

L'INFLUENCE DES FORCES DE SCHWINGER SUR DES PROCESSUS NUCLÉAIRES

par J. L. RODRIGUES MARTINS

(Reçu le 15 Janvier 1946)

S O M M A I R E :

I. Les expériences nous fournissent deux indications sur les termes d'interaction entre les spins qui sont susceptibles de renverser la direction du spin des particules nucléaires: *a*) La détermination du moment quadripolaire du deuteron (1); *b*) La diffusion de résonance des protons $j = \frac{1}{2}$ par les états du compound Li_5 (2). Ces termes sont du type

$$(1) \quad g(r) \cdot \frac{(\vec{\sigma}_1 r) \cdot (\vec{\sigma}_2 r)}{r^2}.$$

Des solutions rigoureuses d'un problème de deux corps peuvent être trouvées si nous posons

$$(2) \quad g(r) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\hbar^2}{8\pi^2 \mu} \cdot \frac{\lambda}{r^2}$$

et nous trouvons, par comparaison avec la valeur expérimentale du moment quadripolaire du deuteron, la valeur numérique du paramètre λ :

$$(3) \quad \lambda = \frac{1}{5}.$$

II. Appliquant les solutions trouvées plus haut au problème de la diffusion triplet d'un neutron par un proton, on trouve que les forces (1) donnent lieu, sous certaines conditions, à des processus de renversement des spins avec une probabilité de l'ordre unité, même si les forces (1) sont faibles para rapport aux forces de liaison nucléaires. Ce résultat indique que les mesures de TSIEN sont compatibles avec les résultats de KELLOG, RABI, RAMSAY et ZACHARIAS. Le moment cinétique orbital ne peut donc être considéré comme une intégrale approchée du mouvement dans des processus nucléaires.

§ 1 — INTRODUCTION

Les données expérimentales sur la liaison des particules nucléaires ont donné lieu à l'étude de quatre types de forces (*Wigner, Bartlett, Heisenberg et Majorana*). Ces théories du champ nucléaire (champ de mésons) de *Yukawa, Heitler*, etc., ont conduit à des forces d'un type plus générale qui implique, en particulier, des termes d'interaction du type

$$(1,1) \quad g(r) \cdot \frac{(\vec{\sigma}_1 \vec{r}) \cdot (\vec{\sigma}_2 \vec{r})}{r^2}$$

qui, suivant ces théories, sont du même ordre de grandeur que les forces indiquées plus haut. Contrairement aux types de forces les plus simples, ces termes (forces de Schwinger) [3] ne commutent pas avec $(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$; ils ne laissent donc pas inchangée, pendant le mouvement, la direction du spin total.

Comme nous verrons plus loin, des termes du type (1,1) ont pour conséquence qu'il n'existe plus d'états 3S_1 purs, mais que des états tel que l'état fondamental du deuteron, représentent un mélange ${}^3S_1 + {}^3D_1$. *Kellog, Rabi, Ramsay et Zacharias* [1] ont pu vérifier qualitativement ce résultat théorique. Ils ont trouvé que le moment quadrupolaire du deuteron est

$$Q = \int \Psi \cdot r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \cdot \Psi d\tau = 2,71 \times 10^{-27} \text{ cm}^2$$

D'autre part, *Beck et Tsien* [2] ont trouvé que la diffusion de résonance des protons $j = \frac{1}{2}$ par les états du compound Li_5 doit être décrite par une superposition d'ondes $S_{\frac{1}{2}}$ et $P_{\frac{1}{2}}$ avec une probabilité de renversement de l'ordre unité, ce qui, suivant les idées courantes, indiquerait que les forces (1,1) sont du même ordre de grandeur que les forces de liaison nucléaires.

C'est pour étudier l'influence du couplage (1,1) sur la distribution angulaire des neutrons diffusés, que nous avons étudié en détail les propriétés d'un système de deux particules nucléaires, dont l'interaction contient des termes du type :

$$(1,2) \quad V(r) \cdot 1 + f(r) \cdot (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2) + g(r) \cdot \frac{(\vec{r} \vec{\tau}_1) \cdot (\vec{r} \vec{\tau}_2)}{r^2}$$

$\vec{\sigma}_1$ et $\vec{\sigma}_2$ étant les opérateurs de Pauli pour chaque particule, r la distance relative, $f(r)$, $g(r)$ et $V(r)$ des fonctions potentielles à déterminer.

§ 2 — LES SOLUTIONS SINGULET ET TRIPLET

L'équation d'onde d'un système de deux particules dont l'interaction a la forme (1, 2) peut s'écrire, en coordonnées relatives,

$$(2,1) \quad \left\{ H_0 + f(r) \cdot (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) + g(r) \frac{(\vec{\sigma}_1 \vec{r}) \cdot (\vec{\sigma}_2 \vec{r})}{r^2} \right\} \Psi = 0$$

H_0 est l'opérateur $\frac{\hbar^2}{8\pi^2 \mu} [\Delta_1 + \Delta_2] - V(r) + E$, μ la masse réduite du mouvement relatif.

La fonction d'onde est censée avoir 4 composantes correspondantes aux quatre orientations des deux spins :

$$(2,2) \quad \hat{\Psi} = \begin{vmatrix} \Psi^{\alpha\alpha} & \Psi^{\alpha\beta} \\ \Psi^{\beta\alpha} & \Psi^{\beta\beta} \end{vmatrix}$$

Voici les solutions trouvées :

1. Solutions de singulet. Ces solutions sont antisymétriques dans les spins

$$(2,3) \quad \hat{\Psi} = \begin{vmatrix} 0 & +\varphi \\ -\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

et satisfont à l'équation

$$(2,4) \quad \{ H_0 - 3f(r) - g(r) \} \varphi = 0$$

dont les solutions sont du type

$$(2,5) \quad \varphi = \chi_l^{(r)}, P_l^m(\cos \theta) \cdot e^{im\varphi}$$

$P_l^m(\cos \theta)$ est une fonction sphérique, $\chi_l^{(r)}$ une fonction du type des fonctions de Bessel, et qui satisfait à l'équation

$$(2,6) \quad \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{8\pi^2 \mu}{\hbar^2} \left[E - V(r) - 3f(r) - g(r) - \frac{\hbar^2}{8\pi^2 \mu} \cdot \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \right\} \chi_l^{(r)} = 0.$$

2. Solutions triplets. Ces solutions sont symétriques dans les spins

$$(2,7) \quad \hat{\Psi} = \begin{vmatrix} \Psi^{\alpha\alpha} & \varphi \\ \varphi & \Psi^{\beta\beta} \end{vmatrix}$$

et satisfont à l'équation

$$(2,8) \quad \vec{J}^2 \cdot \hat{\Psi} = j(j+1) \frac{\hbar^2}{4\pi^2} \cdot \hat{\Psi}$$

\vec{J} étant le moment cinétique total

$$(2,9) \quad \vec{J} = \vec{M} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$$

qui est une intégrale du mouvement pour l'interaction (1,2).

Voici les solutions générales trouvées, correspondantes à chaque pair de valeurs j, m .

a) $j=l$ (états purs)

$$(2,10) \quad \begin{aligned} \Psi^{\alpha\alpha} &= \frac{\alpha_2}{N_2} \cdot \chi_j(r) \cdot P_j^{m-1}(\cos \theta) \cdot e^{i(m-1)\varphi} \\ \varphi &= \frac{\beta_2}{N_2} \cdot \chi_j(r) \cdot P_j^m(\cos \theta) \cdot e^{im\varphi} \\ \Psi^{\beta\beta} &= \frac{\gamma_2}{N_2} \cdot \chi_j(r) \cdot P_j^{m+1}(\cos \theta) \cdot e^{i(m+1)\varphi} \end{aligned}$$

α_2, β_2 e γ_2 étant données par

$$(2,11) \quad \begin{aligned} \alpha_2 &= m(m-1) - l(l+1) \\ \beta_2 &= -m \\ \gamma_2 &= 1. \end{aligned}$$

La partie radiale de ces solutions satisfait à l'équation

$$(2,12) \quad \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{8\pi^2 \mu}{h^2} (E - V + f + g) \right\} \chi_l(r) = 0.$$

b) $l=j-1$ et $l=j+1$ (états mixtes)

$$(2,13) \quad \begin{aligned} \Psi^{\alpha\alpha} &= \frac{\alpha_1}{N_1} \cdot \chi_{j+1}(r) \cdot P_{j+1}^{m-1}(\cos \theta) \cdot e^{i(m-1)\varphi} + \frac{\alpha_3}{N_3} \cdot \chi_{j-1}(r) \cdot P_{j-1}^{m-1}(\cos \theta) \cdot e^{i(m-1)\varphi} \\ \varphi &= \frac{\beta_1}{N_1} \cdot \chi_{j+1}(r) \cdot P_{j+1}^m(\cos \theta) \cdot e^{im\varphi} + \frac{\beta_3}{N_3} \cdot \chi_{j-1}(r) \cdot P_{j-1}^m(\cos \theta) \cdot e^{im\varphi} \\ \Psi^{\beta\beta} &= \frac{\gamma_1}{N_1} \cdot \chi_{j+1}(r) \cdot P_{j+1}^{m+1}(\cos \theta) \cdot e^{i(m+1)\varphi} + \frac{\gamma_3}{N_3} \cdot \chi_{j-1}(r) \cdot P_{j-1}^{m+1}(\cos \theta) \cdot e^{i(m+1)\varphi}. \end{aligned}$$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_3, \beta_3$ et γ_3 étant données par

$$\alpha_1 = l(l+1) + m(m-1) - 2lm \quad \alpha_3 = l(l+1) + m(m+1) + 2lm$$

$$(2,14) \quad \begin{array}{ll} \beta_1 = l - m & \beta_3 = -(m + l + 1) \\ \gamma_1 = 1 & \gamma_3 = 1 \end{array}$$

N_1 , N_2 e N_3 sont les facteurs de normalization, donnés par la condition de normalization à l'unité

$$(2,15) \quad \int \Psi \cdot \Psi^* d\tau = \int \{ |\Psi^{\alpha\alpha}|^2 + 2|\varphi|^2 + |\Psi^{\beta\beta}|^2 \} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = 1.$$

Voici les expressions trouvées :

$$(2,16) \quad \begin{aligned} N_1^2 &= \left\{ \alpha_1^2 \cdot \frac{(j+m)!}{(j-m+2)!} + 2\beta_1^2 \frac{(m+j+1)!}{(j-m+1)!} + \gamma_1^2 \frac{(j+m+2)!}{(j-m)!} \right\} \frac{4\pi}{2j+3} \\ N_2^2 &= \left\{ \alpha_2^2 \frac{(j+m-1)!}{(j-m+1)!} + 2\beta_2^2 \cdot \frac{(m+j)!}{(j-m)!} + \gamma_2^2 \frac{(j+m+1)!}{(j-m-1)!} \right\} \frac{4\pi}{2j+1} \\ N_3^2 &= \left\{ \alpha_3^2 \frac{(j+m-2)!}{(j-m)!} + 2\beta_3^2 \frac{(m+j-1)!}{(j-m-1)!} + \gamma_3^2 \cdot \frac{(j+m)!}{(j-m-2)!} \right\} \frac{4\pi}{2j-1} \end{aligned}$$

Les parties radiales de (2,13) satisfont au système d'équations :

$$(2,17) \quad \begin{aligned} \frac{2j}{(2j+1)} \cdot g \cdot \chi_{j-1}(r) + \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(j+1)(j+2)}{r^2} + \right. \\ \left. + \frac{8\pi^2 \mu}{h^2} \left[E - V - f - \frac{g}{2j+1} \right] \right\} \cdot \chi_{j+1}(r) = 0 \\ \frac{2(j+1)}{(2j+1)} \cdot g \cdot \chi_{j+1}(r) + \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{j(j-1)}{r^2} + \right. \\ \left. + \frac{8\pi^2 \mu}{h^2} \left[E - V - f - \frac{g}{2j+1} \right] \right\} \chi_{j-1}(r) = 0. \end{aligned}$$

On peut conclure immédiatement de (2,17) que c'est le dernier terme de l'interaction (2,1) — forces de Schwinger — qui est responsable de la coexistence des états triplets $l=j-1$ et $l=j+1$, tels que 3S_1 et 3D_1 dans l'état fondamental du deuteron. Pour estimer cet effet nous allons résoudre le système (2,17), dans le cas particulier $j=1$.

§ 3 — SOLUTIONS RIGOUREUSES DES ÉQUATIONS (2,17) POUR $J=1$

Pour obtenir de solutions rigoureuses du système (2, 17) nous posons

$$(3,1) \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{8\pi^2 \mu}{h^2} \cdot g = \frac{\lambda}{r^2}$$

$$H_0 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{8\pi^2 \mu}{h^2} \left[E - V + f - \frac{g}{3} \right].$$

Le système (2,17) s'écrira donc

$$(3,2) \quad H_0 \cdot \chi_2(r) = \frac{1}{r^2} [6 \cdot \chi_2(r) - \lambda \cdot \chi_0(r)]$$

$$H_0 \cdot \chi_0(r) = -\frac{1}{r^2} \cdot 2 \cdot \lambda \cdot \chi_2(r)$$

et, par la transformation linéaire

$$(3,3) \quad Y(r) = \alpha \cdot \chi_2(r) + \beta \cdot \chi_0(r)$$

$$Z(r) = \gamma \cdot \chi_2(r) + \delta \cdot \chi_0(r)$$

peut alors être ramené sur axes principaux

$$(3,4) \quad H_0 \cdot Y(r) = \frac{a}{r^2} \cdot Y(r)$$

$$H_0 \cdot Z(r) = \frac{b}{r^2} \cdot Z(r)$$

si nous introduisons les relations

$$(3,5) \quad \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma \neq 0 \quad \begin{cases} (6 \cdot \alpha - 2 \cdot \lambda \cdot \beta) \cdot \beta + \alpha^2 \cdot \lambda = 0 \\ (6 \cdot \gamma - 2 \cdot \lambda \cdot \delta) \cdot \delta + \gamma^2 \cdot \lambda = 0 \end{cases}$$

On peut alors résoudre sans difficulté le système (3,4), pour une valeur donnée de λ , et déterminer ensuite $\chi_0(r)$ et $\chi_2(r)$ à l'aide des expressions

$$(3,6) \quad \chi_2(r) = \frac{\delta \cdot Y - \beta \cdot Z}{\alpha \cdot \delta - \beta \gamma} \quad \chi_0(r) = \frac{-\gamma \cdot Y + \alpha \cdot Z}{\alpha \cdot \delta - \beta \gamma}$$

$$\alpha = \cos \theta \quad \beta = \sin \theta \quad \gamma = \sin \varphi \quad \delta = \cos \varphi$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{3}{2\lambda} - \sqrt{\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{1}{2}} \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{3}{\lambda} + \sqrt{\frac{9}{\lambda^2} + 2}.$$

§ 4 — LE MOMENT QUADRUPOLAIRE DE L'ÉTAT FONDAMENTAL DU DEUTERON

Nous avons défini le moment quadripolaire de la même façon que *Kellog*, *Rabi*, *Ramsay* et *Zacharias*, par la valeur moyenne de l'expression $\frac{r^2}{4} \cdot (3 \cos^2 \theta - 1)$, où r est la coordonnée du proton par rapport au centre de gravité du deuteron. En utilisant la valeur expérimentale du moment quadripolaire du deuteron dans l'état fondamental ($j=1$), on peut écrire l'équation

$$(4,1) \quad Q = \int |\Psi^{zz}| \cdot \frac{r^2}{4} (3 \cos^2 \theta - 1) \cdot \Psi + 2 \cdot \frac{r^2}{4} (3 \cos^2 \theta - 1) \cdot \varphi + \\ + \Psi^{\beta\beta} \cdot \frac{r^2}{4} (3 \cos^2 \theta - 1) \Psi^{\beta\beta} | r^2 dr d(\cos \theta) d\varphi = 2,71 \times 10^{-27} \text{ cm}^2.$$

En introduisant dans cette équation les solutions triplets trouvées en fonction du paramètre λ , on trouve alors en première approximation ($\lambda^2 \ll 1$)

$$(4,2) \quad \lambda \approx \frac{1}{5}.$$

Nous avons ensuite déterminé l'ordre de grandeur de $g(r)$ par rapport aux forces de liaison nucléaires

$$(4,3) \quad \frac{g}{u} \sim \frac{1}{10}.$$

§ 5 — LE PROBLÈME DE LA DIFFUSION TRIPLET

L'équation d'onde (2,1) nous permet également d'écrire des processus de collision de deux particules. On peut immédiatement écrire les expressions pour les ondes planes incidentes au dehors du rayon d'action des forces nucléaires :

I. *Ondes incidentes.* a) *Ondes singulets.* Ces solutions de l'équation (2,1) sont antisymétriques dans les spins; le spin total correspondant est donc zero, aucune modification de la théorie habituelle de la diffusion n'ayant lieu :

$$(5,1) \quad \bar{\Psi} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ikr \cos \theta} \\ - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ikr \cos \theta} & 0 \end{array} \right\|$$

b) *Ondes triplets*. Ces solutions sont symétriques dans les spins; nous avons à distinguer les trois possibilités du spin total par rapport à la direction de l'onde incidente ($m = +1, 0, -1$)

$$(5,2) \quad \text{a) } m = +1 \quad \hat{\Psi} = \begin{vmatrix} e^{ikr \cos \theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(5,3) \quad \text{b) } m = -1 \quad \hat{\Psi} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{ikr \cos \theta} \end{vmatrix}$$

$$(5,4) \quad \text{c) } m = 0 \quad \hat{\Psi} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ikr \cos \theta} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ikr \cos \theta} & 0 \end{vmatrix}$$

À l'aide de la formule de *Rayleigh*

$$(5,5) \quad e^{ikr \cos \theta} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \sum_l i^l (2l+1) \cdot \zeta_l(r) \cdot P_l^0(\cos \theta)$$

nous décomposerons chacune des ondes planes triplets; en utilisant ensuite les solutions (2,10) et (2,13) on peut écrire chaque onde plane sous la forme de une série infinie construite de façon à mettre ensemble les trois états $l=j+1$, $l=j$ et $l=j-1$ correspondantes à chaque valeur du moment cinétique total j . Mais, comme ce qui nous intéresse ici est étudier le couplage entre les états 3S_1 et 3D_1 dans le processus de diffusion, donc nous n'avons utilisé dans chaque série infinie que les termes les plus bas correspondantes aux valeurs $l=0$ et $l=2$.

Les ondes incidentes triplet prennent alors la forme :

$$(5,6) \quad \begin{aligned} \text{a) } m = +1 & \\ \Psi^{\alpha\alpha} &= a_2 \cdot X_2(r) \cdot Y_2^0(\cos \theta) + c_0 \cdot X_0(r) \cdot Y_0^0(\cos \theta) \\ \Psi^{\alpha\beta} &= \Psi^{\alpha\beta} = \Psi^{\beta\beta} = 0 \\ \text{b) } m = 0 & \\ \Psi^{\alpha\alpha} &= \Psi^{\beta\beta} = 0 \\ \Psi^{\alpha\beta} &= \Psi^{\beta\alpha} = a_2 \cdot X_2(r) \cdot Y_2^0(\cos \theta) + c_0 \cdot X_0(r) \cdot Y_0^0(\cos \theta) \\ \text{c) } m = -1 & \\ \Psi^{\alpha\alpha} &= \Psi^{\alpha\beta} = \Psi^{\beta\alpha} = 0 \\ \Psi^{\beta\beta} &= a_2 \cdot X_2(r) \cdot Y_2^0(\cos \theta) + c_0 \cdot X_0(r) \cdot Y_0^0(\cos \theta) \end{aligned}$$

$Y_0^0(\cos \theta)$ e $Y_2^0(\cos \theta)$ sont les fonctions sphériques normalisées

$$(5,7) \quad \begin{aligned} Y_0^0(\cos \theta) &= \frac{\alpha_3 \gamma_3}{N_3} \cdot P_0^0(\cos \theta) \\ Y_2^0(\cos \theta) &= \frac{\alpha_1 \gamma_1}{N_1} \cdot P_0^0(\cos \theta) \end{aligned}$$

$X_0(r)$ e $X_2(r)$ des fonctions du type des fonctions de Bessel, a_l et c_l , des coefficients dont les valeurs peuvent être obtenues en utilisant la formule de *Rayleigh* :

$$(5,8) \quad \begin{aligned} \text{a) } m=+1 & \\ a_l &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{i^l}{2l} \cdot N_1 \\ c_l &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{i^l}{2(l+1)} \cdot N_3 \\ \text{b) } m=0 & \\ a_l &= \sqrt{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{i^l}{(l+1)} \cdot N_1 \\ c_l &= -\sqrt{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{i^l}{(l+1)} \cdot N_3 \\ \text{c) } m=-1 & \\ a_l &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{i^l(l-1)}{2} \cdot N_1 \\ c_l &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{i^l(l+2)}{2} \cdot N_3 \end{aligned}$$

II. *Les ondes planes diffusées.* L'onde diffusée sera écrite, comme d'habitude, sous la forme d'une série analogue à celle des ondes incidentes, où nous remplacerons a_2 et c_0 par les coefficients de diffusion \bar{a}_2 et \bar{c}_0 et où les ondes stationnaires $X_2(r)$ et $X_0(r)$ seront remplacées par les ondes divergentes

$$(5,9) \quad \begin{aligned} X_2^+(r) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left[\left(\frac{3}{k^2 r^2} - 1 \right) + \frac{3}{kr} \right] \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \\ X_0^+(r) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{e^{i(kr - \frac{\pi}{2})}}{r} \end{aligned}$$

Les expressions des ondes diffusées seront donc

$$a) \quad m = +1$$

$$\Psi^{zz} = \bar{a}_2 \cdot X_2^{(+)}(r) \cdot Y_2^0(\cos \theta) + \bar{c}_0 \cdot X_0^{(+)}(r) \cdot Y_0^0(\cos \theta)$$

$$\Psi^{z\beta} = \Psi^{\beta z} = \Psi^{\beta\beta} = 0$$

$$b) \quad m = -0$$

$$(5,10) \quad \Psi^{z\beta} = \Psi^{\beta z} = \bar{a}_2 \cdot X_2^{(+)}(r) \cdot Y_2^0(\cos \theta) + \bar{c}_0 \cdot X_0^{(+)}(r) \cdot Y_0^0(\cos \theta)$$

$$\Psi^{zz} = \Psi^{\beta\beta} = 0$$

$$c) \quad m = -1$$

$$\Psi^{\beta\beta} = \bar{a}_2 \cdot X_2^{(+)}(r) \cdot Y_2^0(\cos \theta) + \bar{c}_0 \cdot X_0^{(+)}(r) \cdot Y_0^0(\cos \theta)$$

$$\Psi^{zz} = \Psi^{z\beta} = \Psi^{\beta z} = 0$$

III. *Les ondes stationnaires à l'intérieur.* Le système (3,4) admet immédiatement les deux solutions particulières

$$(5,11) \quad a) \quad Z(r) = 0; \quad Y(r) = J_n + \frac{1}{2} \quad (n \sim 2)$$

$J_n + \frac{1}{2}$ étant une solution de l'équation de *Bessel*

$$(5,12) \quad H_0 \cdot Y(r) = \frac{a}{r^2} Y(r)$$

$$(5,13) \quad b) \quad Y(r) = 0; \quad Z(r) = J_n + \frac{1}{2} \quad (n \sim 0)$$

J_n étant une solution de l'équation

$$(5,14) \quad H_0 \cdot Z(r) = \frac{b}{r^2} \cdot Z(r).$$

Les solutions $\chi_0(r)$ et $\chi_2(r)$ correspondantes seront obtenues à l'aide des relations (3,3)

$$(5,15) \quad a) \quad \chi_2 = A \cdot Y(r); \quad \chi_0 = B \cdot Y(r).$$

$$(5,16) \quad b) \quad \chi_2 = A' \cdot Z(r); \quad \chi_0 = B' \cdot Z(r)$$

A, A', B et B' étant données par les relations

$$(5,17) \quad A = \frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma} \approx 1 - \frac{\lambda^2}{24} \quad B = -\frac{\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma} \approx \frac{\lambda}{3}$$

$$A' = -\frac{\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma} \approx \frac{\lambda}{6} \quad B' = \frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma} \approx 1.$$

Les expressions de l'onde stationnaire à l'intérieur prennent alors la forme final

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \quad m = +1 \\
 \Psi^{zz} &= [T \cdot A \cdot Y(r) + S \cdot A' \cdot Z(r)] \cdot Y_2^0(\cos \theta) + \\
 &\quad + [T \cdot B \cdot Y(r) + S \cdot B'(r)] \cdot Y_0^0(\cos \theta) \\
 \text{b) } \quad m = 0 \\
 (5,18) \quad \Psi^{z\beta} = \Psi^{\beta z} &= [T \cdot A \cdot Y(r) + S \cdot A' \cdot Z(r)] \cdot Y_2^0(\cos \theta) + \\
 &\quad + [T \cdot B \cdot Y(r) + S \cdot B' \cdot Z(r)] \cdot Y_0^0(\cos \theta) \\
 \text{c) } \quad m = -1 \\
 \Psi^{\beta\beta} &= [T \cdot A \cdot Y(r) + S \cdot A' \cdot Z(r)] \cdot Y_2^0(\cos \theta) + \\
 &\quad + [T \cdot B \cdot Y(r) + S \cdot B' \cdot Z(r)] \cdot Y_0^0(\cos \theta)
 \end{aligned}$$

T, S, T' et S' sont des facteurs qui mesurent les amplitudes des fonctions d'onde à l'intérieur du noyau.

§ 6 — LES CONDITIONS AUX LIMITES

L'onde résultante à l'extérieur et l'onde stationnaire à l'intérieur doivent satisfaire aux conditions de continuité aux limites ($r=R$, R étant la largeur de notre modèle simplifié, trou de potentiel rectangulaire). Nous allons écrire ces conditions dans le cas $m=+1$; on obtiendra ensuite des expressions analogues pour $m=-1$ et $m=0$. L'onde résultante pour $m=-1$ s'écrit

$$(6,1) \quad \text{a) } \quad m = +1 \\
 \Psi^{zz} = [a_2 X_2 + \bar{a}_2 X_2^{(+)}] \cdot Y_2^0(\cos \theta) + [c_0 X_0 + \bar{c}_0 X_0^{(+)}] \cdot Y_0^0(\cos \theta)$$

ce qui nous permet d'obtenir immédiatement le système d'équations correspondantes aux conditions aux limites

$$\begin{aligned}
 (6,2) \quad & T \cdot A \cdot Y(R) + S \cdot A' \cdot Z(R) = a_2 X_3(R) + \bar{a}_2 X_2^{(+)}(R) \\
 & T \cdot B \cdot Y(R) + S \cdot B' \cdot Z(R) = c_0 X_0(R) + \bar{c}_0 X_0^{(+)}(R) \\
 & T \cdot A \cdot Y'(R) + S \cdot A' \cdot Z'(R) = a_2 X_2'(R) + \bar{a}_2 X_2^{(+)'}(R) \\
 & T \cdot B \cdot Y'(R) + S \cdot B' \cdot Z'(R) = c_0 X_0'(R) + \bar{c}_0 X_0^{(+)'}(R)
 \end{aligned}$$

$X'(R)$, $X^{(+)'}(R)$, $Y'(R)$ et $Z'(R)$ sont les dérivées, par rapport à r , de X , $X^{(+)}$, Y et Z .

En résolvant ce système on obtient les coefficients de diffusion α et \bar{c} , et les facteurs T et S :

(6,3)

$$\bar{\alpha}_2 = \frac{c_0 \cdot A A' \cdot [X_0, X_0^{(+)}] \cdot [Y, Z] + a_2 \cdot \{A' B \cdot [X_2, Z] \cdot [X_0^+, Y] - A B' \cdot [X_2, Y] \cdot X_0^{(+)} \cdot Z\}}{A B' \cdot [X_2^{(+)} \cdot Y] \cdot [X_0^{(+)} \cdot Z] - A' B \cdot [X_2^{(+)} \cdot Z] \cdot [X_0^{(+)} \cdot Y]}$$

$$\bar{c}_0 = \frac{c_0 \cdot \{A B' \cdot [X_0, Z] \cdot [X_2^{(+)} \cdot Y] - A' B \cdot [X_0, Y] \cdot [X_2^{(+)} \cdot Z]\} + a_2 \cdot B B' \cdot [X_2, X_2^{(+)}] \cdot [Y, Z]}{A B' \cdot [X_2^{(+)} \cdot Y] \cdot [X_0^{(+)} \cdot Z] - A' B \cdot [X_2^{(+)} \cdot Z] \cdot [X_0^{(+)} \cdot Y]}$$

(6,4)

$$T = \frac{a_2 \cdot B' \cdot [Z, X_0^{(+)}] \cdot [X_2, X_2^{(+)}] - c_0 \cdot A' \cdot [Z, X_2^{(+)}] \cdot [X_0, X_0^{(+)}]}{A B' \cdot [X_2^{(+)} \cdot Y] \cdot [X_0^{(+)} \cdot Z] - A' B \cdot [X_2^{(+)} \cdot Z] \cdot [X_0^{(+)} \cdot Y]}$$

$$S = \frac{a_2 \cdot B \cdot [Y, X_0^{(+)}] \cdot [X_2, X_2^{(+)}] - c_0 \cdot A \cdot [Y, X_2^{(+)}] \cdot [X_0, X_0^{(+)}]}{A B' \cdot [X_2^{(+)} \cdot Y] \cdot [X_0^{(+)} \cdot Z] - A' B \cdot [X_2^{(+)} \cdot Z] \cdot [X_0^{(+)} \cdot Y]}$$

a_2 et c_2 nous donnent les amplitudes des ondes S et D incidentes ; les expressions tels que $[X, Y]$, par exemple, sont définies par

$$[X, Y] = XY' - X'Y.$$

§ 7 — DISCUSSION DES RÉSULTATS

Les tableaux I-II indiquent l'ordre de grandeur des différents facteurs de (6,3) qui déterminent l'ordre de grandeur de la section efficace pour les résonances S et D et hors de résonance, pour différents valeurs du rapport $\frac{n}{K^2 R^2}$ où n est un paramètre numérique qui caractérise le couplage entre les spins ($\lim_{\rho \rightarrow 0} n = 0, n \approx 0,05$).

Nous pouvons distinguer deux types de minima du dénominateur commun de (6,3) et (6,4) correspondant dans le cas limite $n \rightarrow 0$ respectivement aux résonances S et D.

a) Condition d'une résonance S

$$\bar{Z}' = -\eta^2 \cdot \frac{2\bar{Y}'Z}{\bar{Y}' + 2Y + 2Y\eta^2}.$$

b) Condition d'une résonance D

$$\bar{Y}' + 2Y = \frac{K^2 R^2}{3} \cdot (\bar{Y}' + 3Y) + \frac{6\bar{Z}'Y - 2K^2 R^2 Z (\bar{Y}' + 3Y)}{3(\bar{Z}' - 2\eta^2 Z)} \cdot \eta^2$$

où nous posons

$$\bar{Z}' = \left[r \frac{dZ}{dr} \right]_R, \quad \bar{Y}' = \left[r \frac{dY}{dr} \right]_R, \quad \eta^2 = \frac{\lambda^2}{10}.$$

Les tableaux III-IV ont été établis de façon analogue ; on y trouve l'ordre de grandeur des amplitudes des fonctions χ_0 et χ_2 à l'intérieur du noyau, dans les mêmes conditions que celles des tableaux I-II. Pour faciliter l'interprétation de ces tableaux, nous avons dessiné sché-

Les courbes :

..... représentent la fonction χ_2
 ———— représentent la fonction χ_0
 à droite correspondent à une résonance D
 à gauche correspondent à une résonance S

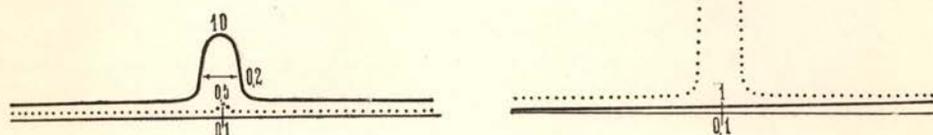


Fig. 1

$$\eta_1 = 0$$

matiquement les courbes (Figs. 1, 2, 3 et 4) qui décrivent la variation des amplitudes des fonctions χ_0 et χ_2 avec les différents valeurs de kR .

Pour la discussion nous avons à distinguer deux cas essentiellement différents, à savoir le cas $(kR)^2 > \eta$ et le cas $(kR)^2 < \eta$. En particulier, le domaine $(kR)^2 \sim \eta$ présentera un intérêt considérable pour nous.

$$1^{\circ} . (kR)^2 < \eta .$$

Ce cas comprend le comportement des particules incidentes extrêmement lentes, telles que les neutrons thermiques. Les tableaux et la figure 2 nous apprennent que le couplage entre le spin et le moment orbital, caractérisé par le paramètre η , doit être considéré, dans ce cas, comme couplage fort. En effet, on se rend facilement compte que les résonances dites S ne sont guère modifiées, tandis que les résonances dites D se trouvent être élargies par le couplage de telle manière qu'elles aussi se comportent comme des résonances S. Nous devons donc nous attendre à ce que des particules lentes, satisfaisant à la condition $(kR)^2 > \eta$, ne donnent lieu qu'à une diffusion S ordinaire, de distribution sphérique.

$$2^{\circ} . (kr)^2 > \eta .$$

Les courbes :

..... représentent la fonction χ_2

— représentent la fonction χ_0

à droite correspondent à une résonance D

à gauche correspondent à une résonance S

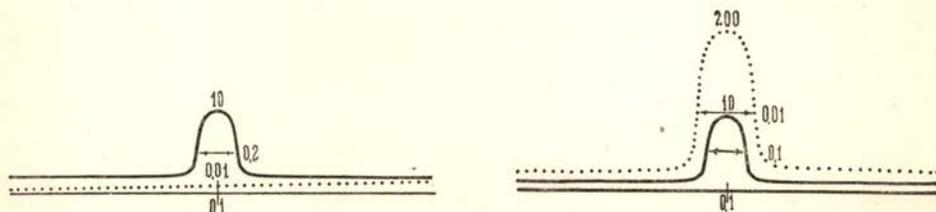


Fig. 2

$$k^2 R^2 < \eta$$

Ce cas se rapporte à des particules incidentes relativement rapides, dont la longueur d'onde peut, toutefois, encore dépasser considérablement les dimensions nucléaires. On se rend facilement compte que dans ce cas, le couplage montre toutes les caractéristiques d'un couplage faible. Nous pouvons même arriver à une description qualitative suffisante si nous négligeons le couplage entièrement ($\eta \rightarrow 0$) et si nous distinguons simplement entre résonances S et D, sans tenir compte de la faible interaction entre elles.

3°. $(kR)^2 \sim \eta$.

Ce domaine limite entre les deux cas 1° et 2°, présente pour nous un intérêt considérable. En effet, il est caractérisé par le fait que le couplage est déjà assez fort pour impliquer une interaction sensible entre les résonances S et D, mais pas encore suffisamment fort pour faire disparaître les différences caractéristiques entre ces deux types

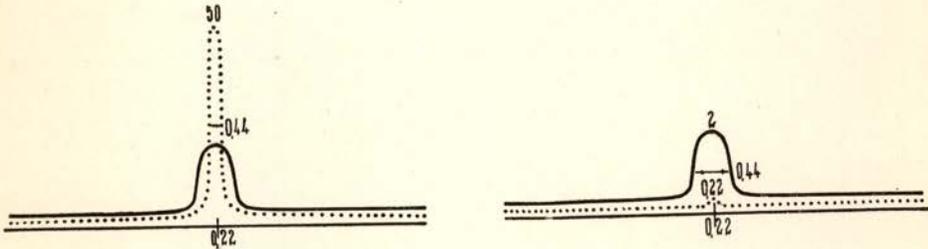


Fig. 3

$$k^2 R^2 \sim \eta$$

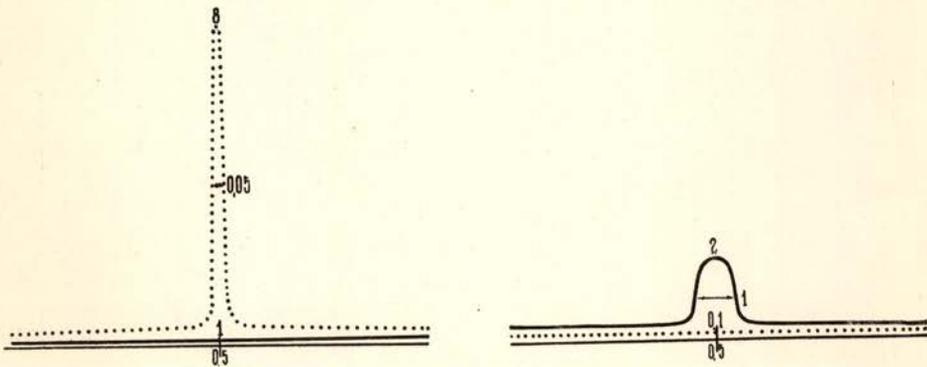


Fig. 4

$$k^2 R^2 > \eta$$

de résonances. Les figures 1 et 3 nous apprennent que dans ce cas, c'est à dire, pour des énergies comprises entre 10^3 et 10^6 eV, les résonances S ne sont pratiquement modifiées par le couplage, tandis qu'une résonance D entraîne, par le couplage, une résonance S du même ordre de grandeur. C'est dans ce cas, donc, que nous devons nous attendre à trouver des conditions de diffusion dans lesquelles plusieurs ondes partielles seront simultanément excitées par une résonance simple (renversement du spin).

TABLEAU I
Hors de résonance

Coefficients \bar{c}_0 et \bar{a}_2 Valeurs de $\gamma_1/(KR)^2$		$c_0 \times (\dots)$	$a_2 \times (\dots)$
$\gamma_1 = 0$	\bar{c}_0	R	O *
	\bar{a}_2	O *	R (KR) ⁴
$(KR)^2 < \gamma_1$	\bar{c}_0	R	$\gamma_1 R (KR)^2$ *
	\bar{a}_2	$\gamma_1 \cdot R (KR)^2$ *	R (KR) ⁴
$(KR)^2 \sim \gamma_1$	\bar{c}_0	R	R (KR) ⁴ *
	\bar{a}_2	R (KR) ⁴ *	R (KR) ⁴
$(KR)^2 > \gamma_1$	\bar{c}_0	R	$\gamma_1 R (KR)^2$ *
	\bar{a}_2	$\gamma_1 R (KR)^2$ *	R (KR) ⁴

TABLEAU II
En résonance

Coefficients \bar{c}_0 et \bar{a}_2 Types de résonance Valeurs de $\gamma_1/(KR)^2$		$c_1 \times (\dots)$	$a_2 \times (\dots)$
$\gamma_1 = 0$	S	\bar{c}_0	λ
		\bar{a}_2	O *
	D	\bar{c}_0	$\lambda (KR)$
		\bar{a}_2	O *

TABLEAU II
(SUITE)

Coefficients \bar{c}_0 et \bar{a}_2 Types de résonance Valeurs de $\eta/(KR)^2$		$c_0 \times (\dots)$	$a_2 \times (\dots)$	
$(KR)^2 < \eta$	S	\bar{c}_0	λ	$\eta \cdot \lambda (KR)^2 *$
		\bar{a}_2	$\eta \lambda (KR)^2 *$	$\lambda \{ (KR)^5 + \eta^2 (KR)^4 \}$
	D	\bar{c}_0	$\frac{\eta^2 - (KR)^5}{\eta^2 + (KR)^4} \cdot \lambda$	$\frac{\eta (KR)^2}{\eta^2 + (KR)^4} \cdot \lambda *$
		\bar{a}_2	$\frac{\eta (KR)^2}{\eta^2 + (KR)^4} \cdot \lambda *$	$\frac{(KR)^4}{\eta^2 + (KR)^4} \cdot \lambda$
$(KR)^2 \sim \eta$	S	\bar{c}_0	λ	$\lambda \cdot (KR)^4 *$
		\bar{a}_2	$\lambda (KR)^4 *$	$\lambda (KR)^5$
	D	\bar{c}_0	$\frac{KR-1}{2} \cdot \lambda$	$\frac{\lambda}{2} *$
		\bar{a}_2	$\frac{\lambda}{2} *$	$\frac{\lambda}{2}$
$(KR)^2 > \eta$	S	\bar{c}_0	λ	$\lambda \eta (KR)^2 *$
		\bar{a}_2	$\eta \lambda (KR)^2 *$	$\lambda (KR)^5$
	D	\bar{c}_0	$\lambda (KR)$	$\frac{\eta}{(KR)^2} \cdot \lambda *$
		\bar{a}_2	$\frac{\eta}{(KR)^2} \cdot \lambda *$	$\frac{\eta^2}{(KR)^4} \cdot \lambda$

NOTE. Les termes marqués d'un * sont dus à des processus de renversement du spin pendant la collision.

TABLEAU III
Hors de résonance

Les fonctions λ_0 et λ_2 Valeurs de $\eta/K^2 R^2$		$c_0 \times (\dots)$	$a_2 \times (\dots)$
$\eta = 0$	Y	0	0
	λ_0 — Z	1	0
	Y	0	$-(KR)^2$
	λ_0 — Z	0	0
$K^2 R^2 < \eta$	Y	η^2	$-\eta \cdot (KR)^2$
	λ_0 — Z	$1 + \eta^2$	$-\eta (KR)^2$
	Y	η	$-(1 + \eta^2) \cdot K^2 R^2$
	λ_0 — Z	η	$-\eta^2 \cdot K^2 R^2$
$K^2 R^2 \sim \eta$	Y	$K^4 R^4$	$-K^4 R^4$
	λ_0 — Z	$1 + K^4 R^4$	$-K^4 R^4$
	Y	$K^2 R^2$	$-(1 + K^4 R^4) \cdot K^2 R^2$
	λ_0 — Z	$K^2 R^2$	$-K^6 R^6$
$K^2 R^2 > \eta$	Y	η^2	$-\eta (KR)^2$
	λ_0 — Z	$1 + \eta^2$	$-\eta (KR)^2$
	Y	η	$-(1 + \eta^2) \cdot K^2 R^2$
	λ_0 — Z	η	$-\eta^2 \cdot K^2 R^2$

TABLEAU IV
En résonance

Les fonctions γ_0 et γ_2 Valeurs de $\eta/K^2 R^2$ Types de résonance		$c_0 \times (\dots)$	$a_2 \times (\dots)$	
$\eta = 0$	S	γ_0 — Y	0	0
		Z	$\frac{1}{KR}$	0
		γ_2 — Y	0	$-K^2 R^2$
		Z	0	0
	D	γ_0 — Y	0	0
		Z	1	0
		γ_2 — Y	0	$\frac{1}{K^3 R^3}$
		Z	0	0
$K^2 R^2 < \eta$	S	γ_0 — Y	$\frac{\eta^2}{KR}$	$\eta \cdot K^2 R^2$
		Z	$(1 + \eta^2) \cdot \frac{1}{KR}$	$-\eta \cdot KR$
		γ_2 — Y	$\eta \cdot \frac{1}{KR}$	$-(1 + \eta^2) \cdot K^2 R^2$
		Z	$\eta \cdot \frac{1}{KR}$	$-\eta^2 \cdot KR$
	D	γ_0 — Y	$\frac{1}{KR}$	$-\frac{KR}{\eta}$
		Z	$1 + \eta^2$	$-\frac{KR}{\eta}$
		γ_2 — Y	$\frac{1}{\eta \cdot KR}$	$-\frac{KR}{\eta^2}$
		Z	η	$-KR$

TABLEAU IV
 (SUITE)

Les fonctions γ_0 et γ_2 Valeurs de $\eta/K^2 R^2$ Types de résonance		$e_0 \times (\dots)$	$a_2 \times (\dots)$	
$K^2 R^2 \sim \eta$	S	γ_0 — Y	$K^3 R^3$	$-K^4 R^4$
		Z	$(1+K^4 R^4) \cdot \frac{1}{KR}$	$-K^3 R^3$
		γ_2 — Y	KR	$-(1+K^4 R^4) \cdot K^2 R^2$
		Z	KR	$-K^5 R^5$
	D	γ_0 — Y	$\frac{1}{2KR}$	$-\frac{1}{2 \cdot KR}$
		Z	$1+K^4 R^4$	$-\frac{1}{2 \cdot KR}$
		γ_2 — Y	$\frac{1}{2K^3 R^3}$	$-\frac{1+K^4 R^4}{2 \cdot R^3 K^3}$
		Z	$K^2 R^2$	$\frac{1 \cdot KR}{2}$
$K^2 R^2 > \eta$	S	γ_0 — Y	$\frac{\eta^2}{KR}$	$\eta \cdot K^2 R^2$
		Z	$(1+\eta^2) \cdot \frac{1}{KR}$	$-\eta \cdot KR$
		γ_2 — Y	$\frac{\eta}{KR}$	$-(1+\eta^2) \cdot K^2 R^2$
		Z	$\frac{\eta}{KR}$	$-\eta^2 \cdot KR$
	D	γ_0 — Y	$\frac{\eta}{(K^4 R^4 + \eta^2) \times KR}$	$\frac{\eta \cdot KR}{(K^4 R^4 + \eta^2)}$
		Z	$1+\eta^2$	$\frac{\eta \cdot KR}{(K^4 R^4 + \eta^2)}$
		γ_2 — Y	$\frac{\eta}{(\eta^2 + K^4 R^4) KR}$	$\frac{(1+\eta^2) \cdot KR}{K^4 R^4 + \eta^2}$
		Z	η	$\frac{\eta^2 \cdot KR}{K^4 R^4 + \eta^2}$

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à M. G. Beck, qui m'a proposé ce sujet et qui m'a toujours aidé de ses conseils et discussions, pour l'intérêt qu'il n'a cessé de porter à ce travail.

LABORATOIRE DE PHYSIQUE
FACULTÉ DES SCIENCES DE COIMBRA

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KELLOG, RABI, RAMSAY et ZACHARIAS. *Physical Review*, **55** (1939) pgs. 318.
- [2] G. BECK et TSIEN. *Cahiers de Physique* 2 série, tome 8 (1942), pgs. 19-21.
- [3] BETHE. *Physical Review*, **55** (1939) pg. 1261.
SCHWINGER. *Physical Review*, **55** (1939), pg. 235.