Y = 0 \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= U; \dot{U} = -\Omega^2 X \\ \dot{Y} &= V; \dot{V} = -\Omega^2 Y. \end{aligned}$$

Le système différentiel associé est :

$$dt = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{du}{-\omega^2 x} = \frac{dv}{-\omega^2 y}.$$

Il représente le mouvement d'un point matériel attiré par un centre proportionnellement à la distance. Il admet quatre intégrales premières que l'on peut choisir de manière que trois ne contiennent pas le temps et que la quatrième soit linéaire par rapport au temps.

Ce sont :

$$\begin{cases} \omega^2 x^2 + u^2 = 2\varepsilon_1 \\ \omega^2 y^2 + v^2 = 2\varepsilon_2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{équation d'énergie} \end{array} \right.$$

$$vx - uy = \frac{2\varepsilon}{\omega}, \quad \text{équation des aires}$$

$$t - \frac{1}{\omega} \arcsin \sqrt{\frac{\omega x}{\omega^2 x^2 + u^2}} = \varepsilon_3, \quad \text{équation du mouvement.}$$

On peut exprimer aussi les quatre intégrales premières en fonction des coordonnées et des vitesses initiales :

$$\begin{cases} x \cos \omega t - \frac{u}{\omega} \sin \omega t = x_0 \\ \omega x \sin \omega t + u \cos \omega t = u_0 \\ y \cos \omega t - \frac{v}{\omega} \sin \omega t = y_0 \\ \omega y \sin \omega t + v \cos \omega t = v_0. \end{cases}$$

La trajectoire est l'une des deux ellipses :

$$\varepsilon_2 x^2 + \varepsilon_1 y^2 \pm 2xy \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon^2} = \frac{2\varepsilon^2}{\omega^2}.$$

C'est un *cercle* si

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = |\varepsilon|.$$

La fonction de distribution conjuguée de X, Y, U, V , à l'instant t est une fonction des quatre intégrales premières du système différentiel associé. Mais si le rotateur est *stationnaire*, elle n'est fonction que des trois intégrales indépendantes de t :

$$\frac{\omega^2 x^2 + u^2}{2}, \frac{\omega^2 y^2 + v^2}{2}, \frac{\omega}{2} (vx - uy).$$

Elle dépend en outre — explicitement — de ω , bien entendu.

Cherchons maintenant à introduire des condition d'*isotropie* qui, pour le problème de Mécanique aléatoire, soient l'analogue du *mouvement circulaire* en Mécanique certaine.

La probabilité doit être indifférente à une *rotation autour de l'origine*. Si l'on fait tourner autour de O , le point (x, y) , accompagné du vecteur vitesse (u, v) , la probabilité ne doit dépendre que de la figure formée par ces deux vecteurs. Une fois $\xi = x^2 + y^2$, fixé, elle ne dépend que de $\eta = u^2 + v^2$, et de l'angle des deux vecteurs, représenté par le produit vectoriel :

$$vx - uy = \frac{2\varepsilon}{\omega}.$$

Mais, d'autre part, la stationnarité lui impose d'être une fonction de :

$$2\varepsilon_1 = \omega^2 x^2 + u^2, 2\varepsilon_2 = \omega^2 y^2 + v^2, \varepsilon$$

ou, ce qui revient au même, de :

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{\omega^2 \xi + \eta}{2}, \varepsilon_1, \varepsilon.$$

La confrontation des deux sortes de conditions imposées montre que la fonction de distribution du rotateur plan *stationnaire et isotrope*, a la forme :

$$R \left[\frac{\omega^2(x^2+y^2)+u^2+v^2}{2}, \frac{\omega}{2}(vx-uy), \omega \right].$$

Elle ne dépend que de l'énergie totale, de la constante des aires et de ω .

La loi de probabilité des constantes aléatoires :

$$E_1, E_2, E, \omega$$

est :

$$\frac{4\pi}{\omega^2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon^2}} R(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon, \omega).$$

On peut retrouver ce résultat par une voie différente. R vérifie d'abord l'équation aux dérivées partielles des multiplicateurs du système différentiel associé. Si R ne dépend pas de t , on a donc :

$$u \frac{\partial R}{\partial x} + v \frac{\partial R}{\partial y} - \omega^2 x \frac{\partial R}{\partial u} - \omega^2 y \frac{\partial R}{\partial v} = 0.$$

Comme la force ne dépend que de la position, il y a conservation de l'extension en phase et R est non seulement un multiplicateur, mais un *invariant intégral* du système différentiel associé.

D'autre part, R doit rester invariante par les rotations. C'est donc un invariant intégral du système différentiel qui a pour solutions les équations d'une rotation d'axes. R vérifie par suite la seconde équation aux dérivées partielles :

$$y \frac{\partial R}{\partial x} - x \frac{\partial R}{\partial y} + v \frac{\partial R}{\partial u} - u \frac{\partial R}{\partial v} = 0.$$

La première a pour solution générale :

$$R = \Phi \left[\frac{\omega^2 x^2 + u^2}{2}, \frac{\omega^2 y^2 + v^2}{2}, vx - uy, \omega \right] = \Phi(\lambda, \mu, \nu, \omega).$$

Il existe des fonctions de ce type satisfaisant à la seconde; il suffit pour cela que :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = 0$$

Φ est donc finalement fonction de $\lambda + \mu, \nu, \omega$.

Ainsi la forme de R a été précisée par le fait que ce devait être une fonction invariante par *les transformations de deux groupes*.

Le premier est le groupe à un paramètre, attaché à l'équation fondamentale en R , qui exprime la conservation de la probabilité et résulte de la dérivabilité en moyenne quadratique. Il est défini par la transformation infinitésimale :

$$\begin{aligned} dx &= u dt & du &= -\omega^2 x dt \\ dy &= v dt & dv &= -\omega^2 y dt. \end{aligned}$$

C'est dans les équations de ce groupe qu'intervient la *force extérieure*.

Le second groupe est un groupe à un paramètre qui représente les rotations simultanées du même angle, des vecteurs position et vitesse. Ses équations en termes finis sont :

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} u' = u \cos \alpha - v \sin \alpha \\ v' = u \sin \alpha + v \cos \alpha \end{cases}$$

et ses équations infinitésimales :

$$\begin{cases} dx = -y d\alpha \\ dy = x d\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} du = -v d\alpha \\ dv = u d\alpha. \end{cases}$$

Il correspond à des *propriétés purement internes* du corpuscule, ou a l'on veut, à des relations entre le corpuscule et l'espace dans lequel il est plongé, indépendamment des actions extérieures qui donnent à son mouvement sa physionomie particulière. L'*isotropie* n'est qu'une forme particulière des conditions de ce genre dont les plus usitées en Mécanique quantique sont : l'invariance aux permutations, à la symétrie par rapport à un point ou à un plan, etc...

D'une façon générale, on voit que les conditions physiques imposées à un corpuscule aléatoire, qui sont de deux sortes (externes et internes), imposent à l'inconnue R du problème de Mécanique aléatoire d'être un invariant commun à un certain nombre de groupes; Ces conditions, à elles seules ne déterminent pas R , mais on peut souvent tirer de la forme ainsi restreinte, des conclusions intéressantes sans avoir besoin de préciser davantage.

Nous allons maintenant poursuivre la solution de notre problème en supposant que R est une loi de Gauss :

$$R = \frac{\omega}{4\pi^2 S^2 (1-r^2)} e^{-\frac{1}{2S^2(1-r^2)} [\omega^2(x^2+y^2) + u^2 + v^2 + 2r\omega(vx-uy)]}$$

On trouve pour les moments du 2^o ordre :

$$\begin{aligned}\overline{U^2} &= \overline{V^2} = \omega^2 \overline{X^2} = \omega^2 \overline{Y^2} = S^2 \\ \overline{XY} &= \overline{XU} = \overline{YV} = \overline{UV} = 0 \\ \overline{UY} &= -\overline{VX} = \frac{r}{\omega} S^2.\end{aligned}$$

Il en résulte immédiatement la vitesse de l'équivalent hydrodynamique :

$$\overline{U} = r\omega y \quad \overline{V} = -r\omega x$$

et sa densité :

$$\rho = \frac{\omega^2}{2\pi S^2} e^{-\frac{\omega^2}{2S^2}(x^2+y^2)}$$

C'est donc un fluide, fortement concentré autour de son centre et qui tourne *comme un solide* avec la vitesse angulaire ωr , donc différente de la pulsation ω du rotateur. Si $r=0$, le fluide est au repos.

Il est certain que l'adoption de la loi de Gauss entraîne des simplifications excessives. D'une manière plus générale, on pourrait obtenir une rotation différenciée, chaque élément fluide tournant avec une vitesse angulaire fonction de la distance.

XI—SYSTEMES DE CORPUSCULES ALÉATOIRES

44. Forme générale du problème. La simple notion de corpuscule aléatoire, qui ne fait que généraliser le *point matériel* de la Mécanique Rationnelle, n'est évidemment pas suffisante pour répondre aux exigences de tous les problèmes que pose la Physique. Il est clair, par exemple, que le gaz que représente un corpuscule aléatoire possède les degrés de liberté et les symétries d'un gaz *mono-atomique*. Pour représenter un gaz *biatomique*, il faut imaginer deux corpuscules aléatoires dont la distance soit une constante (certaine ou aléatoire).

Considérons aussi le mélange de *deux gaz monoatomiques*. Chacun est représenté par un corpuscule aléatoire et, en général, ces deux corpuscules ne seront pas indépendants. La présence de l'un influe sur la probabilité de l'état de l'autre. Aux corrélations internes de chaque corpuscule (diffusion des gaz en eux-mêmes) s'ajoutent des corrélations réciproques — jouant le rôle de *liaisons* plus ou moins rigides — qui règlent la diffusion des gaz l'un dans l'autre.

Citons encore le cas des *systèmes atomiques*. L'électron périphérique de l'atome d'hydrogène ou de l'atome d'hélium ionisé, peut bien être représenté par un corpuscule aléatoire unique. Mais, dès que l'atome

contient plus d'un électron, il faut tenir compte des liaisons de probabilité entre électrons et faire appel à la Mécanique des Systèmes de corpuscules aléatoires.

Un système de corpuscules aléatoires est représenté par un certain nombre de paramètres aléatoires, généralisation des paramètres de Lagrange, en Mécanique Analytique. Il est soumis de la part de tout ce que lui est « extérieur » (ce mot ne voulant plus dire : de tout ce qui n'occupe pas le même espace) à des *forces*. Les états sont solutions d'un système différentiel, compte tenu de conditions de structure (symétries, isotropie, indiscernabilité, etc.).

En Mécanique classique des systèmes de points ou de solides, il existe des *liaisons*, caractérisées par des *forces de liaison*. En Mécanique aléatoire, la notion de liaison prend un caractère plus général, qui rapproche les systèmes aléatoires des fluides naturels. Elle devient équivalente à la notion statistique de *corrélation*. Nous dirons en effet qu'il existe une liaison entre deux corpuscules aléatoires dès que la présence de l'un modifie la probabilité de la position ou de la vitesse de l'autre. Une telle influence est exactement ce que la statistique appelle une « liaison de probabilité » ou plus brièvement une « corrélation », et les liaisons rigides envisagées par la Mécanique ne sont autre chose que des *cas limites* de la corrélation.

On étudie, en Mécanique Rationnelle, des Systèmes constitués par des points (ou par des sous-systèmes) *mécaniquement indépendants*, c'est à-dire tels que le mouvement de chacun d'eux puisse être déterminé comme si les autres n'existaient pas. Les paramètres et les équations différentielles du mouvement se séparent en groupes dont chacun n'intéresse que l'un des sous-systèmes constituants.

En Mécanique aléatoire, une telle séparation peut aussi exister dans la forme, mais ne correspond pas nécessairement à l'idée qu'on se fait des systèmes indépendants. Elle n'exclut nullement, en effet, la possibilité de corrélations entre les corpuscules indépendants au sens mécanique. Il suffit pour que ces corrélations existent entre les corpuscules que les positions et les vitesses *initiales* soient des constantes aléatoires dépendantes en probabilité, circonstance qui est absolument incompréhensible en Mécanique classique. Pour qu'il y ait en Mécanique aléatoire une véritable décomposition d'un système en sous-systèmes, il faut non seulement que les équations différentielles du mouvement se séparent en groupes (indépendance mécanique) mais encore que les données initiales correspondant à ces groupes soient *indépendantes en probabilité*.

Une réflexion s'impose au sujet de la notion de *force*. Les systèmes aléatoires sont, comme les systèmes certains, soumis de la part du

monde extérieur, à des forces. Mais, par contre, les liaisons entre les constituants que la Mécanique classique traduit par des forces intérieures, apparaissent maintenant comme des corrélations. Ces corrélations peuvent aussi parfois s'exprimer par des forces : tel est le cas des forces de tension dans un fluide, qui se déduisent de la corrélation entre les vitesses d'agitation. Mais l'inverse n'est pas toujours vrai. Pour prendre un exemple, il est possible que les taches solaires exercent une action sur la Météorologie de notre Atmosphère. Cette action, qui pourrait se constater par l'étude empirique de la corrélation entre le mouvement des taches solaires et celui de nos cyclones, et qui s'expliquerait par le fait que les taches peuvent influencer sur le rayonnement reçu par l'Atmosphère, donc sur la distribution des températures et des pressions, est bien trop complexe pour être traduite par une force. La notion de corrélation apparaît ainsi comme une notion plus générale et certainement moins métaphysique que celle de force ; il y a donc tout avantage à substituer celle-là à celle-ci, et à dire : nous constatons que la présence du système A modifie la probabilité de l'évolution du système B, donc A exerce une action sur B qui peut s'exprimer en tous cas par des corrélations, mais ces corrélations ne pourront pas toujours être représentées par des forces.

Une remarque est encore à faire en ce qui concerne la possibilité de définir l'*interaction* de deux corpuscules grâce au concept aléatoire. Ces deux corpuscules étant considérés comme un *système unique*, leur ensemble est représentable par un *fluide* dans l'espace de configuration, et l'on peut dire que, sommairement, il y a équivalence entre les corrélations et les tensions du fluide fictif. Celles-ci, en ce qui concerne les coordonnées relatives à un des corpuscules, expriment donc les actions qui s'exercent sur les éléments de ce corpuscule en tant que constituant du système. Mais d'autre part, ce corpuscule est équivalent à un fluide dans l'espace ordinaire à trois dimensions et les tensions de cet équivalent hydrodynamique représentent les liaisons intérieures au corpuscule, quand il est seul. Les tensions ne sont donc pas en général les mêmes dans les deux cas et leur différence exprimera l'action du second corpuscule sur le premier, c'est-à-dire l'interaction entre les constituants du système.

45. Equations du mouvement d'un système de points aléatoires. Considérons n corpuscules aléatoires $O_i(X_i, Y_i, Z_i)$, soumis à des forces ayant pour composantes :

$$A_i(X_k, Y_k, Z_k, t); B_i(X_k, Y_k, Z_k, t); C_i(X_k, Y_k, Z_k, t).$$

Ces corpuscules peuvent avoir des masses différentes, que nous supposons certaines. Les équations différentielles de leur mouvement sont :

$$\begin{cases} m_i \ddot{X}_i = A_i \\ m_i \ddot{Y}_i = B_i \\ m_i \ddot{Z}_i = C_i. \end{cases}$$

Soit (U_i, V_i, W_i) la vitesse ; on peut écrire le système de $6n$ équations :

$$\begin{cases} \dot{X}_i = U_i & \dot{Y}_i = V_i & \dot{Z}_i = W_i \\ \dot{U}_i = A_i & \dot{V}_i = B_i & \dot{W}_i = C_i. \end{cases}$$

La force donnée, dépend en général des positions de tous les corpuscules. S'il se trouve que la force appliquée au corpuscule ne dépend que des coordonnées de ce corpuscule, l'intégration *formelle* du système est identique à celle des mouvements de n corpuscules isolés.

Mais, en Mécanique aléatoire, l'inconnue du problème est la fonction de distribution conjuguée des positions et des vitesses :

$$R(x_1, \dots, w_n, t).$$

On voit donc que le concept statistique introduit des liaisons là, où en Mécanique classique, il y avait indépendance totale. Pour déterminer la fonction R , il faut par exemple se donner la fonction de distribution conjuguée des positions et des vitesses initiales des corpuscules. En Mécanique classique, ces éléments constituent $6n$ constantes numériques. En Mécanique aléatoire, ce sont $6n$ nombres aléatoires. Parler de leur fonction de distribution conjuguée c'est admettre qu'elles peuvent être reliées par des corrélations, c'est-à-dire qu'il existe une interdépendance entre les données, même lorsque les mouvements des corpuscules constituant satisfont à des équations analytiquement indépendantes entre elles.

46. Liaisons en Mécanique aléatoire. Le point de vue aléatoire peut introduire des liaisons d'un genre nouveau.

Il existe des *liaisons* entre les corpuscules aléatoires qui constituent le système, si les coordonnées et les vitesses des différents corpuscules sont liées par des relations a priori, autres que les équations du mouvement. Ces relations — et c'est là ce qui est nouveau — peuvent bien entendu être des *relations de probabilité*, c'est-à-dire des *corrélations*.

Il peut arriver que les liaisons s'expriment par des *relations fonctionnelles certaines* entre les coordonnées, les vitesses et des constantes aléatoires. Si les vitesses n'y figurent pas, on peut utiliser ces relations pour réduire le nombre de paramètres nécessaires à définir le système. Ce sont des liaisons *holonomes aléatoires*.

Enfin, si ces relations fonctionnelles ne contiennent pas de paramètres aléatoires, elles sont analogues aux liaisons de la Mécanique certaine.

Lorsque les distances mutuelles des corpuscules sont des constantes certaines, on a un *solide aléatoire*.

Prenons comme exemple le système constitué par deux corpuscules libres à une dimension. Le système différentiel de leur mouvement est :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = U_1 & \dot{U}_1 = 0 \\ \dot{X}_2 = U_2 & \dot{U}_2 = 0 \end{cases}$$

dont la solution formelle est :

$$\begin{cases} X_1 = A_1 t + B_1 & U_1 = A_1 \\ X_2 = A_2 t + B_2 & U_2 = A_2 \end{cases}$$

A_1, A_2, B_1, B_2 sont quatre constantes aléatoires ayant pour fonction de distribution conjuguée :

$$R(a_1, a_2, b_1, b_2).$$

La loi de probabilité conjuguée des deux corpuscules est :

$$R(a_1, a_2, x_1 - u_1 t, x_2 - u_2 t).$$

a) *Liaison aléatoire générale*

L'exemple le plus simple est l'absence de liaison de probabilité entre les deux corpuscules que l'on exprimera en écrivant que $R(a_1, a_2, b_1, b_2)$ est le produit d'une fonction de (a_1, b_1) par une fonction de (a_2, b_2) .

b) *Liaison holonome aléatoire*

Ecrivons que la distance $(X_2 - X_1)$ est une constante aléatoire E :

$$\begin{aligned} X_1 &= A_1 t + B_1 \\ X_2 &= A_1 t + B_1 + E. \end{aligned}$$

Le problème a pour solution une loi de probabilité à 3 variables :

$$R(u_1, u_2, \varepsilon).$$

Le système primitif de quatre équations différentielles est remplacé par deux équations différentielles et une équation en termes finis :

$$\dot{X}_1 = U_1, \dot{U}_1 = 0, X_2 = X_1 + E.$$

L'équation en termes finis a une influence sur la corrélation entre les intégrales premières du système différentiel.

c) *Liaison holonome certaine*

La distance $(X_2 - X_1)$ est une constante certaine. L'ensemble des deux corpuscules constitue un solide aléatoire entièrement défini par

X_i, U_i . La solution du problème est une fonction de distribution à deux variables :

$$R(u_i, x_i - u_i t).$$

47. Équations de Lagrange — Principe de Hamilton. Introduisons la force vive aléatoire $2T$, l'action hamiltonienne \mathcal{L} , l'hamiltonien H , fonctions certaines de paramètres aléatoires Q_i de Lagrange dont dépend le système après réductions, de leurs dérivées \dot{Q}_i et de t .

En Mécanique certaine, si le potentiel F peut s'exprimer à l'aide des paramètres Q_i (cas des systèmes sans résistances passives), les équations de Lagrange sont simplement l'aspect invariant des équations différentielles du mouvement. On les obtient par changement de variables à l'aide des opérations élémentaires du calcul différentiel, qui s'étendent *formellement* au Calcul aléatoire. Donc, les équations de Lagrange et les équations de Hamilton sont valables en Mécanique aléatoire.

Par suite, le *principe de Hamilton* s'applique à la valeur probable de la fonction aléatoire $\mathcal{L}(Q_i, \dot{Q}_i, t)$. Parmi toutes les fonctions aléatoires qui, pour $t=t_0$ et $t=t_1$, sont égales à des constantes aléatoires données (par leur loi de probabilité conjuguée), celles qui conviennent au mouvement vrai rendent maxima ou minima l'intégrale certaine :

$$\int_{t_0}^{t_1} \bar{\mathcal{L}} dt.$$

H est une fonction certaine des $2n$ variables Q_i et P_i (coordonnées dans l'extension en phase), elles-mêmes fonctions aléatoires du temps.

Le système différentiel canonique est :

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad \dot{P}_i = - \frac{\partial H}{\partial Q_i}.$$

La fonction de distribution conjuguée R des $2n$ variables Q_i et P_i vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial R}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial R}{\partial p_i} \right) = 0$$

ce qui montre que $R(Q_i, P_i, t)$ est une constante aléatoire (la divergence Δ dans l'extension en phase est nulle).

Nous sommes dans le cas de la Mécanique statistique de *Gibbs*. La fonction \mathcal{H} de Boltzmann :

$$\mathcal{H} = - \int R \log R dq_1 \cdots dp_n$$

ne peut varier.

Pour trouver une variation de l'entropie, il faut comme nous l'avons dit à propos de la Thermodynamique substituer à \mathcal{H} l'expression :

$$\mathcal{H}_0 = - \int R \log R_0 dq_1 \cdots dp_n$$

R_0 étant la fonction de distribution de l'état de maximum de probabilité tangent à l'état réel, soit

$$R_0 = A e^{-\frac{H}{k}}$$

L'entropie, conforme à la conception de la thermodynamique, est à une constante près :

$$-\log A.$$

48. Interaction de deux corpuscules. Étudions le système formé par deux corpuscules aléatoires C_1 et C_2 , de masse unité, mécaniquement indépendants, c'est-à-dire soumis à une force qui ne dépend pour chacun que de sa propre position et du temps.

$$\text{Les équations de leur mouvement sont : } \begin{cases} \ddot{X}_1 = A_1(X_1, t) \\ \ddot{X}_2 = A_2(X_2, t). \end{cases}$$

Elles consistent en deux groupes mécaniquement indépendants, en ce sens que les équations différentielles s'intègrent séparément. Pourtant les deux corpuscules peuvent être liées par des *corrélations* si la fonction de distribution :

$$R(x_1, u_1, x_2, u_2, t_0)$$

correspondant aux données initiales ne se décompose pas en le produit d'une fonction de (x_1, u_1) par une fonction de (x_2, u_2) .

Cette fonction de distribution est celle d'un *corpuscule fictif* C , à deux coordonnées X_1, X_2 . A C , équivaut un fluide fictif à *deux dimensions* qui est soumis en chaque point (x_1, x_2) à une force ayant pour composantes :

$$\frac{d_0 \bar{U}_1}{dt}, \frac{d_0 \bar{U}_2}{dt}$$

$$\text{où } \bar{U}_1 = \frac{1}{\varphi} \int R u_1 du_1 du_2; \varphi = \int R du_1 du_2$$

$$\text{et } \frac{d_0}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{U}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \bar{U}_2 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

La résultante de cette force pour l'ensemble du fluide a pour première composante :

$$\int \frac{d_0 \bar{U}_1}{dt} \varphi dx_1 dx_2 = \frac{d_0}{dt} \int \bar{U}_1 \varphi dx_1 dx_2 = \frac{d_0 \bar{U}_1}{dt} = \bar{\dot{U}}_1 = \bar{A}_1.$$

Le fluide fictif est donc soumis, dans son ensemble, à une force de composantes $\overline{A}_1, \overline{A}_2$.

Mais le corpuscule C_1 , considéré seul possède un équivalent hydrodynamique à une dimension déduit de la loi de probabilité individuelle de C_1 :

$$R_1(x_1, u_1, t) = \int R dx_2 du_2.$$

Ce fluide est soumis en chaque point à une force égale à :

$$\frac{d_1 \overline{U}_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \overline{U}_1 + \overline{U}_1 \frac{\partial \overline{U}_1}{dx}$$

avec

$$\begin{aligned} \overline{U}_1 &= \frac{1}{\rho_1} \int R_1 u_1 du_1 = \frac{1}{\rho_1} \int R u_1 du_1 du_2 dx_2 = \frac{1}{\rho_1} \int \overline{U}_1 dx_2 \\ \rho_1 &= \int R_1 du_1 = \int R dx_2 du_2 du_1 = \int \rho dx_2. \end{aligned}$$

Cette force est, en général, différente de la composante correspondante de la force qui s'exerçait sur le fluide fictif à deux dimensions. Leur différence peut être interprétée comme étant dans le système, l'action du corpuscule C_2 sur le corpuscule C_1 .

Si l'on prend la moyenne de la force intérieure à C_1 , pour tout ce corpuscule, on retrouve évidemment la force \overline{A}_1 , la même que la composante correspondant à C_1 de la force qui s'exerçait sur le corpuscule C .

Admettons maintenant que les corpuscules C_1 et C_2 sont *indépendants en probabilité*. Alors :

$$R(x_1, u_1, x_2, u_2, t) = R_1(x_1, u_1, t) \cdot R_2(x_2, u_2, t).$$

\overline{U}_1 devient :

$$\overline{U}_1 = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \int u_1 R_1 R_2 du_1 du_2 = \frac{1}{\rho_1} \int u_1 R_1 du_1 = \overline{U}_1.$$

C'est donc aussi la vitesse du fluide représentant C_1 . Voyons ce qu'il en est des accélérations. Comme \overline{U}_1 ne dépend plus x_2 , on a :

$$\frac{d_0 \overline{U}_1}{dt} = \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial t} + \overline{U}_1 \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1} = \frac{d_1 \overline{U}_1}{dt}.$$

Par conséquent, la première composante de l'accélération du fluide fictif correspondant à C est identique à l'accélération du fluide fictif correspondant à C_1 .

On peut donc dire que, si deux corpuscules aléatoires sont *indépendants* (en probabilité), le fluide fictif équivalent à leur ensemble contient séparément les fluides qui représentent chacun d'eux. On mesure

donc les actions réciproques de deux corpuscules par la différence entre l'accélération du fluide équivalent à l'ensemble des deux et les accélérations des fluides équivalents aux corpuscules individuels. Cette différence est nulle lorsque les corpuscules sont indépendants.

On peut donner de l'action réciproque de deux corpuscules aléatoires la description physique suivante :

1°. Le corpuscule C_1 , pris dans son ensemble, peut exercer sur l'ensemble du corpuscule C_2 , une action qui est une *force* au sens de la Mécanique classique. Ainsi, l'attraction newtonienne exercée par le Soleil sur la Terre.

2°. Le corpuscule C_1 , toujours pris dans son ensemble, peut exercer sur les particules du fluide équivalent à C_2 , une action qui est encore une *force* et dans l'exemple du Soleil-Terre, ce serait la force des marées.

3°. Enfin, et c'est là un genre d'action étranger à la Mécanique, on peut observer des corrélations entre les vitesses d'agitation des fluides équivalents aux corpuscules C_1 et C_2 . Par exemple, entre la vitesse des taches solaires et celles des cyclones de notre Atmosphère. Ces corrélations traduisent des actions complexes impossibles à représenter par des forces.

49. Systèmes d'oscillateurs. Soit X un oscillateur aléatoire. Supposons qu'il soit le centre de gravité d'un système de n corpuscules aléatoires définis comme suit :

Chaque corpuscule X_i est un oscillateur aléatoire. Tous les X_i ont même masse $\frac{1}{n}$, même pulsation certaine ω , même loi de probabilité stationnaire. Il existe entre eux des *corrélations*. La loi de probabilité conjuguée de leurs positions et de leurs vitesses est une loi de Gauss :

$$R(x_i, u_i; t).$$

On a :

$$X = \frac{1}{n} \sum X_i.$$

Appelons : σ , l'écart type commun aux X_i : $\sigma^2 = \overline{X_i^2}$
 Σ , l'écart type de X : $\Sigma^2 = \overline{X^2}$
 s , l'écart type commun aux \dot{X}_i : $s^2 = \overline{\dot{X}_i^2} = \omega^2 \sigma^2$
 S , l'écart type de \dot{X} : $S^2 = \overline{\dot{X}^2} = \omega^2 \Sigma^2$.

L'incertitude sur un oscillateur élémentaire est le produit

$$s\sigma = \frac{s^2}{\omega}$$

qui mesure la dispersion du corpuscule dans l'espace généralisé.

La dispersion de l'oscillateur X est :

$$\Sigma^2 = \frac{1}{n^2} \sum \overline{X_i X_j} = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum r_{ij}$$

$r_{ij} = \frac{1}{\sigma^2} \overline{X_i X_j}$, désignant le coefficient de corrélation entre deux oscillateurs élémentaires ($r_{ii}=1$).

Par conséquent :

a) Si tous les X_i sont indépendants : $r_{ij}=0 (i \neq j)$

$$\overline{X^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

b) Si tous les r_{ij} sont positifs :

$$\overline{X^2} > \frac{\sigma^2}{n}$$

c) Si tous les r_{ij} sont négatifs :

$$\overline{X^2} < \frac{\sigma^2}{n}$$

d) Si tous les X_i sont égaux : $r_{ij}=1$

$$\overline{X^2} = \sigma^2$$

Combinons l'indépendance et la liaison fonctionnelle, par le schéma en grappes de *Borel*.

Groupons les n oscillateurs en k grappes de p oscillateurs rigidement liées. Dans une même grappe, les r_{ij} sont égaux à 1. Deux grappes sont indépendantes : entre deux oscillateurs appartenant à deux grappes différentes, l'on a : $r_{ij}=0$.

Il y a, parmi les $\frac{n(n-1)}{2}$ nombres $r_{ij} (i \neq j)$, $\frac{kp(p-1)}{2}$ nombres égaux à 1, tous les autres étants nuls.

Donc :

$$\overline{X^2} = \frac{\sigma^2}{n} \left[n + kp(p-1) \right] = \frac{\sigma^2}{n} \left[n + n(p-1) \right] = p \frac{\sigma^2}{n}$$

et

$$\overline{X^2} = p \frac{\sigma^2}{n}$$

L'énergie de l'oscillateur complexe est :

$$\mathcal{E} = m \overline{X^2} = p \frac{m \sigma^2}{n}$$

Désignons par $\frac{h}{2\pi}$ l'incertitude élémentaire : $\frac{s\sigma}{n} = \frac{s}{\omega n}$.

On a :

$$\mathcal{E} = ph \frac{\omega}{2\pi} = ph\nu \quad (\nu = \text{fréquence}).$$

L'énergie est donc *quantifiée* dans le schéma des grappes égales.

50. Interprétation de la quantification de l'énergie. Nous venons de voir que le schéma en grappes conduisait à la quantification de l'énergie; nous allons montrer maintenant que, parmi toutes les *organisations molaires* qui peuvent s'établir au sein de notre système d'oscillateurs, les associations en grappes égales sont les *plus probables*. Il en résulte qu'elles seront les seules à se manifester réellement.

Pour rendre les notations homogènes, posons :

$$\dot{X}_i = \omega X_{n+i}.$$

L'oscillateur élémentaire étant stationnaire, l'on a d'ailleurs :

$$r_{i, n+i} = 0$$

mais cette particularité n'a aucune importance.

Soit Δ_{2n} le déterminant des r_{ij} . La loi de Gauss qui représente la probabilité conjuguée des positions et des vitesses des oscillateurs élémentaire est :

$$R = \frac{1}{S_1 S_2 \cdots S_{2n}} \frac{1}{(2\pi)^n \sqrt{\Delta_{2n}}} \exp\left(-\frac{1}{2\Delta_{2n}} \sum R_{ij} \frac{x_i x_j}{S_i S_j}\right).$$

La probabilité d'une configuration donnée, c'est-à-dire d'un ensemble donné de r_{ij} est, d'après *Boltzmann*, proportionnelle au nombre φ tel que :

$$\log \varphi = - \int R \log R dx_1 \cdots dx_{2n}$$

ce qui donne, tous calculs faits :

$$\log \varphi = n + n \log 2\pi + \log \sqrt{\Delta_{2n}} + \log (S_1 \cdots S_{2n}).$$

Dans le cas d'oscillateurs indépendants ($\Delta_{2n} = 1$) on aurait :

$$\log \varphi_0 = n + n \log 2\pi + \log (S_1 \cdots S_{2n}).$$

D'où :

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \sqrt{\Delta_{2n}}.$$

Le nombre $P = \frac{\varphi}{\varphi_0}$ mesure la probabilité de la configuration envisagée.

Rappelons les propriétés du déterminant des coefficients de corrélation, établies dans la 1^{ère} Partie.

Δ_{2n} est compris entre 0 et 1 ; il ne peut augmenter avec $2n$. Il tend vers zéro avec $2n$, sauf si, à partir d'un rang fini les coefficients de corrélation sont tous nuls.

Nous dirons brièvement que $\Delta_{2n} \rightarrow 0$ pourvu que les coefficients de corrélation ne soient pas « presque tous nuls ».

Étudions les valeurs de la probabilité P pour n tendant vers l'infini.

1^{re} cas. La loi de Gauss est définie, c'est-à-dire que l'exposant peut se mettre sous la forme de la somme de $2n$ carrés de formes linéaires indépendantes.

Pour que la configuration ait une probabilité non nulle, il faut que presque tous les oscillateurs soient indépendants. Ceux qui sont corrélés entre eux étant en nombre fini, représentent une fraction négligeable de l'ensemble.

2^{me} cas. La loi de Gauss est dégénérée, c'est-à-dire que l'exposant se décompose en moins de $2n$ carrés.

On peut alors réunir les variables en groupes linéairement indépendants.

La loi de probabilité à envisager est celle des groupes. Il se présente deux sous-cas :

a) Les groupes sont tous l'assemblage d'un nombre fini d'éléments ; leur nombre k est donc forcément infiniment grand. Alors $\Delta_k \rightarrow 0$ sauf si les groupes sont presque tous indépendants.

b) Certains groupes contiennent un nombre infini d'éléments. Alors $\Delta_k \rightarrow 0$, sauf si le nombre de ces groupes reste fini.

Ceci posé, on peut toujours répartir les oscillateurs élémentaires en k groupes de $p_1, p_2 \dots p_k$ oscillateurs, tels que :

1°) Les oscillateurs d'un même groupe ne soient jamais indépendants entre eux.

2°) Les oscillateurs pris dans deux groupes différents soient toujours indépendants.

Les cas limites sont : un seul groupe ou des groupes d'un seul élément.

La loi de Gauss est le produit de k lois de Gauss définies, relatives chacune à un groupe. Soit $\Delta^{(i)}$ le déterminant relatif au i ème groupe.

On a :
$$P^2 = \Delta^{(1)} \Delta^{(2)} \dots \Delta^{(k)}.$$

Les $\Delta^{(i)}$ sont en général inférieurs à l'unité : ils n'atteignent cette valeur que lorsque les oscillateurs d'un même groupe sont soudés en grappe.

Lorsque $2n \rightarrow \infty$, deux cas peuvent se présenter :

a) le nombre d'oscillateurs de chaque groupe reste fini.

Alors k tend nécessairement vers l'infini et $\Delta^{(i)}$ tend généralement

vers zéro, donc P aussi. Il n'y a d'exception que lorsque les $\Delta^{(i)}$ sont presque tous égaux à 1, c'est-à-dire lorsque *presque tous les groupes sont des grappes*.

a) le nombre d'oscillateurs de certains groupes devient infini.

Alors, pour ces groupes $\Delta^{(i)} \rightarrow 0$, à moins qu'ils ne soient des grappes. Si ce sont des grappes $\Delta^{(i)} = 1$ et P ne sera différent de zéro que si le nombre d'oscillateurs non associées en grappes est fini.

Finalement (lorsque $2n \rightarrow \infty$) on peut dire que :

a) les « organisations molaires » ont en général une *probabilité nulle*.

b) seules ont une *probabilité finie* — donc une existence possible — les organisations dans lesquelles les oscillateurs *sont inclus dans des grappes*, sauf un nombre fini (donc négligeable) d'entre eux.

Cherchons maintenant parmi les groupements de n oscillateurs en grappes, ceux qui sont les plus fréquents. Le nombre de manières de réaliser la distribution dans laquelle la $i^{\text{ème}}$ grappe contient p_i oscillateurs est :

$$\frac{n!}{p_1! p_2! \cdots p_k!}$$

Ce nombre est maximum pour :

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_k = \frac{n}{k}$$

Ce sont donc les grappes égales qui sont les plus fréquentes.

C'est en cela que consiste notre interprétation de la quantification.

Un oscillateur aléatoire complexe étant considéré, *a priori*, comme susceptible d'une suite *continue* d'états réalisés par des corrélations entre les oscillateurs élémentaires qui le composent, on démontre que dans cette suite continue, seule une suite *discrète* correspond à une *probabilité appréciable* (les groupements en grappes égales). Les états de cette suite discrète sont les *états quantifiés*. Il leur correspond des énergies de l'oscillateur complexe qui sont des multiples du produit de leur fréquence par une grandeur ayant les dimensions d'une action et caractéristique des oscillateurs élémentaires composants.

L'ADSORPTION DE CATIONS PAR LE CHARBON ACTIF. CONFIRMATIONS EXPÉRIMENTALES.

par J. PALACIOS et M. T. VIGÓN

(Septembre, 1945)

I. Objet du travail. Il y a quelque temps qu'on emploie dans la technique, des piles à électrode de charbon actif; cependant la connaissance scientifique et théorique de son action est encore à ses débuts. D'après les théories classiques de l'Électrochimie et malgré que le carbone ne puisse former aucun ion, on pensait qu'il fonctionnait comme une électrode d'oxygène: celui-ci est adsorbé par le carbone et pendant le fonctionnement de la pile il passe à ion OH^- , ou encore, selon la composition de l'électrolyte, d'autres procédés d'oxydation pourront avoir lieu et, en tout cas, on vérifie celui qui exige le potentiel le plus bas.

D'après la théorie de l'origine des potentiels exposée par M. R. Salcedo dans sa thèse, l'action du charbon actif a une explication simple. Supposons une électrode de la substance en question plongée dans une solution contenant des ions. Le charbon actif adsorbe les ions positifs et prend un potentiel $+V$ déterminé par l'équilibre entre les forces d'adsorption et la repulsion électrostatique des ions adsorbés. Quand on ferme le circuit avec une barre métallique plongée dans la même solution, si le potentiel $+V'$, acquis par celle-ci est plus petit, il y aura lieu un courant qui transporte des électrons vers l'électrode de charbon actif, ce qui permet que l'adsorption se poursuive à la raison d'un cation par chaque électron qui circule dans le circuit extérieur. Les cations adsorbés, quand ils s'unissent aux électrons, forment des atomes neutres qui restent dans la couche superficielle de charbon actif, en affaiblissant son activité d'adsorption, et le courant finira quand cette couche sera saturée.

Ceci-étant, une électrode de charbon actif n'est pas une électrode d'oxygène et doit fonctionner aussi bien en absence de celui-ci. En tout cas l'oxygène peut avoir, sans aucun doute, une action sur les ions adsorbés et de là, les deux problèmes que nous nous sommes proposés :

1) Vérifier si une pile d'adsorption à électrode de charbon actif peut donner de courant en absence totale d'oxygène et 2) étudier l'influence de l'oxygène dans son fonctionnement. Cependant, avant d'exposer nos résultats expérimentaux, nous nous permettrons quelques considérations théoriques.

2. Calcul de la f. e. m. d'une pile d'adsorption en fonction de la quantité d'électricité déjà fournie. Le comportement d'une électrode d'adsorption quand elle fournit du courant sera absolument différent de celui qu'on observe dans les éléments galvaniques ordinaires. En effet, dans ces derniers, la nature des électrodes ne change pas pendant le fonctionnement, si l'on néglige les phénomènes de polarisation. Par contre, dans les premiers, la partie active de la surface adsorbante s'affaiblira s'il n'y a pas une réaction secondaire la régénérant, et nous observerons une décroissance de la force électromotrice.

Soit s la surface totale de l'électrode adsorbant et r l'épaisseur de la couche superficielle; on obtient le volume actif v_a en retranchant au volume sr de la couche, le volume occupé par les atomes déjà adsorbés. Si pendant la décharge précédente, q Coulombs ont circulé, le nombre de ces atomes sera $q/\nu F$. Alors, b étant le volume exigé par chaque atome, on aura :

$$(1) \quad v_a = sr - b \frac{q}{\nu F} = sr(1 - \alpha q)$$

où α est une constante.

Dans la thèse de M. Salcedo on a calculé le nombre de cations adsorbés et on a obtenu l'expression :

$$(2) \quad n = v_a c^+ e^{\frac{-\nu FP + \varepsilon_a}{RT}}$$

où n est le nombre de cations adsorbés, P le potentiel de l'électrode, ε_a l'énergie d'adsorption et c^+ la concentration des cations dans la solution.

Portant la valeur de v_a donnée par (1) en (2) on obtient :

$$(3) \quad n = c^+ sr(1 - \alpha q) e^{\frac{-\nu FP + \varepsilon_a}{RT}}$$

et le nombre de cations adsorbés par unité de surface $a = n/s$ sera :

$$(4) \quad a = \frac{n}{s} = c^+ r(1 - \alpha q) e^{\frac{-\nu FP + \varepsilon_a}{RT}}$$

On peut admettre que le potentiel P est proportionnel au nombre de cations adsorbés, d'où :

$$(5) \quad P = \gamma(1 - \alpha q) e^{\frac{-\nu F P}{RT}}$$

γ étant une nouvelle constante, proportionnelle à la concentration et qui pourra dépendre de la température. Par conséquent, si P_1 est le potentiel de l'autre électrode, la force électromotrice de l'élément sera :

$$(6) \quad E = P - P_1 = \gamma(1 - \alpha q) e^{\frac{-\nu F}{RT}(E + P_1)} - P_1$$

ou bien :

$$(7) \quad E = \delta(1 - \alpha q) e^{-\frac{\nu F}{RT}E} - P_1.$$

Pour obtenir les constantes δ et P_1 , remarquons que pour $q=0$, c'est-à-dire, quand l'électrode adsorbante est absolument pure, la force électromotrice aura la valeur initiale E_0 :

$$(8) \quad E_0 = \delta e^{-\frac{\nu F}{RT}E_0} - P_1$$

et par élimination de δ entre (7) et (8) on obtient :

$$(9) \quad E + P_1 = (E_0 + P_1)(1 - \alpha q) e^{-\frac{\nu F}{RT}(E - E_0)};$$

en outre, si on appelle q_m la capacité de l'élément, c'est-à-dire, la quantité totale d'électricité qu'il peut fournir jusqu'à l'épuisement de sa force électromotrice, on aura $E=0$ pour $q=q_m$, d'où :

$$(10) \quad P_1 = (E_0 + P_1)(1 - \alpha q_m) e^{\frac{\nu F}{RT}E_0} = (E_0 + P_1)(1 - \alpha q_m) d$$

où, pour abrégé on a posé :

$$d = e^{\frac{\nu F}{RT}E_0}.$$

Portant P_1 en (10) on obtient :

$$P_1 = \frac{E_0(1 - \alpha q_m) d}{1 - (1 - \alpha q_m) d}$$

et

$$P_1 + E_0 = \frac{E_0}{1 - (1 - \alpha q_m) d}$$

et alors (9) devient :

$$(11) \quad E = \frac{E_0 d}{1 - (1 - \alpha q_m) d} \left[(1 - \alpha q) e^{-\frac{\nu F}{RT}E} - (1 - \alpha q_m) \right].$$

Les constantes q_m , E_0 , et par conséquent d , se déduisent directement de la courbe de décharge. Il suffit donc, de chercher par tâton-

nements la constante α . En portant sur un graphique E en fonction de q , on obtient une courbe qui coupe l'axe des ordonnées à la distance E_0 et celui des abscisses à la distance q_m .

3. Fonctionnement d'une pile d'adsorption dans le vide. Pour résoudre la première partie nous avons étudié comparativement deux piles identiques : charbon actif-solution de sulfate de zinc-zinc ; une fonction-

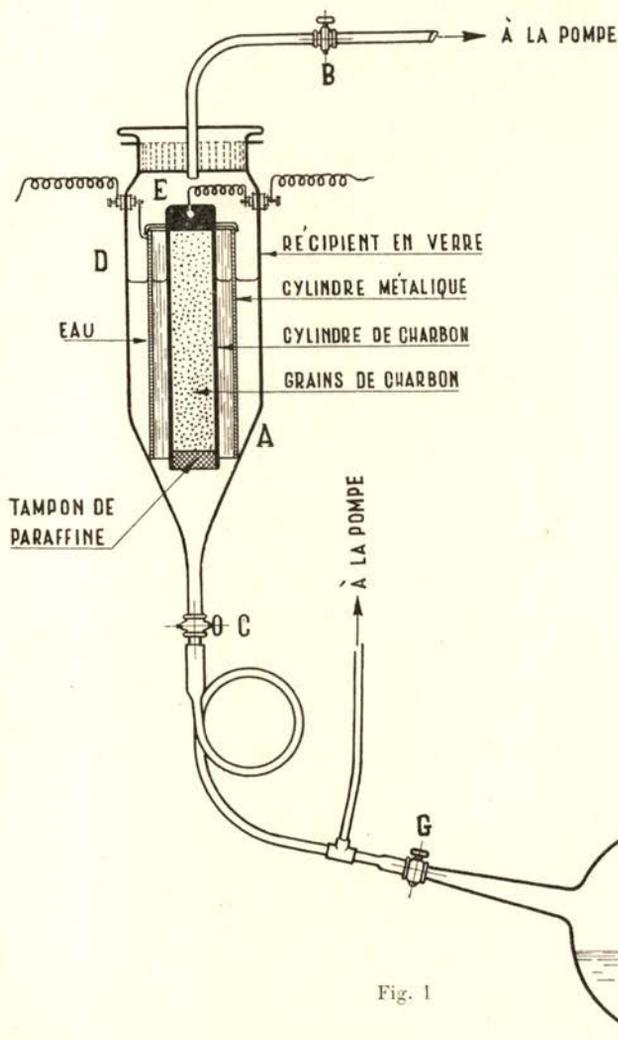


Fig. 1

la fig. 1 : le récipient en verre A, hermétiquement fermé par un bouchon en verre rodé est muni de deux robinets B et C. Le premier

nait exposée à l'air et l'autre dans le vide. La principale difficulté consistait dans l'obtention d'un vide tel que, non seulement on puisse considérer négligeable la pression de l'oxygène, mais aussi que le charbon actif dégage tout ce qu'il pourrait avoir adsorbé au contact de l'atmosphère. Le dispositif adopté est représenté dans

sert à mettre le récipient en communication avec la pompe à vide et les appareils de mesure de celui-ci et le deuxième pour l'introduction de l'électrolyte, une fois que les conditions de vide deviennent satisfaisantes. Les électrodes sont disposées à l'intérieur du récipient : D est une lame cylindrique de zinc, et E l'électrode de charbon actif constitué par un cylindre creux en charbon d'arc (fig. 2) dont les parois sont percées de petites ouvertures. Dans la partie supérieure, plus étroite, il est muni d'une vis pour la liaison. Le cylindre est rempli de charbon actif et il est fermé inférieurement par un bouchon de paraffine. Toutes les liaisons intérieures des deux électrodes sont soigneusement paraffinées pour empêcher des court-circuits locaux avec l'eau qui se dépose sur les parois du récipient.

Pour faire le vide nous avons utilisé une pompe à huile et une pompe de diffusion. L'appareil de mesure était une jauge de McLeod.

Une fois disposées les électrodes dans le récipient A, on commence pour faire le vide jusqu'à ce que la jauge indique une pression de 0,0005 mm et on le laisse jusqu'au lendemain. On trouve que la pression est montée à 0,15 mm. On refait le vide et ainsi de suite pendant dix jours ; on réussit alors à maintenir une pression de 0,010 mm 24 heures après avoir fait le vide.

On considère ces conditions satisfaisantes puisqu'elles montrent que l'étanchéité est parfaite et que la quantité de gaz dégagée par le charbon actif est négligeable et on passe à l'introduction de l'électrolyte dans le récipient.

Pour cela l'électrolyte était placé dans le récipient F (fig. 1) muni du robinet G et relié d'une part au récipient A et d'autre part à une pompe Töppler avec laquelle on a fait le vide pendant dix jours de suite en même temps qu'on chauffait le liquide jusqu'à l'ébullition pour faire disparaître les moindres traces d'oxygène. On ouvre les robinets C et G, en élevant le récipient F, et le liquide passe au récipient A. Une fois celui-là rempli on ferme le robinet C et on place la pompe Töppler en B pour faire le vide s'il en est besoin.

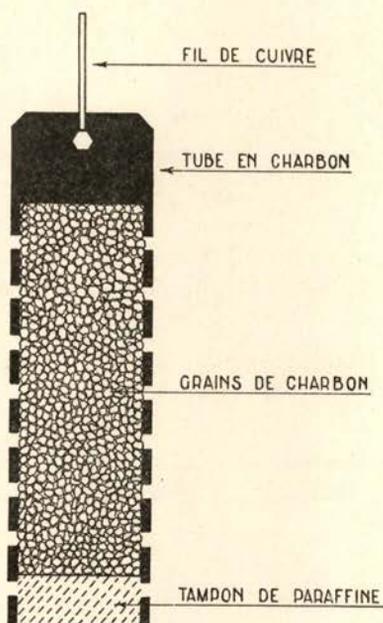


Fig. 2

On mesure la force électromotrice avec un voltmètre de grande résistance et on fait une première décharge de la pile pendant 24 heures à travers une résistance de 100Ω , un appareil enregistreur et un ampèremètre.

Les conditions initiales de la pile en circuit ouvert sont les suivantes :

Concentration de l'électrolyte	300 g/l de $\text{SO}_4 \text{Zn}, 7 \text{OH}_2$
Poids de charbon actif de l'électrode	8,38 g
Température	$19,5^\circ \text{C}$
Pression (vapeur d'eau et gaz).	13 mm
Force électromotrice.	1,10 volts
(après quelque temps elle atteint la valeur 1,126 V).	

Une fois la décharge finie, on mesure la force électromotrice de la pile et on la laisse reposer pendant 24 heures, au bout desquelles on mesure la f.e.m. et on la décharge de nouveau et ainsi de suite pendant plusieurs jours, en alternant des décharges et des périodes de repos.

L'appareil enregistreur a une erreur de zéro variable et cela nous oblige à corriger les courbes obtenues, d'accord avec les indications de l'ampèremètre.

Dans la dernière décharge nous avons trouvé une valeur anormalement élevée de la force électromotrice due à un défaut du robinet C qui permettait le passage de petites bulles d'air à travers le liquide ; la pression a atteint la valeur de 6 cm de mercure. Cette altération change les conditions de la pile et nous avons arrêté là cette expérience.

À partir de la décharge n° 3 nous avons trouvé un dégagement, relativement grand, de gaz pendant le fonctionnement de la pile, dégagement qui, à une moindre échelle, continue quand elle est au repos. Tous les jours on faisait l'extraction du gaz avec la pompe Töppler jusqu'à atteindre la pression primitive de 13 mm. Nous avons supposé, d'accord avec les théories précédentes, que le gaz dégagé était de l'hydrogène. Pour le vérifier nous avons fait barboter le gaz extrait par la pompe à travers une solution de savon de façon à obtenir des bulles ; en approchant de ces bulles une allumette on observait, en effet, une petite explosion.

Deux particularités intéressantes ont été observées pendant le fonctionnement de cette pile : 1) la solution électrolytique reste parfaitement claire et transparente jusqu'à l'entrée de l'air ; après cette entrée il se produit une altération et le liquide devient de plus en plus trouble. 2) après quelques heures de décharge de la pile des craquements se produisent qui continuent pendant la période de repos ; par contre ils

disparaissent si la pression augmente à l'intérieur de l'appareil et recommencent dès qu'on refait le vide.

Au moyen des courbes de décharge enregistrées, convenablement corrigées de l'erreur de l'appareil, nous avons calculé le nombre d'ampères-heure fournis par la pile, nous avons fait la réduction de cette valeur à celle correspondant à 1g de charbon actif et nous avons tracé la courbe donnant la force électromotrice de la pile en fonction du nombre d'ampères-heure par grame de charbon obtenu. Comme valeur de la force électromotrice nous avons pris celle obtenue, non à la fin de chaque décharge, mais après 24 heures de repos, pour que la concentration de l'électrolyte aux proximités des électrodes soit la même qu'ailleurs.

Les valeurs obtenues sont resumées dans le tableau suivant :

Décharge	Nombre d'ampères-heure		amp. h/g. (8,38 g. charbon)	f. e. m. (volts)
	partiaux	totaux		
0	0	0	0	1,10
1	0,156	0,156	0,0186	0,670
2	0,102	0,258	0,0308	0,506
3	0,074	0,332	0,0396	0,428
4	0,068	0,400	0,0478	0,372
5	0,085	0,495	0,0579	0,303
6	0,044	0,529	0,0631	0,275
7	0,072	0,601	0,0717	0,252
8	0,062	0,663	0,0791	0,241
9	0,082	0,745	0,0890	0,200
10	0,045	0,790	0,0943	0,190
11	0,045	0,835	0,0996	0,216
12	0,049	0,884	0,1055	0,189

La courbe correspondante est représentée dans la fig. 3.

Simultanément nous avons étudié la décharge de la pile exposée à l'air. Nous avons employé un petit gobelet en verre entouré à l'intérieur d'une lame de zinc avec une électrode de charbon actif, analogue à celle déjà décrite, au centre. L'électrolyte est une solution de sulfate de zinc, de même concentration, et les appareils de mesure sont les mêmes que ceux employés dans la pile placée dans le vide. Les décharges sont aussi faites de façon identique. Comme la pile est

ouverte l'eau s'évapore et on tachait de maintenir la concentration constante en ajoutant de l'eau distillée, après chaque décharge.

Les conditions initiales de la pile en circuit ouvert sont les suivantes :

Concentration de l'électrolyte	300 g/l de $\text{SO}_4 \text{Zn}, 7 \text{OH}_2$
Poids de charbon actif de l'électrode	6,16 g
Force électromotrice	1,18 volts

Comme dans le cas antérieur, et pour comparer le fonctionnement des deux piles, nous avons construit la courbe de la force électromotrice de la pile après 24 heures de repos, en fonction de la quantité d'électricité (nombre d'ampères-heures par gramme de charbon actif) qu'elle a fourni. Les données numériques sont exposées dans le tableau suivant :

Décharge	Nombre d'ampères-heure		amp. h/g. (6,16 g. charbon)	f. e. m. (volts)
	partiaux	totaux		
0	0	0	0	1,18
1	0,161	0,161	0,0261	0,649
2	0,103	0,264	0,0428	0,490
3	0,083	0,347	0,0563	0,396
4	0,061	0,408	0,0662	0,371
5	0,060	0,468	0,0759	0,346
6	0,056	0,524	0,0850	0,317
7	0,090	0,614	0,100	0,260
8	0,058	0,672	0,109	0,235
9	0,052	0,724	0,118	0,248
10	0,047	0,771	0,125	0,201
11	0,043	0,814	0,132	0,221
12	0,054	0,868	0,141	0,215
13	0,051	0,919	0,149	—

La courbe est représentée dans la fig. 3 avec celle de la pile dans le vide.

En opposition avec la première, ni pendant la décharge ni dans les périodes de repos, on n'a entendu de bruit. D'autre part la solution électrolytique devient trouble dès la première décharge et à la fin il y a un dépôt blanc considerable au fond du gobelet.

De la comparaison des deux courbes il semble ressortir que le fonc-

tionnement de l'électrode de charbon actif est bien celui que nous avons indiqué et que l'oxygène n'est pas le facteur fondamental qui produit la différence de potentiel. Toutefois, un doute pourrait rester : l'oxygène

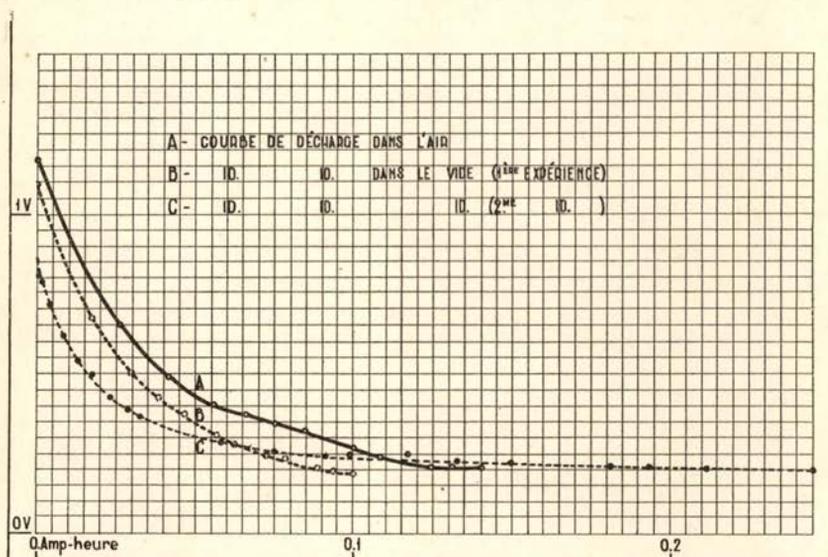


Fig. 3

est certainement adsorbé par le charbon actif et peut-être la seule action d'un vide poussé n'est pas suffisante pour l'éliminer complètement. Dans ce cas l'électrode fonctionnerait grâce à ce reste d'oxygène dans le charbon.

Malgré que cette quantité d'oxygène dût être insuffisante pour produire l'énergie fournie par la pile, nous avons décidé de faire une nouvelle expérience avec un charbon qu'on pouvait considérer exempt d'oxygène. Pour cela nous avons employé du charbon chauffé dans le vide à une température supérieure à 800° C.

La première partie de l'expérience concerne la préparation du charbon. L'appareil employé est représenté dans la fig. 4. A est un four électrique : la résistance est bobinée autour du tube en quartz B et tout l'espace C est plein d'une substance isolante (oxyde de magnésium). À l'intérieur du tube B il y a un autre tube en quartz D plus long ; dans la partie centrale on place une quantité connue de charbon actif maintenu par deux tampons en amiante. Les extrémités du tube sont fermées par des bouchons de liège recouverts de picéline et pour empêcher la chaleur du four d'atteindre ceux-ci, la partie du tube D qui dépasse est entourée d'un tube en plomb où circule de l'eau froide.

Le tampon E est traversé par un tube en verre muni d'un robinet qui le met en communication avec le récipient F, refroidi extérieurement à l'air liquide, pour recueillir l'eau dégagée par le charbon. Il y a

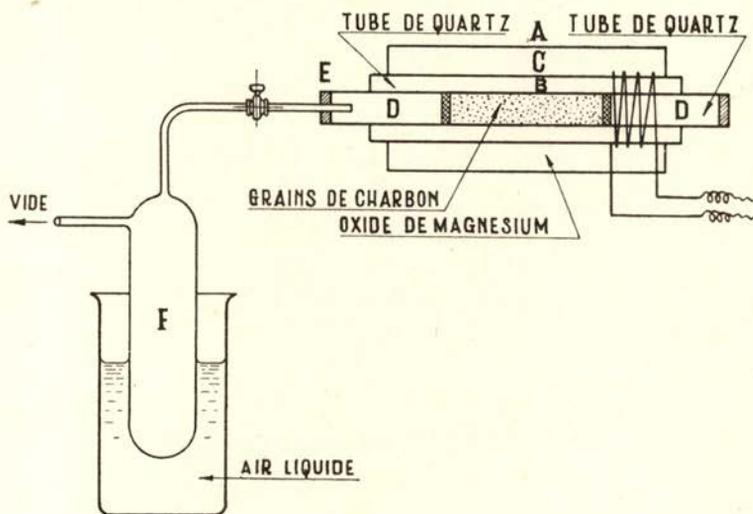


Fig. 4

ensuite un manomètre Mc.Leod, un manomètre à mercure ordinaire et enfin la pompe à vide. La température du four se règle au moyen d'une résistance mise en serie.

Après avoir vérifié que les conditions de l'appareil sont satisfaisantes, on introduit le charbon actif, qu'on avait pesé auparavant, on fait le vide et on chauffe graduellement jusqu'à ce que le manomètre accuse un dégagement gazeux; on maintient la température constante jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de dégagement, on refait le vide sans modifier la température et on vérifie ainsi si le dégagement a bien cessé. S'il en est ainsi, on élève légèrement la température et on procède de la même façon jusqu'à atteindre le degré de chauffage qu'on désire et alors, une fois le dégagement terminé, on continue à faire le vide et à chauffer pendant une heure. La période totale de chauffage a été de six heures environ et la température finale notablement supérieure à 800° C.

On laisse refroidir le tube et on vérifie qu'à la température ordinaire la quantité d'air qu'il adsorbe est négligeable; pour cela on laisse entrer l'air jusqu'à la pression atmosphérique, on ferme à nouveau. On n'observe aucune descente de pression pendant plusieurs heures. On a pesé le charbon et l'eau recueillie dans le récipient F et, par différence on obtient le poids des gaz dégagés, qui doivent être surtout CO_2 et CO .

Les résultats obtenus sont :

Poids initial de charbon actif	16,794 g
» final » » »	14,442 g
» de l'eau recueillie	0,653 g
» des gaz.	1,699 g

On a disposé la pile de la même façon que dans la première expérience, mais nous n'avons pas employé la pompe de diffusion pour faire le vide, mais seulement la pompe à huile et, après l'introduction de l'électrolyte, celle de Töppler. Nous n'avons, non plus, employé l'appareil enregistreur à cause de l'erreur observée, et pour cela les premières décharges duraient de une à deux heures et on faisait des lectures tous les cinq minutes; ensuite on laissait reposer la pile pendant

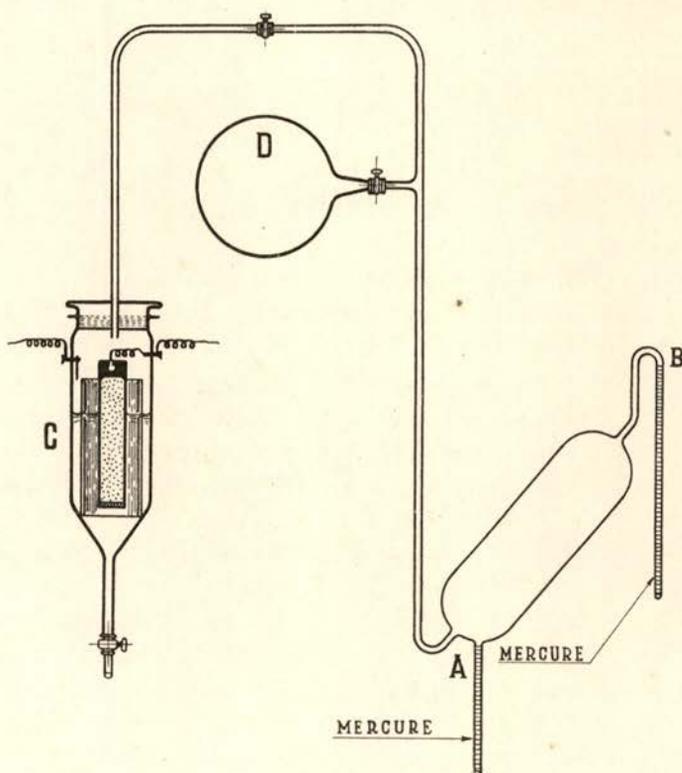


Fig. 5

24 heures. Entre temps on a disposé d'un autre voltmètre enregistreur qu'au moyen d'un shunt convenable, on a utilisé comme ampèremètre. On a vérifié qu'il fonctionnait parfaitement, et ainsi on n'avait plus la

peine de faire la correction de l'échelle. On a alors fait des décharges longues — 1, 2 ou 3 jours — séparées par des périodes de repos de 24 heures.

La concentration de $\text{SO}_4\text{Zn}, 70\text{H}_2$ employée a été de 150 g de sel par litre de solution. Le poids de charbon actif de 6,90 g. La f. e. m. était d'abord de 0,93 V et elle baissa ensuite à 0,88 V quand on eût extrait les derniers restes d'air.

Les données obtenues pour le graphique de la force électromotrice en fonction du nombre d'ampères-heure par gramme de charbon actif sont indiquées dans le tableau suivant :

Décharge	Nombre d'ampères-heure		amp. h/g. (6,90 g. de charbon)	f. e. m. (volts)
	partiaux	totaux		
0	0	0	0	0,88
1	0,00447	0,00447	0,00065	0,86
2	0,00660	0,01107	0,00160	0,82
3	0,00509	0,01616	0,00234	0,80
4	0,1882	0,03498	0,00507	0,725
5	0,0298	0,0648	0,0094	0,625
6	0,0335	0,0983	0,0142	0,542
7	0,0331	0,1314	0,0190	0,500
8	0,0363	0,1677	0,0243	0,425
9	0,0348	0,2025	0,0293	0,380
10	0,0262	0,2287	0,0331	0,365
11	6,1802	0,4089	0,0592	0,288
12	0,117	0,526	0,0762	0,250
13	0,110	0,636	0,092	0,245
14	0,286	0,922	0,133	0,23
15	0,117	1,039	0,150	0,23
16	0,216	1,255	0,182	0,225
17	0,0845	1,3395	0,194	0,217
18	0,1535	1,493	0,216	0,216
19	0,0678	1,560	0,226	0,215

Aussi bien que dans la première expérience, des craquements se produisent après que la pile a fonctionné la première fois et le liquide reste clair tant que l'air n'entre pas dans l'appareil.

Pendant la décharge n° 13, un abondant dégagement gazeux se produit, et, d'accord avec celui observé dans la première expérience, ce gaz doit être de l'hydrogène. En effet, on a vérifié qu'il en est ainsi de la même façon que dans la dite expérience.

Le problème se présente maintenant de savoir si le fonctionnement de la pile est dû exclusivement à l'ion H^+ ou bien si l'ion Zn^{++} y contribue aussi. Pendant les premières décharges, il n'y a guère de dégagement gazeux; il semble donc que le transport du courant est dû presque exclusivement au zinc. Par contre, à la fin, le dégagement de gaz est très grand.

Il nous intéresse de connaître la quantité d'hydrogène produite pendant une décharge et calculer le nombre d'ampères-heure qu'elle fournirait, pour comparer avec le nombre fourni par la pile et se rendre ainsi compte en quelle proportion les deux ions contribuent au transport du courant. Pour cela nous avons besoin de connaître le volume v_1 du récipient et de la pompe Töppler—voir fig. 5: v_1 , volume CAB—et, au moyen de celle-là, mesurer la pression de l'hydrogène, et déterminer sa température.

Pour mesurer le volume v_1 , on a accouplé de la façon indiquée dans figure un globe en verre D, muni d'un robinet, dans lequel on a fait, au préalable, le vide; son volume v_2 a été déterminé par le poids de l'eau nécessaire pour le remplir. Au moyen de la pompe on a mesuré la pression p_1 du gaz dans le volume v_1 et ensuite la pression p_2 après avoir ouvert le robinet du globe, c'est-à-dire, dans le volume $v_2 + v_1$ et ainsi nous pouvons calculer le volume v_1 . Les données obtenues sont:

p_0 (pression atmosphérique)	68,7 cm de Hg
$p_0 - p_1$	53,6 » » »
$p_0 - p_2$	61,4 » » »
p_1	15,1 » » »
p_2	7,3 » » »
v_2	586,2 cm ³

et, d'accord avec la loi de Boyle-Mariotte:

$$v_1 \times p_1 = (v_1 + v_2) p_2$$

$$v_1 \times 15,1 = (v_1 + 586,2) 7,3$$

$$v_1 = \frac{586,2 \times 7,3}{15,1 - 7,3} = 548,5 \text{ cm}^3.$$

Nous pouvons maintenant calculer la quantité d'électricité transportée par l'hydrogène dégagé dans la pile pendant une décharge. D'accord avec la loi de Faraday, une molécule-gramme d'hydrogène, soit 22,414

litres dans les conditions normales, transportent $2F$ coulombs, soit $\frac{2 \times 96500}{3600}$ ampères-heure, en prenant $F = 96500$ coulombs. Nous allons faire le calcul pour la décharge n° 18, où les données sont les suivantes :

Pression du gaz dans le récipient . .	7,6 cm de Hg
Température	18° C = 291° K
Volume (Calculé auparavant).	548,5 cm ³

volume de l'hydrogène dans les conditions normales :

$$548,5 \times \frac{7,6}{76} \times \frac{273}{291} = 51,4 \text{ cm}^3 ;$$

nombre d'ampères-heure transporté par cette quantité d'hydrogène :

$$\frac{51,4}{22414} \times \frac{2 \times 96500}{3600} = 0,123 ;$$

nombre d'ampères-heure produits dans la décharge 0,153

» » » transporté par le zinc . . 0,153 - 0,123 = 0,030.

Ceci montre que, même après quelques décharges, le zinc contribue encore au fonctionnement de la pile. On pourrait peut-être penser que, s'il n'y a pas de dégagement d'hydrogène pendant les premières décharges et que par contre dans les dernières la plus grande partie du courant lui est dû, cela tenait à des traces d'oxygène qui auraient du rester adsorbées par le charbon actif, malgré toutes les précautions prises pour l'éliminer ; alors l'hydrogène au lieu de se dégager se combinerait avec l'oxygène pour former de l'eau. Cependant il y a un autre fait qui démontre la participation du zinc au fonctionnement de la pile. Quand après la décharge finie on retire le charbon actif de l'enceinte qui le contient, et on le sèche à l'air après l'avoir soigneusement lavé il apparait recouvert d'une substance blanche, insoluble dans l'eau mais facilement soluble dans les acides. Dans la solution par l'acide sulfurique nous avons vérifié la présence de l'ion Zn^{++} , au moyen de la réaction du vert de Riemann, qui consiste à imbiber un bout de papier de filtre dans la solution où l'on cherche le Zn^{++} , ajouter une ou deux gouttes d'une solution diluée de $(NO_3)_2Co$ et incinérer ; s'il y a Zn^{++} les cendres ont une couleur verte due au zincate de cobalt.

Dans tous les échantillons de charbon actif que nous avons utilisé dans nos piles, nous avons toujours observé d'une façon certaine la présence du zinc. Ce zinc peut être à l'état métallique adsorbé par le

charbon ou bien, une fois exposé à l'air et, à cause de l'action catalytique du charbon actif et à l'état d'extrême division du zinc, à l'état d'oxyde. Nous reviendrons sur ce point plus loin.

Ce que nous venons d'exposer explique que les courbes de décharge obtenues expérimentalement soient différentes de celles prévues par la théorie; cela est dû à ce que les phénomènes d'adsorption et de décharge font intervenir les deux ions et cela altère la forme normale de la courbe. Etudions maintenant le cas du point de vue théorique.

4. Adsorption simultanée de deux cations. Considerons une électrode adsorbante et insoluble plongée dans une solution contenant différentes espèces de cations. Tous ceux-ci seront adsorbés et le potentiel de l'électrode augmentera jusqu'à atteindre la valeur correspondante à l'état d'équilibre. Supposons qu'il s'agisse de deux cations que nous distinguerons par les indices 1 et 2. Les nombres respectifs de cations adsorbés après une décharge de q coulombs seront :

$$n_1 = c_1^+ sr (1 - \alpha_1 q_1) e^{\frac{-v_1 FP + \varepsilon_1}{RT}}$$

$$n_2 = c_2^+ sr (1 - \alpha_2 q_2) e^{\frac{-v_2 FP + \varepsilon_2}{RT}}$$

De même que dans le cas antérieur, on peut admettre que le potentiel électrique P est proportionnel au nombre total de cations adsorbés par unité de surface :

$$P = \beta \frac{n_1 + n_2}{sr} = \beta \left[c_1^+ (1 - \alpha_1 q_1) e^{\frac{-v_1 FP + \varepsilon_1}{RT}} + c_2^+ (1 - \alpha_2 q_2) e^{\frac{-v_2 FP + \varepsilon_2}{RT}} \right]$$

et il est facile de montrer que P croît aussi bien avec c_1^+ qu'avec c_2^+ . L'addition d'un cation étranger augmente donc le potentiel de l'électrode.

Dans notre cas on part d'une solution où existe une grande concentration de cations Zn^{++} et un certain nombre de cations H^+ provenant de la dissociation de l'eau. Si on désigne par l'indice 1 les cations Zn^{++} et par l'indice 2 les cations H^+ , on aura $c_2^+ \ll c_1^+$ et le potentiel P sera pratiquement égal au potentiel P_1 que produiraient les cations Zn^{++} s'ils existaient seuls. Au début de la décharge ($q=0$), les nombres de cations d'une et d'autre espèce qui passent à l'état d'atomes neutres seront dans le rapport :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{c_1^+}{c_2^+} e^{\frac{FP(v_2 - v_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{RT}}$$

avec un grand désavantage pour l'hydrogène. Cependant, au fur et à mesure que le courant circule, le charbon se recouvre d'atomes de Zn et la surface active relative à ceux-ci diminue (α, q croit), avec la diminution corrélative de potentiel. Par contre les atomes d'hydrogène se réunissent pour former des molécules neutres et se dégagent de l'électrode (rappelons qu'on travaille dans le vide) ce qui fait que la surface active par rapport aux ions hydrogène, c'est-à-dire, α_2 est nulle pendant toute la décharge. Au fur et à mesure que celle-ci se poursuit, la participation des ions hydrogène va en augmentant, une fois que la barrière de potentiel qu'ils ont à franchir devient de plus en plus petite.

Quand finit l'adsorption de cations Zn^{++} parce que le charbon est saturé d'atomes de ce métal, le courant continuera grâce à la différence de potentiel

$$P_2 = \zeta c_2^+ e^{\frac{-FP + \varepsilon_2}{RT}}$$

due à l'adsorption d'ions hydrogène, c'est-à-dire, que nous aurons un élément d'adsorption où l'adsorbant se régénère automatiquement parce que les atomes neutres d'hydrogène se dégagent au fur et à mesure qu'ils se forment. Si on n'opère pas dans le vide, une partie de l'oxygène reste adsorbée ce qu'implique une diminution de surface active, qui aura comme effet une diminution de potentiel. Comme vérification de ce fait, on reconnaît que l'extraction de l'oxygène accumulé après une longue décharge fait augmenter la force électromotrice.

5. Influence de l'oxygène. Toutes ces expériences semblent montrer qu'en effet on ne doit pas considérer une électrode de charbon actif comme une électrode d'oxygène, mais plutôt comme une électrode d'adsorption, une fois que l'immersion dans une solution électrolytique donne lieu à une différence de potentiel même en absence totale d'oxygène. Toutefois, le fait que l'oxygène n'est pas la cause fondamentale qui produit la différence de potentiel n'exclue pas la possibilité, quand il est présent, qu'il agisse sur le cation adsorbé en l'oxydant. Ce point est, comme nous avons déjà dit, le deuxième que nous nous sommes proposés d'étudier.

Déjà dans notre première expérience nous avons pu observer cette action : l'entrée accidentelle d'oxygène dans la pile à vide augmente sa force électromotrice. Cependant cette augmentation est très lente comme on peut le montrer : nous avons laissé ouvert le robinet d'entrée d'air et avons fait des mesures pendant plusieurs jours. Les valeurs observées sont les suivantes :

Temps de contact avec l'air	Force électromotrice
0	0,189 volts.
1 heure	0,240 »
2 jours	0,296 »
3 »	0,342 »
4 »	0,372 »
5 »	0,420 »
10 »	0,480 »
11 »	0,489 »
12 »	0,500 »
14 »	0,510 »
16 »	0,525 »
18 »	0,542 »
19 »	0,550 »
20 »	0,552 »
23 »	0,565 »
24 »	0,570 »

Le graphique de la fig. 6 montre d'une façon plus claire la variation de ces valeurs. Cependant, malgré la lenteur de l'action de l'oxygène, en laissant pendant longtemps à l'air le charbon actif provenant d'une électrode—hors de l'enceinte, pour faciliter son action—la force électromotrice reprend sa valeur initiale. Et c'est sur cela que se base précisément l'application technique du charbon actif comme électrode dans les piles sèches.

Pour l'étude plus précise de ce point nous nous sommes procurés des échantillons de charbon actif: l'un entièrement dépourvu d'oxygène, et saturé d'hydrogène, et l'autre avec une quantité d'oxygène très supérieure à la normale. Nous avons construit deux électrodes de la façon habituelle et nous les avons placés dans leurs récipients respectifs, soigneusement recouverts par une cloche en verre remplie de la solution électrolytique—voir fig. 7. Les fils de liaison sont entourés d'un petit tube en verre et recouverts d'une couche de paraffine pour empêcher des actions dues au métal étranger, et de même pour les vis. Dans chaque récipient on place une petite lame de zinc et la solution de sulfate de zinc et on procède à l'étude de la décharge.

Pour cela nous avons utilisé le même appareil enregistreur qui, au

moyen d'un courant auxiliaire qui agit sur un relais, peut enregistrer simultanément deux décharges; nous avons disposé les deux circuits de la même façon: la pile, une résistance pour régler l'intensité du courant, un miliampèremètre et l'enregistreur convenablement shunté. Le miliampèremètre a pour but de corriger les indications de l'enregistreur et de vérifier son bon fonctionnement.

Nous désignons par les lettres O et R respectivement le circuit de l'électrode de charbon avec excès d'oxygène et celui du charbon avec

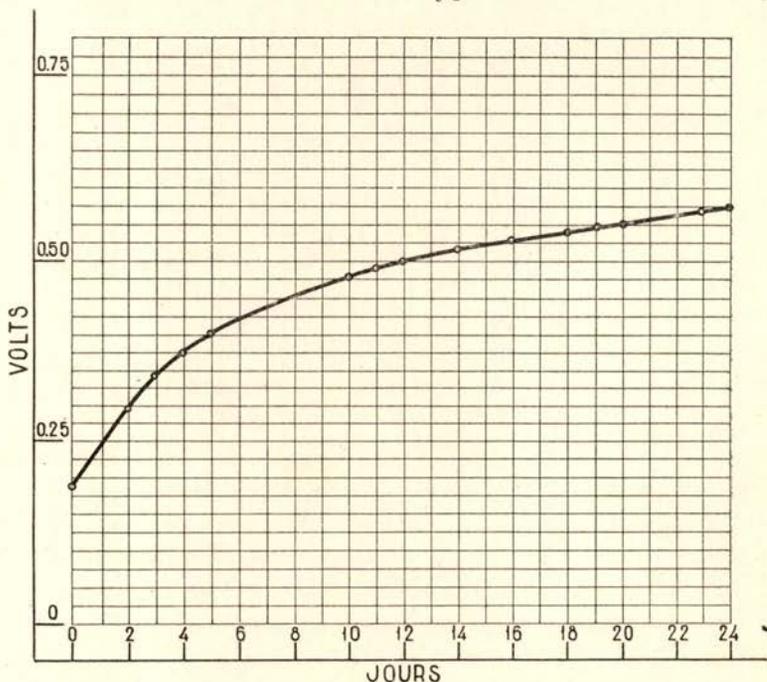


Fig. 6

hydrogène adsorbé. Les conditions initiales des piles en circuit ouvert sont:

	Circuit O	Circuit R
Concentration de l'électrolyte ($\text{SO}_4 \text{Zn}, 7 \text{OH}_2$)	150 g/l	150 g/l
Poids du charbon actif	5,91 g	7,71 g
Poids du zinc	19,226 g	19,378 g
Force électromotrice	1,74 v	0,82 v

Les décharges durent en général 24 heures et on laisse reposer les piles pendant 24 autres heures.

On a donné, pour terminer, la période des décharges, quand celles-ci se reproduisent presque exactement égales d'une expérience à la suivante.

Les graphiques correspondants se réduisent à une descente brusque d'intensité jusqu'à atteindre une valeur où elle se maintient presque constante. En outre les décharges des deux circuits sont égales à de petites différences près, qui doivent dépendre de la différence des résistances totales de ceux-ci.

La force électromotrice se régénère pendant le repos, rapidement d'abord et ensuite plus lentement : des valeurs 0,0285 dans le circuit 0

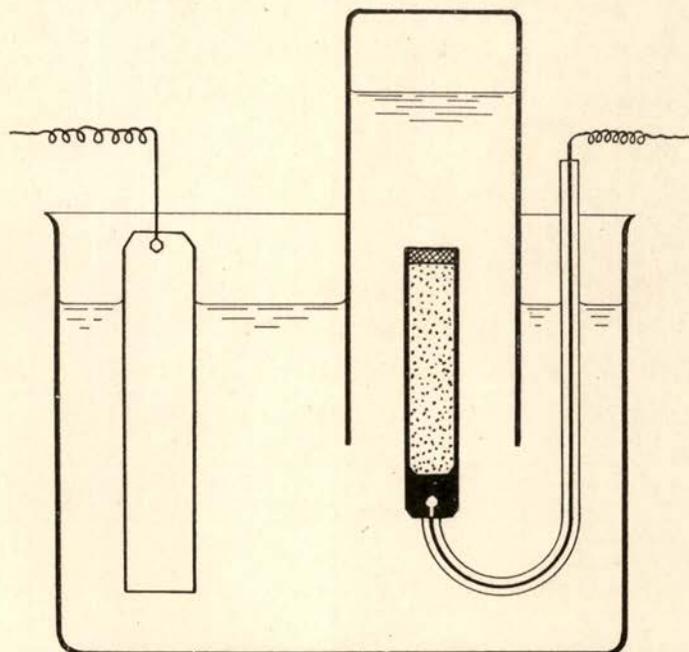


Fig. 7

et 0,057 dans le circuit R mesurés à la fin de la dernière décharge, elle passe au bout de 24 heures à 0,175 volts dans le circuit 0 et 0,205 dans le circuit R ; six jours après cette lecture les valeurs atteintes sont 0,241 volts et 0,262 volts respectivement.

Dans l'électrode R (avec hydrogène) on observe un dégagement sensible d'hydrogène à partir de la décharge n° 5 ; l'hydrogène s'accumule dans la cloche et à la fin de la décharge il occupe un volume d'environ 40 cm³. Dans l'électrode 0 le dégagement d'hydrogène devient sensible à partir de la décharge n° 8 et quand on considère l'expérience comme terminée, il occupe un volume d'environ 8 cm³.

Les données pour la construction des courbes de la force électromotrice en fonction du nombre d'ampères-heure par gramme de charbon sont indiquées dans le tableau suivant :

Circuit 0

Décharge	Nombre d'ampères-heure		Nombre d'ampères-heure/g. (5,91 g. de charbon)	f. e. m. (volts)
	partiaux	totaux		
0	0	0	0	1,74
1	0,201	0,201	0,034	1,10
2	0,409	0,610	0,103	0,555
3	0,179	0,789	0,133	0,416
4	0,154	0,943	0,159	0,312
5	0,124	1,067	0,180	0,270
6	0,106	1,173	0,198	0,232
7	0,074	1,247	0,211	0,238
8	0,090	1,337	0,226	0,238
9	0,085	1,422	0,240	0,205
10	0,014	1,436	0,243	0,175

Circuit R

Décharge	Nombre d'ampères-heure		Nombre d'ampères-heure/g. (7,71 g. de charbon)	f. e. m. (volts)
	partiaux	totaux		
0	0	0		0,82
1	0,095	0,095	0,012	0,36
2	0,164	0,259	0,034	0,262
3	0,045	0,304	0,039	0,25
4	0,035	0,339	0,044	0,28
5	0,032	0,371	0,048	0,222
6	0,032	0,403	0,052	0,225
7	0,025	0,428	0,055	0,218
8	0,017	0,475	0,062	0,237
9	0,065	0,540	0,070	0,210
10	0,019	0,559	0,073	0,205

On voit nettement sur les graphiques que la quantité d'électricité qu'on peut obtenir de la pile augmente avec la quantité d'oxygène adsorbé.

Et maintenant réapparaît à nouveau la question, déjà traitée, de savoir quelle est la cause fondamentale de la production de l'énergie. Nous avons vu qu'on devait l'attribuer à l'adsorption des ions H^+ et Zn^{++} présents dans l'électrolyte, et que dans les premières décharges l'action est due surtout au Zn^{++} tandis qu'à la fin le dégagement d'hydrogène croît rapidement. L'action de l'oxygène peut s'expliquer en supposant qu'il agit sur les atomes de zinc adsorbés et déchargés et, en les transformant en oxyde de zinc, les points sélectifs d'adsorption restent libres et par conséquent adsorbent de nouveaux ions Zn^{++} : c'est-à-dire que le zinc adsorbé se transforme en oxyde de zinc, formant une couche non unie au charbon et celui-ci reprend son pouvoir d'adsorption; ainsi la régénération de la force électromotrice d'un charbon provenant d'une pile déchargée s'explique clairement. D'autre part, il est aussi évident que cette oxydation doit être plus rapide quand il y a de l'oxygène adsorbé dans le charbon et plus lente quand l'oxygène doit arriver à celui-ci à partir de l'atmosphère, soit directement, soit à travers une solution électrolytique.

6. Démonstration que l'adsorption des cations métalliques est suffisante pour produire des courants électriques. On pourrait penser que le courant obtenu dans ce que nous avons appelé ici piles d'adsorption est dû à l'action exclusive de l'ion H^+ qui, s'il y a de l'oxygène adsorbé se combine à lui pour donner de l'eau, et sinon se dégage. La présence constante de zinc dans tous les échantillons de charbon utilisés dans nos piles semble une raison décisive pour admettre sa participation dans la production de l'énergie. Cependant le professeur Steinwehr de Berlin nous a fait observer qu'il reste un point à éclaircir: le dépôt de zinc sur le charbon se produit-il grâce au fonctionnement de la pile ou bien suffit-il pour qu'il ait lieu la simple immersion dans une solution d'ions Zn^{++} même sans fermer le circuit?

Pour élucider ce doute nous avons construit deux piles égales: un récipient en verre rempli d'une solution de $SO_4 Zn$, 7 OH_2 —150 g/l—, une lame de zinc et une barre de charbon activée à la surface.

Nous en avons mis une en court-circuit pendant cinq jours et l'autre a été maintenue en circuit ouvert pendant la même période. On enlève les électrodes de charbon, on les lave et on les laisse sécher à l'air: sur le charbon de la pile qui a fonctionné on distingue une couche blanche, tandis que sur l'autre on n'observe rien. Au microscope on voit que la couche blanche est formée par de tout petits cristaux blancs insolubles dans l'eau et facilement solubles dans les acides dilués. Comme dans les autres cas on montre la présence de zinc dans la solution acide

par la réaction du vert de Riemann. Le dépôt de zinc sur le charbon est donc dû au fonctionnement de la pile. Ce zinc peut être, soit à l'état métallique, soit à l'état d'oxyde, car il n'est pas facile d'imaginer la formation anodique d'un autre composé, à partir d'une solution de sulfate de zinc. Il est sûr, d'après tout ce qu'on a dit antérieurement, que, si on laisse exposé à l'air du charbon contenant du zinc adsorbé, celui-ci doit passer à l'état d'oxyde plus ou moins vite, mais il est possible qu'au premier moment il soit à l'état métallique, spécialement

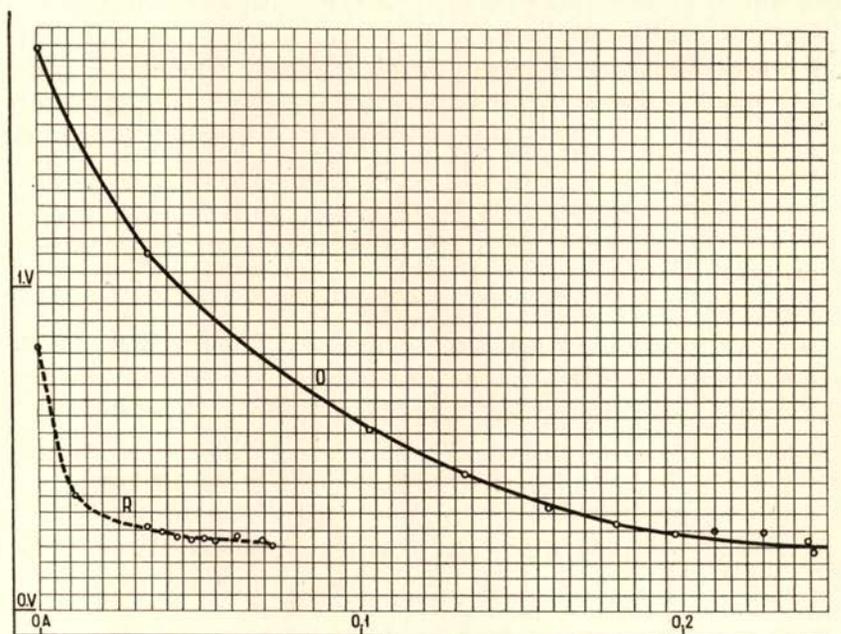


Fig. 8

quand le charbon employé est exempt d'oxygène. La détermination qualitative du zinc métallique en présence d'oxyde est délicate, car un dissolvant quelconque du zinc agit aussi sur l'oxyde et vice-versa. Nous avons employé du mercure très pur en le faisant agir sur le charbon où on prévoyait l'existence du zinc métallique ; nous avons traité le mercure par l'acide nitrique dilué et dans la solution nous avons cherché le zinc. Aucun des essais réalisés n'a donné de résultat positif mais nous ne pouvons pas interpréter cela comme une démonstration de l'absence de zinc métallique puisque, en réalité nous avons du zinc adsorbé par le charbon et il se peut que les forces d'adsorption aient une action que le mercure est incapable de vaincre.

7. Obtention d'une pile avec deux électrodes de charbon contenant des quantités différentes de zinc adsorbé. D'après notre théorie le saut de potentiel dans l'électrode adsorbante diminue au fur et à mesure que l'adsorption progresse. Par conséquent, entre deux électrodes de charbon ayant adsorbé une proportion différente de zinc doit prendre naissance un courant qui durera jusqu'à ce que les deux soient dans le même état.

En prenant un charbon saturé de zinc par une décharge préalable, et un autre charbon actif propre on aura une pile qui doit fonctionner de façon que le zinc passe à l'électrode de charbon exempt de zinc, et, après la décharge nous devons trouver du zinc sur les deux électrodes. Pour éviter autant que possible l'action de l'oxygène nous avons imaginé l'artifice suivant (fig. 9).

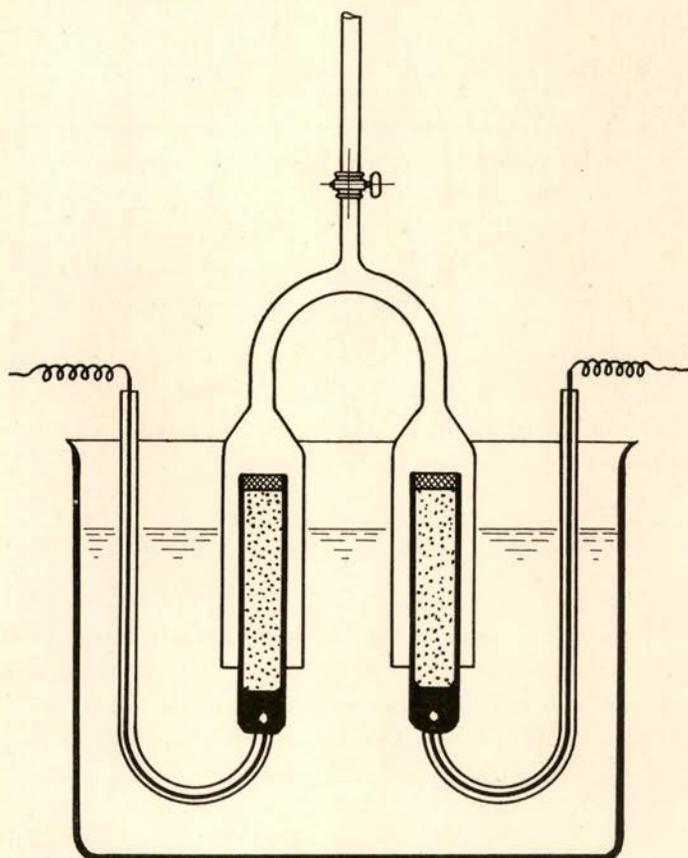


Fig. 9

Deux électrodes de charbon actif, exempt d'oxygène, sont plongées dans une solution de $\text{SO}_4 \text{Zn}$, 7OH_2 de concentration 150 g/l. Elles sont

entourées par un tube en forme de Y renversé dont le tronçon supérieur est muni d'un robinet. Ce tube a pour but d'amener un courant d'hydrogène sur les électrodes. Cet hydrogène est produit dans un appareil Kipp et purifié dans une solution de MnO_4K et $NaOH$.

Dans la solution on plonge aussi une barre de zinc. Nous avons mesuré la différence de potentiel entre chaque électrode de charbon et le zinc par la méthode du potentiomètre, en employant un pont de fil, un accumulateur de plomb, et une boîte de résistances pour obtenir une différence de 1 volt entre les extrémités du fil.

Nous désignons les électrodes de charbon par C_1 et C_2 . Il est difficile d'obtenir que deux échantillons de charbon actif donnent le même potentiel, et, en effet dans notre cas :

	C_1/Zn	C_2/Zn
Différence de potentiel	0,654 v	0,712 v

Pour que les deux électrodes soient dans le même état, nous avons commencé par les maintenir en court-circuit pendant trente minutes, au bout de quoi on a mesuré à nouveau la différence de potentiel par rapport au zinc :

	C_1/Zn	C_2/Zn
Différence de potentiel	0,701 v	0,736 v

Nous avons relié l'électrode C_1 au Zn et avons laissé en décharge pendant 20^h30^m. Le courant initial est de 6 mA et va en décroissant jusqu'à 0,51 mA à la fin de la décharge. Nous avons mesuré la différence de potentiel par rapport au zinc :

	C_1/Zn	C_2/Zn
Différence de potentiel	0,173 v	0,840 v

Ensuite nous avons relié les deux électrodes C_1 et C_2 . Le courant au premier moment est de 3,4 mA, mais il diminue rapidement; au bout de 24^h30^m, quand on a interrompu la décharge, il n'était que 0,076 mA.

Nous avons répété les opérations antérieures. Les valeurs observées sont :

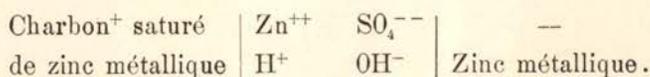
Différence de potentiel . .	C_1/Zn	C_2/Zn
(Après la décharge C_1/C_2)	0,530 v	0,555 v
	Initial	Final(24 ^h)
Intensité du courant C_1/Zn	5 mA	0,3 mA
Différence de potentiel . .	C_1/Zn	C_2/Zn
(Après la décharge C_1/Zn)	0,136 v	0,614 v

	Initial	Final
Intensité du courant C_1/C_2	2,5 mA	0,044 mA
Différence de potentiel . .	C_1/Zn	C_2/Zn
(Après la décharge C_1/C_2)	0,463 v	0,476 v

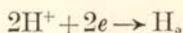
Une fois ces opérations finies, nous avons enlevé le charbon actif des deux électrodes, nous l'avons soigneusement lavé et nous l'avons laissé sécher à l'air. Après quelque temps ils prennent tous les deux une couleur légèrement blanche. Nous les avons traités par l'acide sulfurique dilué et dans la solution nous avons cherché le zinc au moyen de la réaction de Riemann déjà citée, qui donne un résultat positif pour les deux charbons.

Il est donc possible d'obtenir un courant d'une certaine importance avec une pile formée par deux électrodes de charbon actif, dont la seule différence réside dans la quantité de zinc préalablement déposée. L'explication de ce fait est claire d'après la théorie mentionnée de l'origine du potentiel. Le charbon actif propre est capable d'adsorber une quantité d'ions Zn^{++} supérieure à celle de l'autre charbon qui a déjà une certaine quantité de zinc adsorbé, et prendra donc un potentiel V plus grand que celui V' de l'autre. Quand on ferme le circuit, un courant passe qui transporte des électrons vers le charbon actif propre en transformant les ions Zn^{++} en atomes neutres qui restent dans la couche superficielle, tandis qu'un processus contraire a lieu dans l'autre électrode : les atomes de zinc se transforment en ions qui peuvent passer dans la solution et de cette façon l'effet apparent du courant est le transport du zinc d'une électrode à l'autre.

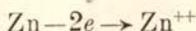
8. Conclusions. Nous avons obtenu un élément de charbon actif capable de fonctionner en absence totale d'oxygène, grâce à l'adsorption d'ions Zn^{++} dans la première partie de la décharge et qui postérieurement se transforme en élément d'adsorption d'ions H^+ , selon le schéma suivant :



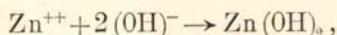
Dans le charbon a lieu le processus :



et dans le zinc :



pendant que, dans l'électrolyte la réaction suivante a lieu :



$Zn(OH)_2$ précipitant quand l'électrolyte devient saturé.

D'autre part nous avons démontré l'influence de l'oxygène qui doit agir sur le zinc adsorbé en donnant un oxyde qui se détache du charbon, ce qui fait que celui-ci reprend sa capacité adsorbante. Et c'est pour cela que la courbe de décharge obtenue en prenant comme abscisses le nombre d'ampères-heure et comme ordonnées la force électromotrice, tombe d'autant plus rapidement que la quantité d'oxygène présente est plus petite.

Tous nos résultats expérimentaux semblent donc en parfait accord avec la théorie selon laquelle l'origine des potentiels est une conséquence de l'adsorption.

INSTITUTO ALONSO DE SANTA CRUZ, MADRID

OBRAS RECEBIDAS

Por intermédio do Instituto Britânico em Portugal recebemos, por oferta do «British Council», as seguintes obras, que agradecemos:

Teach yourself Physics — W. Railston — The English Universities Press Ltd. London. — 1944 3/

Contents —

Section on Measurements and Units.

I — Preliminary Ideas.

Heat Section.

II — Expansion by Heat.

III — How Heat is measured.

VI — Properties of Vapours.

V — How Heat Travels.

Vibration and Sound Section.

VI — Vibration.

VII — Wave Motion.

VIII — Sound — General.

IX — Sounding Bodies.

X — Transmission of Sound through the Atmosphere.

Light Section.

XI — Reflection of Light.

XII — Refraction.

XIII — Optical Instruments.

XIV — Sources of Light and their Measurement.

XV — Colour.

XVI — Heat and Light as Wave Motion.

An Introduction to The Theory and application of Motion Study
— A. G. Shaw — Ministry of Aircraft Production.

Contents —

1. *Introduction*

2. *Methods of Investigation.*

- 2 (1) General Principles of Motion Economy.
- 2 (2) Process Charting.
- 2 (3) Micromotion Photography.
- 2 (4) Chronocyclegraph Study.

3. *Applications of Motion Study.*

- 3 (1) Machine Tools.
- 3 (2) Hand Tools.
- 3 (3) Jigs and Fixtures.
- 3 (4) Design of Product.
- 3 (5) Layout of Line Workshops.
- 3 (6) Layout of Line Assembly.
- 3 (7) Progress Systems.

4. *Motion Study and The Factory Personnel.*

- 4 (1) Psychological Approach.
- 4 (2) Training.

5. *Conclusion.*

A Survey of General and Applied Rheology — G. W. Scott Blair
— Sir Isaac Pitman & Sons, Ltd. London — 1944.

Contents —

Chapter I — Historical and General Introduction.

Part I

Rheological Phenomena and Their Measurement.

- Chapter II — Ideal Materials.
- Chapter III — Materials Intermediate Between Liquids and Solids.
- Chapter IV — Further Discussion on the Fall in consistency Produced by Shearing and Kindred Phenomena.
- Chapter V — Rise in Consistency Produced by Shearing and Kindred Phenomena.
- Chapter VI — Orientation and Surface Phenomena.
- Chapter VII — Rheological Measurements.
- Chapter VIII — Rheological Measurements (contd).
- Chapter IX — Rheological Measurements (contd).
- Chapter X — Rheological Measurements (contd).

Part II

Rheological Interpretations and the Evidence of Psycho-Physical Investigations.

- Chapter XI — Rheological Interpretations: The Analytical School.
- Chapter XII — Rheological Interpretations (contd): The Integralist School and Other Treatments.
- Chapter XIII — The Theoretical Significance of the Power-Law. Relation Between Stress, Strain, and Time.
- Chapter XIV — The Evidence of Psycho-Physics.
- Chapter XV — The Evidence of Psycho-Physics (contd).
- Chapter XVI — The Application of Gestalt Psychology to Rheology.
- Chapter XVII — General Conclusions.

High Frequency Thermionic Tubes — A. F. Harvey — 2nd Edition (revised) — Chapman & Hall, Ltd. — London — 1944. . . . 18 s.

Contents —

- Chapter I — General Properties of Thermionic Tubes.
- Chapter II — Influence of Frequency of Operation.
- Chapter III — Retardind Fields Generators.
- Chapter IV — The Magnetron — Part One.
- Chapter V — The Magnetron — Part Two.
- Chapter VI — Miscellaneous Tubes and Circuits at Very High Frequencies.

The Royal Society — 1660-1940. A History of its Administration under its Charters — Henry Lyons — Cambridge University Press — 1944 25 s.

Contents —

- Chapter I — The Invisible College: before 1660.
- Chapter II — The Founding of the Society: 1660-1670.
- Chapter III — Difficult Years: 1671-1770.
- Chapter IV — Sir Isaac Newton and Sir Hans Sloane: 1701-1740.
- Chapter V — A Growing Administration: 1741-1778.
- Chapter VI — Sir Joseph Sanks: 1778-1820.
- Chapter VII — The Scientific Revolt: 1820-1860.

Chapter VIII — A Scientific Society: 1861-1900.

Chapter IX — Research: 1901-1940.

Conclusion.

Appendix I — The Second Charter, 22 April 1663.

II — Statistical Tables.

III — Average number of Ordinary Fellows and of Foreign Members for each five-year period between 1665 and 1940 (with diagram).

Physical Science in Modern Life — E. G. Richardson — The English Universities Press, Ltd. — London — 3rd Ed. (1944). 10/6

Contents —

- Chapter I. Streams and Eddies.
 II. Vibrations and Waves.
 III. Sound Waves.
 IV. Supersound.
 V. Colloids.
 VI. Heat.
 VII. Light.
 VIII. More Light and Some Electricity.
 IX. More Electricity.
 X. Sensation.
 XI. Reaction.
 XII. The Exploration of the Stratosphere.

Time, Number and the Atom — R. Fortescue Pickard — Williams & Norgate, Ltd. — London.

Contents —

- Chapter 1. Introductory: The Common Origin of Time and Number.
 2. The 43-Plan.
 3. Some Strange Facts About Atomic Weights.
 4. Patterns and Properties (I — The Larger Groups).
 5. Patterns and Properties (II — The «Triplet» Elements).
 6. Patterns Connecting Half-Periods.
 7. Patterns Connecting The Third and Fourth Periods.

8. The Three Correlated Patterns Connecting the Periods.
9. Connections Between the Chief Patterns.
10. Wath do These Mathematical Relations Mean ?
11. Objections Answered, and the Theory Extended.
12. A Connection Between Atomic Weights and Atomic Numbers.
13. Further Corroboration on the 43-Plan.
14. Agreement with Meitner's Theory of α -Particles
15. More Evidence Connected with Meitner's Theory
A List of the Main Numerical Relations.
Epilogue (In Form of a Dialogue).
Appendices.

A Treatise on Applied Hydraulics — Herbert Addison — 3rd Edition (revised and enlarged) — Chapman & Hall, Ltd. London — 1944.

Contents —

Part I

Fundamental Principles.

- | | |
|---------|---|
| Chapter | I. Liquids and Their Properties. |
| | II. Static Pressure of Liquids. |
| | III. Liquids in Motion. |
| | IV. Flow Through Orifices and ower Weirs. |
| | V. Flow Through Closed Conduits. |
| | VI. Flow Through Open Channels. |
| | VII. Dynamic Pressure of Liquids. |
| | VIII. Rotary Motion of Liquids. |

Part II

Practical Applications.

- | | |
|--|--|
| | IX. Pipes and Pipe Systems. |
| | X. Control of Water in Open Channels. |
| | XI. Miscellaneous Flow Problems. |
| | XII. Hydraulic Turbines: (I) Construction. |
| | XIII. Hydraulic Turbines: (II) Períomance. |
| | XIV. Pumping Machinery: (I) Positive Pamps, Water and Gas-operated Devices, etc. |
| | XV. Pumping Machinery: (II) Centrifugal Pumps. |
| | XVI. Pumping Machinery: (III) Propeller and Screw Pumps. |

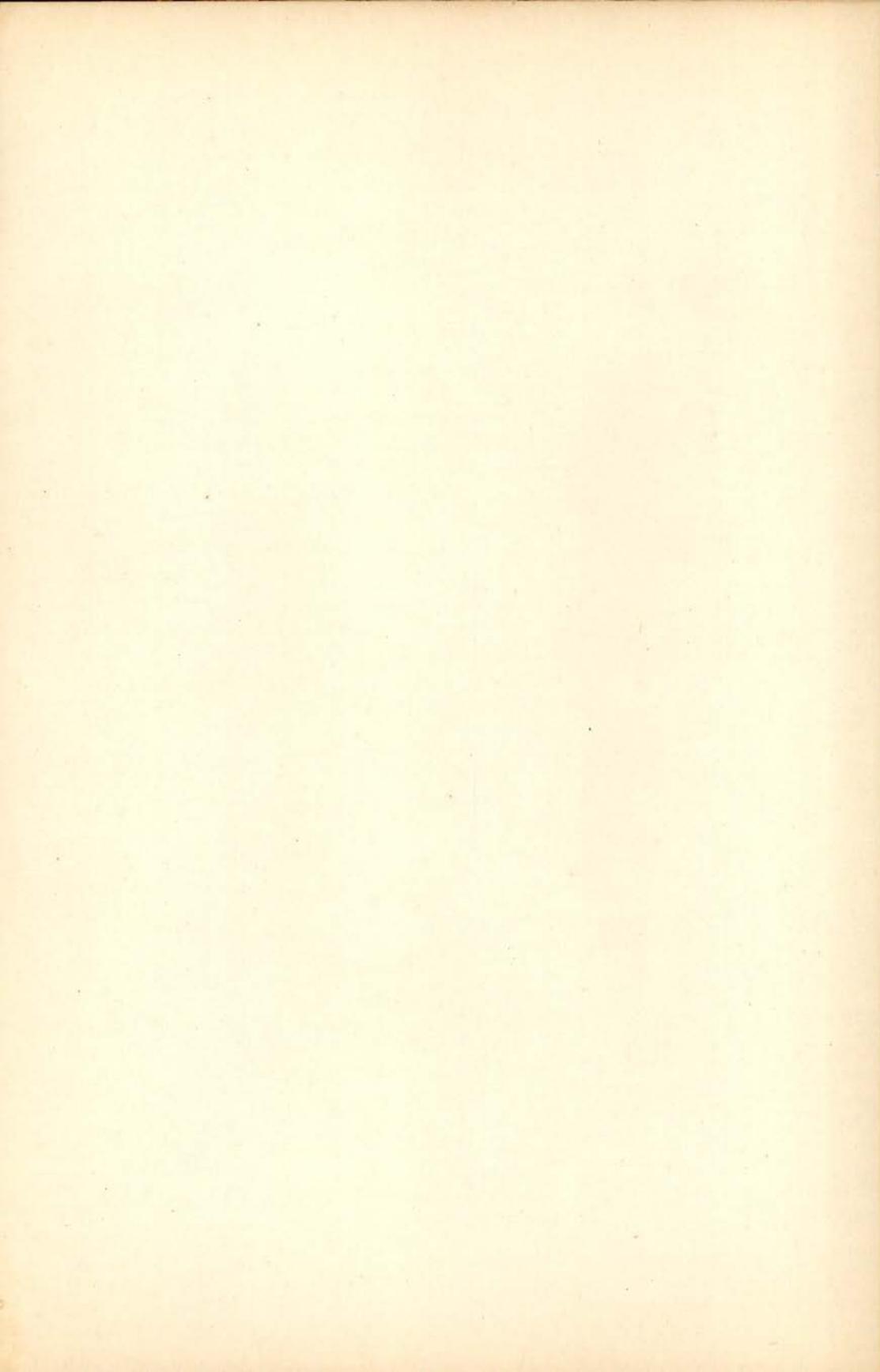
- XVII. Hydraulic Transmission and Storage of Energy.
 XVIII. Hydraulic Measurements.
 Examples.
 Table of Conversion Factors.

The Measurement of Colour — W. D. Wright — Adam Hilger, Ltd.
 London — 1944.

Contents —

- | | |
|----------|--|
| Chapter | I. Radiation in the Visible Spectrum: Its Emission, Absorption and Reflection. |
| | II. Radiation in the Visible Spectrum: Its Reception in the Eye. |
| | III. The Trichromatic System of Colour Measurements. |
| | IV. Colorimeters: Their Design and Use. |
| | V. Spectrophotometry Applied to the Measurement. |
| | IV. The Colour Atlas as a Sub-Standard of Colour. |
| | IIIV. Practical Applications of Colorimetry. |
| Appendix | I. Illuminants. |
| | II. The C. I. E. System of Colour Specification. |
| | III. Condensed Tables. |

FIM DO VOLUME I



PORTUGALIAE PHYSICA se propose de servir simultanément deux buts—le développement des études physiques au Portugal et la collaboration internationale dans ce domaine.

PORTUGALIAE PHYSICA est la seule revue portugaise consacrée exclusivement aux sciences physiques.

Les travaux à publier devront être écrits à la machine (les symboles à la main). Tout auteur d'un mémoire ne dépassant pas 50 pages aura droit à 100 tirages-à-part gratuits.

Toute la correspondance concernant la Rédaction de PORTUGALIAE PHYSICA doit être adressée à

PORTUGALIAE PHYSICA
Laboratório de Física — Faculdade de Ciências
Rua da Escola Politécnica — Lisboa — Portugal

Le prix du volume (environ 300 pages) est de Esc. 150\$00 (cent-cinquante escudos). Les Universités, les Laboratoires de Physique, les Académies, les Sociétés Savantes et les Revues de Physique sont invités à recevoir cette revue en échange de leurs publications.

PORTUGALIAE PHYSICA donnera un compte-rendu détaillé de tous les ouvrages soumis à la Rédaction en deux exemplaires.