PORTUGALIAE PHYSICA
Vol. 2—Fasc. 2—1946

LES SCHÉMAS ALÉATOIRES DEVANT LA RELATIVITÉ RESTREINTE

par G. DEDEBANT

(Reçu Septembre 1946)

INTRODUCTION

Sous le titre de «*Mécanique Aléatoire*», nous avons — en collaboration avec Ph. Wehrlé — publié dans cette Revue[1], un exposé, malheureusement trop condensé, du *Calcul Aléatoire* et de ses premiéres applications physiques. Tel quel, sa lecture est pourtant nécessaire à la parfaite compréhension de cette Note. L'appareil mathématique fort modeste, dont nous nous servons, ne doit pas faire mésestimer la valeur et l'importance des idées qui y sont exprimées.

Présentement, il s'agit d'un essai d'application du *point de vue aléatoire* aux Nouvelles Mécaniques. On y trouvera deux schémas aléatoires relativistes: *l'onde aléatoire* (ou fonction aléatoire stationnaire de l'espace-temps) et la *probalité de présence dans l'espace-temps,* linéarisés — pour simplifier leur traitement mathématique — respectivement sous forme de *paquet d'ondes* et de *paquet d'événements,* qui nous semblent offrir un pouvoir d'explication étendu (notion statistique d'onde et de corpuscule; formule de L. de Broglie; champ électromagnétique, théorie de la Lumiére; constituants élémentaires de la Matiére). Notre espoir est que l'intérêt de Physiciens et de Mathématiciens, plus compétents que nous même, soit suffisamment éveillé pour que, passant sur les imperfections de forme, ils se rendent compte des possibilités énormes de la voie que nous avons entrevue.

Les circonstances veulent que j'ai réalisé ce travail seul, mais je me rends bien compte que je n'y serais pas parvenu sans les échanges suivis d'idées que j'ai eus pendant des années avec Ph. Wehrlé, dont le concours m'a cette fois, beaucoup manqué.

Je dois à l'Instituto para a Alta Cultura de m'avoir procuré, en

[1] Portugaliae Physica. 1944-45.

m'invitant à venir exposer mes idées à la Faculté des Sciences de Pôrto, l'ambiance nécessaire pour les mettre au point et je remercie en bloc les Professeurs avec qui j'ai eu des échanges de vue très profitables.

Je remercie enfin «Portugaliae Physica» de m'accorder encore une fois l'hospitalité.

I. L'Onde Aléatoire

1. Qu'est-ce que l'onde aléatoire? La Théorie des Fonctions aléatoires montre que la fonction aléatoire analytique stationnaire la plus générale de deux paramétres certains x et t, a un coefficient de corrélation de la forme:

$$r(\tau\,,\,k) = \cos\overline{(\Omega\tau - Mk)} \tag{1}$$

τ et k désignent les différences: $(t_2 - t_1)$ et $(x_2 - x_1)$. Ω et M sont deux nombres aléatoires quelconques, définis par la loi de probabilité conjuguée:

$$(\omega\,,\,\mu)\,,$$

ω et μ étant les valeurs courantes de Ω et de M.

Le signe «*trait*» ($\overline{\ \ }$) est la moyenne prise avec cette loi de probabilité.

Nous rappelons que cette forme (1) du coefficient de corrélation est une conséquence immédiate des «*conditions de cohérence*» — ou conditions que doivent remplir les coefficients de corrélation de nombres aléatoires associés par couples.

Au point de vue statistique, deux fonctions aléatoires sont équivalentes, lorsqu'elles ont le même coeficient de corrélation, bien que leurs réalisations sur des épreuves individuelles puissent être très différentes.

Or, on peut réaliser le coefficient de corrélation (1) au moyen de la fonction aléatoire ψ, définie sur une épreuve de la maniére suivante:

$$\psi = A\cos(\Omega t - Mx + \Phi)\,,$$

où A et Φ sont deux nouveaux nombres aléatoires, indépendants de Ω et de M; Φ est un angle aléatoire, compris entre 0 et 2π, et de distribution *uniforme*.

Cette réalisation particuliére explique le succès de *l'onde* en Physique Théorique, malgré sa naïveté (optique ondulatoire de Fresnel, acoustique, électromagnétisme, etc.). Elle justifie le nom «*d'Onde aléatoire*» que nous donnons à la fonction aléatoire analytique stationnaire la plus générale, de deux paramétres certains.

On peut se représenter une onde aléatoire comme un *ensemble* d'ondes élémentaires, ayant pour caractéristiques $\Omega\,,M$, des nombres aléatoires dont les dispersions (statistiques) et la corrélation sont définies par une certaine loi de probabilité conjuguée : (ω, μ).

La différence de notre conception avec celle d'une *série de Fourier* réside en ceci : que, dans la série de Fourier, il y a l'idée de superposition *par addition* des différents termes (ou composantes), tandis que dans l'onde aléatoire, il y a seulement l'idée de considérer *à la fois* les diverses composantes, sans préjuger de la maniére dont on peut les combiner. Notre conception n'est pas, au fond, distincte de celle de *matrice*.

2. Qu'est-ce qu'un paquet d'ondes? L'onde aléatoire devient un «*paquet d'ondes*» lorsque les nombres aléatoires Ω et M sont *peu dispersés*. C'est une maniére de «*linéariser*» en quelque sorte le probléme, en le réduisant à son squelette, sans cependant abandonner aucune idée essentielle ; cela va permettre des calculs tout à fait élémentaires. On montre qu'alors Ω' et M' (parties purement aléatoires de Ω et de M) suivent une loi de *Gauss-Bravais*. La loi (ω, μ) est donc décrite par les moments statistiques suivants :

$$\omega_0=\overline{\Omega}, \ \mu_0=\overline{M}, \ P=\overline{M'^2}, \ Q=\overline{\Omega' M'}, \ R=\overline{M'^2}.$$

Un calcul facile montre que le coefficient de corrélation d'un paquet d'ondes se laisse mettre sous la forme :

$$r(\tau, k)=\cos(\omega_0\tau-\mu_0 k)\exp\left[-\frac{1}{2}\varphi(\tau, k)\right],$$

où $\varphi(\tau, k)$ est la forme quadratique définie positive :

$$\varphi(\tau, k)=Pk^2-2Qk\tau+R\tau^2.$$

Faisons remarquer que la vitesse moyenne des ondes du paquet : $\dfrac{\omega_0}{\mu_0}$, peut être supérieure à celle de la lumiére sans que que r cesse d'être «cohérent».

3. Effet de la transformation de Lorentz sur le paquet d'ondes. Soit $S(0)$ — ou simplement S — et $S(\beta)$ — ou simplement S' — deux systèmes de référence dont la vitesse relative est βc.

Ecrivons la tranformation de Lorentz :

$$\begin{cases} x=\dfrac{x'+\beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t=\dfrac{t'+\beta/c\, x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad \beta^2<1.$$

Les différences $k=x_2-x_1$ et $\tau=t_2-t_1$, se transforment selon les mêmes formules :

$$k=\frac{k'+\beta c\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \tau=\frac{\tau'+\beta/c\, k'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Dans le système $S(\beta)$, le coefficient de corrélation est de la forme :

$$r_1(\tau', k')=\cos\left[\omega_0(\beta)\tau'-\mu_0(\beta)k'\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\varphi_1(\tau', k')\right],$$

avec :

$$\varphi_1(\tau', k')=R(\beta)\tau'^2-2\,Q(\beta)\tau' k'+P(\beta)k'^2.$$

Nous *poserons* que $r_1(\tau', k')$ est identique à ce que devient $r(\tau, k)$ quand on *y* remplace τ et k en fonction de τ', k' — ce qui revient à dire que le coefficient de corrélation est un *invariant physique*.

L'identification nous donne alors les formules selon lesquelles se transforment les caractéristiques statistiques du paquet d'ondes :

$$\mathcal{T}_1(\beta)\begin{cases} \mu(\beta)=\varepsilon\dfrac{\mu_0-\beta/c\,\omega_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \omega(\beta)=\varepsilon\dfrac{\omega_0-\beta c\,\mu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ P(\beta)=\dfrac{1}{1-\beta^2}(P-2\beta/c\,Q+\beta^2/c^2\,R) \\ Q(\beta)=\dfrac{1}{1-\beta^2}[-\beta c\,P+(1+\beta^2)\,Q-\beta/c\,R] \\ R(\beta)=\dfrac{1}{1-\beta^2}(c^2\beta^2\,P-2c\beta Q+R) \end{cases} \qquad \varepsilon=\pm 1$$

Les transformations $\mathcal{T}_1(\beta)$ forment un groupe. Elles laissent invariante la loi de probabilité conjugueé (ω, μ) qui définit la structure du paquet d'ondes :

$$\frac{(d\omega\, d\mu)}{2\pi\sqrt{\Delta}}\exp\left[-\frac{1}{2\Delta}(R\mu^2-2Q\,\mu\omega+P\omega^2)\right]; \; (\Delta=PR-Q^2).$$

En effet :

1°) ω_0 se transforme comme k, et μ_0 comme τ. Il en est de même des *valeurs courantes* ω et μ, car les valeurs probables ω_0 et μ_0 sont susceptibles, en faisant varier la loi de distribution — de prendre n'importe laquelle des valeurs courantes.

Or, puisque nons avons posé que la forme quadratique:

$$\varphi(\tau, k) = Pk^2 - 2Qk\tau + R\tau^2$$

était un invariant, il en est de même aussi de la forme:

$$\varphi(\mu, \omega) = P\omega^2 - 2Q\omega\mu + R\mu^2,$$

qui est l'argument de la loi de Gauss.

2°) $\Delta = PR - Q^2$, discriminant de la forme quadratique, est aussi un invariant.

3°) Enfin: $$d\omega' d\mu' = d\omega \, d\mu.$$

Remarque. Le résultat précédent est vrai d'une maniére générale, sans linéariser l'onde aléatoire sous forme de paquet. En effet:

$$C(\tau, k) = \overline{e^{i(\Omega\tau - Mk)}}$$

désignant la fonction caractéristique de la loi (ω, μ), on a:

$$r(\tau, k) = \overline{\cos(\Omega\tau - Mk)} = \frac{C(\tau, k) + C^*(\tau, k)}{2}.$$

Si donc, l'on assure l'invariance de $r(\tau, k)$, on assure ipso-facto l'invariance de la fonction caractéristique, donc de la loi (ω, μ).

4. Equivalence du changement du système de reférence avec un certain mode d'observation dans le système primitif. Soit des observateurs placés dans le système $S(\beta)$, qui étudient *en un point* $(k' = 0)$ la corrélation en fonction de l'intervalle de temps propre τ', de ce système (connexion «*locale*» [1]).

Soit d'autre part, des observateurs placés dans le système S, qui étudient la corrélation entre deux points variables x_1, et x_2 de S, à des instants t_1, et t_2, tels que:

$$k/\tau = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \beta c.$$

Le résultat des mesures sera:

a) pour les observateurs de $S(\beta)$, un coefficient de corrélation,

[1] Selon la terminologie que nous avons introduite en Mécanique Aléatoire.

fonction de l'intervalle de temps propre τ', et donné pour la formule:

$$\cos\left[\omega_0(\beta)\,\tau'\right]\exp\left[-\frac{1}{2}R(\beta)\tau'^2\right],$$

obtenue en faisant $k'=0$ dans l'expression générale de $r_1\tau', k')$.

b) pour les observateurs de S, un coefficient de corrélation, fonction de l'intervalle de temps propre τ, et donné par la formule:

$$\cos(\omega_0-\mu_0\beta c)\,\tau\exp\left[-\frac{1}{2}(Pc^2\beta^2-2Qc\beta+R)\,\tau\right],$$

obtenue en faisant $k=\beta c\tau$, dans l'expression générale de $r(\tau, k)$.

Comme:

$$\tau=\frac{\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

il résulte des formules de transformation $\mathfrak{T}_1(\beta)$, que les corrélations obtenues par les observateurs de $S(\beta)$ et par ceux de S sont *identiques*.

Cela tient visiblement à ce que nous avons posé que le coefficient de corrélation est un invariant physique.

Ainsi, un certain mode d'observation dans le système S, *équivaut* à la mesure de la connexion locale dans le système $S(\beta)$, ou encore à la mesure de la «*connexion physique*»[1] d'un «*corpuscule*» ayant par rapport à S la vitesse βc.

Pareillement, soit des observateurs du système $S(\beta)$, qui étudient la la corrélation à un *instant donné* ($\tau'=0$) entre les différents points de ce système («*connexion géométrique*»), et soit d'autre part, des observateurs de S, qui étudient la corrélation entre des points x_1 et x_2, et des instants t_1 et t_2, tels que:

$$k/\tau=\frac{c}{\beta}.$$

Ces deux groupes d'observateurs obtiennent le même coefficient de corrélation.

Il y a donc *équivalence* entre un certain mode d'observation dans S et la mesure de la connexion géométrique dans un système $S(\beta)$, ou

[1] Par connexion physique, nous entendons: connexion en accompagnant le corpuscule (Voir Mécanique Aléatoire).

encore de la connexion d'une «*onde stationnaire*» dans le système $S(\beta)$, onde qui est progressive de vitesse c/β, dans le système S.

Allons plus loin: nous devrions pouvoir dire aussi que ce dernier mode d'observation équivaut à la mesure de la connexion locale dans un système $S(1/\beta)$, de vitesse c/β, si la transformation de Lorentz n'interdisait pas de considérer des systèmes de référence en mouvement plus rapide que la lumière.

5. Les systèmes de référence de vitesse supérieure à c. Pourtant, la considération de tels systèmes a un sens physique parfaitement défini, car elle équivaut à des opérations physiques, matériellement réalisables dans S.

Insistons un peu plus sur ce point — bien qu'il ne cache aucun mystère — parce qu'il semble heurter l'idée que l'on se fait habituellement de la Théorie de la Relativité restreinte.

Soit deux points x_1 et x_2, appartenant à un même système de référence matériel (disons: la Terre). Dans ce système existe un *temps propre* (les horloges de tous les points pouvant être synchronisées au moyen de signaux lumineux). Or, rien n'empêche l'observateur (x_2) de transmettre *rétrospectivement*, par une voie quelconque (disons: la poste ordinaire), les observations qu'il a faites en x_2, en fonction du temps propre du système, à l'observateur (x_1) qui pourra à loisir, les confronter avec les siennes — faites en fonction du même temps propre.

Le coefficient de corrélation:

$$r(x_2 - x_1, t_2 - t_1)$$

pourra être calculé pour *toutes* les valeurs de $k = x_2 - x_1$, et de $\tau = t_2 - t_1$, *alors même que* $k/\tau > c$, *alors même que* $k/\tau = \infty$.

Et s'il est vrai qu'en ce cas, les corrélations ne traduisent plus un *lien de causalité*, il n'en est pas moins sûr qu'elles existent — comme il existe, de par le synchronisme des mouvements, des corrélations entre les vitesses verticales des ondes d'une houle *établie*, même à des distances considérables.

Or, la méthode expérimentale qui vient d'être décrite revient, *formellement*, à se placer dans un système de référence de vitesse $\beta > 1$. Le résultat des expériences doit pouvoir s'exprimer dans un tel système. Et pourtant, pour $\beta > 1$, la transformation de Lorentz donne un coefficient de corrélation *incohérent*, parce que supérieur à l'unité — le cosinus devenant un cosinus hyperbolique et l'exponentielle négative, une exponentielle positive. Il y a donc lieu de rechercher un *prolongement* de la transformation de Lorentz (pour $\beta > 1$), qui donne un coefficient de corrélation théorique *cohérent,* susceptible de représenter le coefficient de corrélation expérimental, pour des observations faites dans le système S, au cas où : $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} > c$.

6. La transformation de Lorentz étendue. Effectuons un changement d'axes quelconque :

$$\begin{cases} x = a_{11} x' + a_{14} t' \\ t = a_{41} x' + a_{44} t' . \end{cases}$$

Pour que ces axes puissent constituer un système de référence physiquement admissible, doivent être satisfaits les deux principes de base de la Relativité restreinte, à savoir :

a) le principe de l'invariance de la vitesse de la lumière.

b) le principe de Relativité, selon lequel il est impossible de distinguer celui des systèmes S ou S' qui est en mouvement et quel est celui qui est au repos.

Le premier principe entraîne :

$$x'^2 - c^2 t'^2 = \varkappa (x^2 - c^2 t^2),$$

$\varkappa$ étant un constante.

Cela réduit les changements de coordonnées admissibles à la forme :

$$x = \frac{1}{\alpha}(x' + \beta c t'); \quad t = \frac{1}{\alpha}\left(t' + \frac{\beta}{c} x'\right),$$

α et β, étant deux paramétres *arbitraires*.

Le second principe s'applique, classiquement, de la maniére suivante : Résolvons les formules de transformation par rapport à x' et t', soit :

$$x' = \frac{\alpha}{1 - \beta^2}(x - \beta c t); \quad t' = \frac{\alpha}{1 - \beta^2}\left(t - \frac{\beta}{c} x\right).$$

Cette transformation inverse doit être la même que celle que l'on obtient en changeant β en $-\beta$. Il faut donc que :

$$\frac{\alpha}{1 - \beta^2} = \frac{1}{\alpha},$$

d'où :

$$\alpha = \pm\sqrt{1 - \beta_2}.$$

On trouve la transformation de Lorentz en choisissant la détermination positive du radical. Cette transformation entraîne : $\beta<1$, et toutes les conséquences qu'on a tirées de là.

Avec le point de vue aléatoire, le principe de Relativité peut s'entendre d'une manière moins stricte. Comme l'expérience n'atteint que des corrélations, il suffit que la transformation inverse donne le même coefficient de corrélation que le changement de β en $-\beta$, ou encore donne le même :

$$\cos(\omega\tau-\mu k).$$

Or, pour cela, il suffit que la transformation inverse reproduise *au signe près* l'argument $(\omega\tau-\mu k)$ que donne le changement de β en $-\beta$.

Il suffit cette fois que :

$$\frac{\alpha}{1-\beta^2}=\pm\frac{1}{\alpha},$$

ce qui donne :

$$\alpha=\varepsilon\sqrt{|1-\beta^2|}\,;\quad \varepsilon=\pm 1.$$

d'où :

$$(\mathcal{L})\qquad x=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{|1-\beta^2|}}(x'+\beta c\,t')\,;\quad t=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{|1-\beta^2|}}(t'+\beta/c\,x').$$

Telle est la transformation de Lorentz «*étendue*».

Remarque. La transformation :

$$x=-x'\,;\quad t=-t'\,;$$

est en somme considérée ici comme non distincte de la transformation identique. Elle laisse en effet le coefficient de corrélation formellement identique à lui-même, et c'est tout ce qui importe.

7. Propriétés de la transformation de Lorentz étendue. Convenons de considérer la transformation :

$$x=\varepsilon x'\,;\quad t=\varepsilon t'\ (\varepsilon=\pm 1),$$

comme la transformation identique. Alors, les tranformations $(\mathcal{L})$ *forment un groupe*.

a) L'inverse d'une transformation s'obtient en remplaçant β par $-\beta$.

b) Le produit de deux transformation s'obtient en composant les vitesse β et β' selon la règle :

$$\beta''=\frac{\beta+\beta'}{1+\beta\beta'},$$

la même que dans la transformation de Lorentz. Mas l'on peut obtenir maintenant des vitesses supérieures à 1; il demeure cependant que 1, composé avec n'importe quelle vitesse, donne toujours 1.

Le groupe $(\mathcal{L})$ est caractérisé non plus par l'invariance de: $(c^2 t^2 - x^2)$, mais par celle de $|c^2 t^2 - x^2|$. C'est un groupe abélien dont le groupe de Lorentz $(\mathcal{L}_1)$ est un *sous-groupe,* mais les transformations de l'ensemble $(\mathcal{L}_2)$ qui correspond à $\beta^2 > 1$, *ne forment pas un sous-groupe.*

En effet:

a) si β et $\beta' < 1$, $\beta'' = \dfrac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} < 1$; [$(\mathcal{L}_1)$ est un sous-groupe].

b) si $1/\beta$ et $1/\beta' > 1$, $\beta'' = \dfrac{1/\beta + 1/\beta'}{1 + 1/\beta\beta'} = \dfrac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} < 1$;

[le produit de deux transformations de $(\mathcal{L}_2)$ appartient à $(\mathcal{L}_1)$].

c) si $\beta < 1$ et $\dfrac{1}{\beta'} > 1$, $\beta'' = \dfrac{\beta + 1/\beta'}{1 + \beta/\beta'} = \dfrac{1 + \beta\beta'}{\beta + \beta'} > 1$;

[le produit d'une transformation de $(\mathcal{L}_1)$ par une transformation de $(\mathcal{L}_2)$ donne une transformation de $(\mathcal{L}_2)$].

On peut établir l'isomorphisme suivant entre le groupe de Lorentz étendu et le groupe multiplicatif des nombres réels des deux signes (a=nombre réel):

$$\begin{cases} (\beta)(\beta') \rightleftarrows a\,a' \\ (\beta^{-1}) = (-\beta) \rightleftarrows \dfrac{1}{a} \cdot \end{cases}$$

Dans cet isomorphisme:

a) $(\mathcal{L}_1)$ correspond au sous-groupe des nombres positifs.

b) $(\mathcal{L}_2)$ correspond à l'ensemble des nombres négatifs.

c) $\beta = 1$ (vitesse de la lumiére) est l'homologue du nombre *zéro,* car:

$$(\beta)(1) = (1) \text{ et } a.\ 0 = 0$$

d) $\beta = 0$ (transformation identique) est l'homologue du nombre *un,* car:

$$(\beta)(0) = (\beta) \text{ et } a\,.\ 1 = a\,.$$

e) changer β en $1/\beta$ revient à changer le signe d'un nombre:

$$\beta \to 1/\beta \text{ correspond à: } a \to (-a)$$

La considération de vitesses ultralumineuses apparaît donc comme une conception du même ordre que celle des nombres négatifs.

Mais l'on peut présenter d'une manière encore plus saisissante le sens de l'extension de la transformation de Lorentz.

On sait que le groupe de Lorentz est isomorphe au groupe des *rotations* dans l'espace-temps. Son extension consiste à adjoindre les *symétries* aux rotations. Le groupe étendu ($\mathcal{L}$) est isomorphe au groupe, formé par les rotations et les symétries. Comme lui, il est constitue par deux familles continues distinctes, dont l'une seulement est un sous-groupe. En somme, nous n'avons fait que douer l'espace-temps d'une *orientation*. La transformation qui consiste à changer β en $1/\beta$ change une figure en nne figure égale, mais d'orientation inverse.

Cette transformation est définie par les équations :

$$\begin{cases} x(1/\beta) = \varepsilon\, c\, t(\beta) \\ t(1/\beta) = \varepsilon/c\, x(\beta)\,. \end{cases}$$

Elle permute le temps et l'espace ; son jacobien est :

$$\begin{vmatrix} 0 & \varepsilon c \\ \varepsilon/c & 0 \end{vmatrix} = -1\,.$$

Nous verrons plus loin que c'est dans l'orientation de l'espace-temps que réside l'explication profonde de la dualité onde/corpuscule, comme aussi de la dualité électricité/magnétisme ; et si nous osons risquer une hypothèse aventurée, on peut peut-être y voir une représentation des domaines extra et intra-nucléaires.

8. La dualité onde/corpuscule. Nous désignerons par $\mathcal{T}(\beta)$ les transformations des caractéristiques du paquet d'ondes résultant de la transformation de Lorentz étendue, soit :

$$\mathcal{T}(\beta) \begin{cases} \mu_0(\beta) = \varepsilon \dfrac{\mu_0 - \beta/c\, \omega_0}{\sqrt{|1-\beta^2|}} \\[2ex] \omega_0(\beta) = \varepsilon \dfrac{\omega_0 - \beta\, c\, \mu_0}{\sqrt{|1-\beta^2|}} \\[2ex] P(\beta) = \dfrac{1}{|1-\beta^2|}(P - 2\,\beta/c\, Q + \beta^2/c^2\, R) \\[2ex] Q(\beta) = \dfrac{1}{|1-\beta^2|}[-\beta\, c\, P + (1+\beta^2)\, Q - \beta/c\, R] \\[2ex] R(\beta) = \dfrac{1}{|1-\beta^2|}(c^2\, \beta^2\, P - 2\, c\, \beta\, Q + R)\,. \end{cases}$$

Occupons nous d'abord de l'aspect moyen du paquet d'ondes, autre ment dit de son onde de phase. Les deux premiéres formules de $\mathfrak{T}(\beta)$ nous suffiront pour cela; nous compléterons ensuite les résultats en faisant intervenir la structure du paquet d'ondes.

Désignons par :

$$c\,\gamma = \frac{\omega_0}{\mu_0},$$

la vitesse moyenne de propagation des ondes qui composent le paquet (ou vitesse de l'onde de phase). Cette vitesse peut être absolûment quelconque et même supérieure à c, sans que le coefficient de corrélation $r(t, k)$ cesse d'être cohérent.

Les deux premiéres formules de $\mathfrak{T}(\beta)$ s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \mu_0(\beta) = \varepsilon\,\mu_0 \dfrac{1-\beta\gamma}{\sqrt{|1-\beta^2|}} \\ \omega_0(\beta) = \varepsilon\,\omega_0 \dfrac{1-\beta/\gamma}{\sqrt{|1-\beta^2|}} \end{cases}$$

a) *Cas des ondes lumineuses.* Faisons d'abord :

$$\gamma = c,$$

c'est à dire supposons que l'onde de phase soit une onde *lumineuse* (nous verrons plus tard que le paquet se réduit alors nécessairement à une *seule* onde).

On retrouve en ce cas, les formules de *Döppler :*

$$\begin{cases} \mu_0(\beta) = \varepsilon\,\mu_0 \sqrt{\left|\dfrac{1-\beta}{1+\beta}\right|} \\ \omega_0(\beta) = \varepsilon\,\omega_0 \sqrt{\left|\dfrac{1-\beta}{1+\beta}\right|} . \end{cases}$$

La vitesse de propagation de l'onde de phase :

$$\frac{\omega_0(\beta)}{\mu_0(\beta)} = \frac{\omega_0}{\mu_0} = c ,$$

ne dépend pas du système de référence; cela veut dire qu'une onde lumineuse apparait toujours comme une onde lumineuse, dans tous les systèmes de référence; ce n'est évidemment pas autre chose qu'une conséquence du principe posé de l'invariance de la vitesse de la lumière.

b *Cas d'ondes de vitesse différente de* c. Envisageons, en général, le cas d'un paquet d'ondes, composé par des ondes élémentaires dont la vitesse moyenne de propagation γ est différente de 1.

On voit alors que:

1°) Dans le système $S(\beta)$, tel que:

$$\beta = 1/\gamma,$$

le paquet aparait *en moyenne* — c'est à dire au point de vue de l'onde de phase — comme un *corps solide en vibration* (longueur d'onde infinie: $\mu_0(1/\gamma)=0$).

2°) Et, dans le système $S(\beta)$, tel que $\beta=\gamma$, il apparait comme une *onde stationnaire* (fréquence nulle: $\omega_0(\gamma)=0$).

Les lois de transformation de ω_0 pour l'un des systèmes, de μ_0 pour l'autre, sont:

$$\begin{cases} \omega_0(1/\gamma) = \omega_0\sqrt{\left|1-\dfrac{1}{\gamma^2}\right|} = \dfrac{\omega_0}{\gamma}\sqrt{|1-\gamma^2|} \\ \mu_0(\gamma) = \mu_0\sqrt{|1-\gamma^2|} \end{cases}$$

La premiére est la formule selon laquelle se transforme la fréquence, d'aprés *L. de Broglie*. La seconde est, en quelque sorte la «duale» de la premiére.

Il existe donc deux systèmes de référence privilégiés $S(\gamma)$ et $S(1/\gamma)$ dans lesquels un paquet d'ondes, de vitesse de phase γ, revêt en moyenne:

1°) l'aspect d'un «*oscillateur*», c'est à dire d'un solide animé d'une vibration d'ensemble.

2°) l'aspect d'une «*onde stationnaire*», c'est à dire d'un phénoméne périodique dans l'espace et permanent.

9. La formule de Louis de Broglie. Entre la pulsation $\omega_0(1/\gamma)$ du corpuscule et le $\mu_0(\gamma)$ de l'onde stationnaire, on a la relation:

$$\frac{\omega_0(1/\gamma)}{\mu_0(\gamma)} = \frac{\omega_0}{\mu_0}\frac{1}{\gamma} = c\,.$$

Il y a une sorte de «*dédoublement*» de la formule $\dfrac{\omega_0(1)}{\mu_0(1)} = c$ des ondes lumineuses. Pour trouver la vitesse de la lumière, il faut prendre la fréquence du corpuscule et la longueur d'onde de l'onde associée.

La longueur d'onde associée est:

$$\lambda_0(\gamma) = \frac{2\pi}{\mu_0(\gamma)} = \frac{c}{\nu_0(1/\gamma)},$$

$\nu_0(1/\gamma)$ étant la fréquence du corpuscule. Admettons maintenant que *la loi de Planck s'applique à l'oscillateur du système* $S(1/\gamma)$. On a, $m(1/\gamma)$ désignant la masse propre (ou masse au repos) de ce corpuscule:

$$m(1/\gamma)\,c^2 = h\nu_0(1/\gamma).$$

Et il vient pour la longueur d'onde associée:

$$\lambda_0(\gamma) = \frac{h}{m(1/\gamma)\,c}.$$

Cela c'est la longueur d'onde de l'onde stationnaire du système $S(\gamma)$. Dans le système S cette onde apparait comme une onde progressive (de vitesse γ) de longueur d'onde.

$$\lambda_0(0) = \lambda_0(\gamma)\sqrt{|1-\gamma^2|}$$

(inverse de la formule de transformation des μ).

D'autre part:

$$m(0) = \frac{m(1/\gamma)}{\sqrt{|1-1/\gamma^2|}} = \frac{\gamma m(1/\gamma)}{\sqrt{|1-\gamma^2|}}.$$

D'où enfin:

$$\lambda_0(0) = \frac{h}{m(0)\,c/\gamma} = \frac{h}{m(0)\,v(0)} = \frac{h}{p(0)},$$

— $p(0)$ désignant la quantité de mouvement du corpuscule dans le système $S(0)$ de l'observateur. — *C'est précisément la formule de L. de Broglie.*

Remarque. La loi de Planck, écrite pour le corpuscule, dans le système $S\,(1/\gamma)$, qui accompagne le corpuscule:

$$m(1/\gamma)\,c^2 = h\,\nu_0(1/\gamma),$$

se transforme dans le système $S(0)$ de l'observateur, en:

$$m(0)\,c^2 = h\,\nu_0(0).$$

Elle est donc *invariante* par rapport à un changement du système de référence, puisque $S(0)$ est, par rapport au système $S(1/\gamma)$ du corpuscule, un système de référence *quelconque*.

10. Infra et ultra corpuscule; Ultra et infraonde. Il est remarquable que tout ce que nous venons de dire est *vrai aussi bien pour* $\gamma^2<1$ *que pour* $\gamma^2>1$. Et il n'y a aucune raison — une fois étendue la transfor mation de Lorentz — de *rompre la symétrie entre ces deux cas.*

Nous pouvons dire:

a) qu'un paquet d'ondes *ultralumineuses* ($\gamma^2>1$) équivaut à:

$$\begin{cases} \text{un } \textit{infracorpuscule} \text{ de vitesse } 1/\gamma<1\,. \\ \text{une } \textit{ultraonde} \text{ (ou onde de L. de Broglie), de vitesse } \gamma>1\,. \end{cases}$$

Cella suffit à rendre compte de l'onde associée au corpuscule, au sens de L. de Broglie.

b) qu'un paquet d'ondes *infralumineuses* ($\gamma^2<1$) équivaut à:

$$\begin{cases} \text{un } \textit{ultracorpuscule} \text{ de vitesse } 1/\gamma>1\,. \\ \text{une } \textit{infraonde} \text{ de vitesse } \gamma<1\,. \end{cases}$$

Et ceci constitue *une hypothèse nouvelle:* Dans la mesure où il existe des corpuscules (dits «réels») de vitesse $1/\gamma<1$, il existe des *ondes de L. de Broglie,* de vitesse $\gamma>1$.

Il est tentant d'avancer que, réciproquement, et pour une raison identique, dans la mesure ou il existe des ondes (dites «réelles») de vitesse $\gamma>1$, il existe aussi des *ultracorpuscules* de vitesse $1/\gamma>1$. Or, nous connaissons des ondes physiques infralumineuses; ce sont entre autres: les ondes lumineuses dans les milieux réfringents, les ondes hertziennes dans une milieu ionisé.

Nous ne voyons donc aucune raison d'admettre d'une part «l'existence» des ondes de *L. de Broglie* et de nier d'autre part celle des ultracorpuscules.

11. Définition plus précise des corpuscules et des ondes. Nous n'avons pas, jusqu'à présent, fait intervenir les caractéristiques P, Q, R du paquet. Si on les prend en considération, on voit qu'en général, le corpuscule ($1/\gamma$) n'est pas tout à fait un corps solide en vibration, ni l'onde (γ) tout à fait une onde stationnaire parfaite.

Cherchons les conditions pour que le corpuscule et l'onde soient «parfaits», malgré la dispersion du paquet d'ondes. Il faut, pour le corpuscule que r ne dépende pas de k'' et pour l'onde, que r ne dépende pas de τ'. Et cela donne:

$$\begin{cases} 1^\circ) \quad P(1/\gamma)=0 \quad Q(1/\gamma)=0 \\ 2^\circ) \quad R(\gamma)=0 \quad\;\; Q(\gamma)=0 \end{cases}$$

Or, les racines de l'équation :

$$Q(\beta)=0,$$

sont déjà bien inverses l'une de l'autre ; ce sont:

$$\left.\begin{matrix} 1/\gamma \\ \gamma \end{matrix}\right\} = \frac{R/c+Pc\pm\sqrt{(R/c-Pc)^2+4\,(PR-Q^2)}}{2\,Q}.$$

Ensuite, $PR-Q^2$ étant un invariant, si $Q(\beta)=0$ et que, soit $P(\beta)$ soit $R(\beta)$ est nul, il faut que :

$$PR-Q^2=0.$$

Et cela veut dire que le coefficient de corrélation entre Ω et M est égal à ± 1, donc que Ω est une fonction *certaine* de M: $\Omega=f(M)$, en d'autres termes : que la dispersion optique du paquet est certaine (indice de réfraction fonction de la fréquence).

$1/\gamma$ et γ sont alors égaux à :

$$\frac{1}{c}\sqrt{\frac{R}{P}} \text{ et } c\sqrt{\frac{P}{R}}.$$

Et l'on constate que $R(1/\gamma)$ et $P(\gamma)$ sont nuls aussi.

Finalement, les coefficients de corrélation dans les systèmes $(1/\gamma)$ et (γ) se réduisent à :

$$\begin{cases} r(1/\gamma)=\cos[\omega_0(1/\gamma)\tau'] \\ r(\gamma)=\cos[\mu_0(\gamma)k''] \end{cases}$$

On obtient donc bien un oscillateur et une onde stationnaire parfaits, malgré que la fréquence des ondes constituant le paquet reste aléatoire. Evidemment, ce n'est qu'à cet oscillateur parfait qu'on peut appliquer en toute rigueur la loi de Planck, comme nous l'avons fait pour établir la formule de L. de Broglie.

On notera que la condition d'avoir un oscillateur et une onde parfaits, fixe la vitesse moyenne γ, de propagation des composantes du paquet en fonction de ses caractéristiques P, Q, R. En d'autres termes, parmi tous les paquets d'ondes ayant une structure déterminée (P, Q, R) et toutes les vitesses β possibles, se manifestent seulement ceux de vitesses γ et $1/\gamma$, parce que ce sont les seuls qui contiennent des êtres *doués d'individualité permanente*. Les autres sont rapidement *éclipsés* devant eux, vu l'amortissement de leur coefficient de corrélation.

Lorsque: $R/c=Pc$, le paquet se réduit à une onde lumineuse.

12. Corpuscules imparfaits. Les corpuscules parfaits sont doués d'une *individualité permanente :* leur coefficient de corrélation ne s'amortit pas. Ils sont donc propes à représenter les constituants stables des édifices atomiques. Mais la Physique connait des corpuscules imparfaits dont l'individualité n'est qu'éphémére. Pour en rendre compte, il faut cesser de supposer que :

$$\Delta = PR - Q^2 = 0 .$$

Lorsque $\Delta \neq 0$, nous pouvons encore déterminer une vitesse de phase γ du paquet, qui réalise à la fois le *meilleur* corpuscule et la *meilleure* onde. Et parmi tous les paquets définis par des caractéristiques P, Q, R données, ce sont seulement ceux constitués par des ondes de vitesse moyenne γ (ou $1/\gamma$) que revêtent l'aspect d'un corpuscule ou d'une onde, en ce sens que les coefficients de corrélation des autres s'amortissant infiniment plus vite, *ils ne se manifestent pratiquement pas en présence des premiers.*

Nous allons faire l'étude de :

$$P(\beta),\ Q(\beta),\ R(\beta),$$

en fonction de β.

Nous remarquerons que :

$$P(\beta) = 1/c^2\, R(1/\beta),$$

ce qui nous dispensera d'étudier $P(\beta)$.

Etudions $R(\beta)$.

La courbe représentative admet les asymptotes :

$$\begin{cases} \beta = \pm 1 \\ R = Pc^2 \end{cases}$$

La dérivée est :

$$R'(\beta) = \pm \frac{2c}{(1-\beta^2)^2} \left[Q\beta^2 - \left(\frac{R}{c} + Pc\right)\beta + Q \right],$$

avec le signe :

$$\begin{aligned} &- \text{ pour } \beta^2 < 1 \\ &+ \text{ pour } \beta^2 > 1 . \end{aligned}$$

Elle s'annule pour deux valeurs inverses l'une de l'autre : $1/\gamma$ et γ, qui ne sont autres d'ailleurs que les racines de :

$$Q(\beta) = 0 .$$

Elles correspondent à des minima de $R(\beta)$.

Il est intéressant de classer ces minima. On trouve :

$$R(\gamma) - R(1/\gamma) = Pc^2 - R .$$

Il y a donc deux cas de figure selon que $Pc \gtrless R/c$ (la variante est représentée en pointillés sur la figure 1).

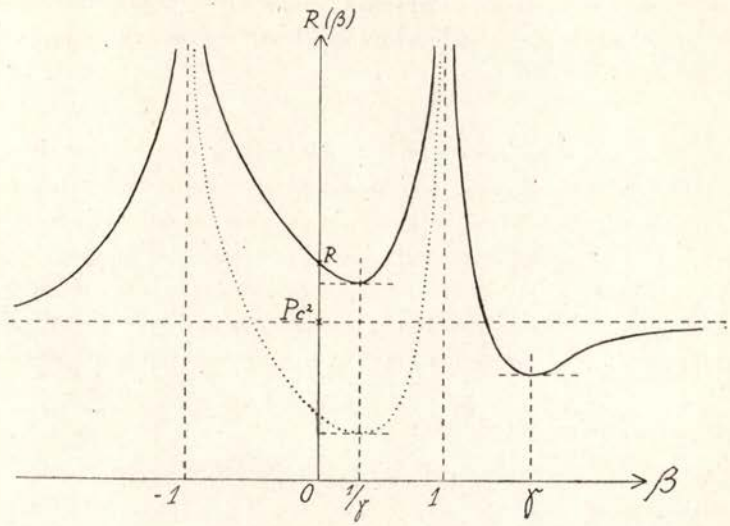


Fig. 1

$P(\beta)$ suit évidemment une allure toute semblable. Il a deux minima pour les *mêmes* vitesses γ et $1/\gamma$.

Ces minima se classent ainsi :

$$P(\gamma) - P(1/\gamma) = -\left(P - \frac{R}{c^2}\right).$$

Notons aussi les relations :

$$R(\gamma)\, R(1/\gamma) = c^2 \Delta$$

ou

$$R(\gamma)\, P(\gamma) = \Delta .$$

Quant à $Q(\beta)$, le numérateur de sa dérivée est :

$$\mp [(Pc + R/c)\, \beta^2 - 4Q\beta + (Pc + R/c)] ;$$

il n'est donc jamais nul.

$Q(\beta)$ peut prendre toutes les valeurs positives et négatives.

Ecrivons le coefficient de corrélation dans le système $S(1/\gamma)$, pour un paquet constitué d'ondes de vitesse moyenne γ :

$$r_1(\tau', k') = \cos \omega_0 \sqrt{\left| 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right|}\, \tau' \exp\left[- 1/2\,(P(1/\gamma)\, k'^2 + R(1/\gamma)\, \tau'^2)\right].$$

Ainsi, il ne représente plus tout à fait un solide, puisque r_1 dépend de k', ni un oscillateur parfait, puisque la vibration est amortie (terme en τ'^2 de l'exponentielle). Les grandeurs $c^2 P(1/\gamma)$ et $R(1/\gamma)$ qui mesurent l'imperfection du corpuscule s'expriment d'ailleurs au moyen des invariants $|Pc - R/c|$ et $(PR - Q^2)$ du paquet d'ondes.

Ce sont :

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt{(Pc^2-R)^2+4c^2(PR-Q^2)}\pm Pc^2-R\right].$$

Ils sont donc des invariants du paquet d'ondes.

La grandeur $\theta = 1/R(1/\gamma)$ peut être considérée comme un mesure de la *durée de vie* du corpuscule, tandis que $l = 1/P(1/\gamma)$ mesure *ses dimensions spatiales.*

13. Constantes physiques d'un paquet d'ondes. Les cinq grandeurs :

$$\omega_0,\ \mu_0,\ P,\ Q,\ R,$$

qui caractérisent le paquet d'ondes se réduisent à 4 indépendantes :

$$\gamma,\ P,\ Q,\ R,$$

puisque l'on a vu que la vitesse γ de l'onde de phase s'exprimait au moyen de P, Q, R, par une équation du 2ème degré ayant d'ailleurs des racines inverses.

Le groupe de transformation $\mathfrak{T}(\beta)$ admet trois invariants :

$$|c^2\mu_0^2 - \omega_0^2| = c^2\mu_0^2|1-\gamma^2|$$
$$|R/c - Pc|$$
$$(PR - Q^2).$$

On peut donc dire que, parmi les quatre paramètres statistiques indépendants qui définissent le paquet d'ondes, il y en a *trois* (les invariants) qui représentent *intrinsèquement l'être physique* et un quatrième (la vitesse de phase γ ou $1/\gamma$ du paquet), qui repère sa position par rapport au système de référence particulier qui a été choisi.

Nous voyons ainsi se préciser le sens physique qu'il convient de donner à notre théorie.

Soit un *être physique* caractérisé par ses trois invariants, il est mathématiquement représenté par un paquet d'ondes. Et celui-ci peut revêtir deux sortes d'aspect, selon que l'on se place dans des systèmes de référence, tels que l'onde de phase ait des vitesses de propagation $\gtrless 1$.

a) *Si* $\gamma > 1$, il apparait à la fois, comme un *intracorpuscule* de vitesse $1/\gamma<1$, et comme une *ultraonde* de vitesse $\gamma>1$. (conception de l'onde associée au corpuscule, au sens de *L. de Broglie*).

b) *Si* $\gamma<1$, il apparait au contraire, à la fois, comme un *ultracorpuscule* de vitesse $1/\gamma>1$, et comme une *infraonde* (conception duale de celle de *L. de Broglie* et *apparemment* non confirmée jusqu'à présent par l'expérience).

Si $\gamma=1$, les deux aspects se rejoignent sur la ligne de démarcation créée par la vitesse de la lumière.

On a alors :

$$2Q=Pc+R/c\,,$$

ce qui exprime que $Q(1)=0$.

Mais cela s'écrit aussi :

$$4\,(Q^2-PR)=(Pc-R/c)^2,$$

et comme le premier membre est négatif ou nul, et le second, positif ou nul, il faut à la fois :

$$\begin{cases} Q^2-PR=0 \\ Pc-R/c=0\,. \end{cases}$$

Ainsi pour $\gamma=1$, les *trois* invariants sont nuls.

Le corpuscule apparaît donc alors comme ayant une individualité *permanente* $(R(1/\gamma)=0,\ \theta=\infty)$ et par contre une extension spatiale *infinie* $(P(1/\gamma)=0,\ l=\infty)$. C'est, pourrait on dire un «*courant*» de corpuscules certains (photons); il ne saurait y avoir de meilleure image du «*rayon lumineux*».

Remarque : Etant donné un être physique représenté par un paquet d'ondes et défini par ses trois invariants fondamentaux, la dispersion du paquet change selon le système de référence. Voyons de quelle manière.

D'abord, quel que soit β :

(1) $$|R(\beta)-c^2P(\beta)|=\mathrm{I}\,.$$

De plus, le produit $P(\beta)R(\beta)$ est minimum et égal à Δ, pour $\beta=\gamma$ ou $1/\gamma$ (ses deux facteurs étant minima en même temps). D'où :

$$P(\beta)R(\beta)\geqq\Delta\,.$$

C'est là une «sorte» de relation d'incertitude. Elle diffère cependant de nature avec la forme classique de telles relations car, à cause de (1), $P(\beta)$ et $R(\beta)$ doivent varier dans le même sens. On peut dire en somme qu'ici la relation d'incertitude *se renforce* en se dédoublant : la dispersion des fréquences et la dispersion des longueurs d'onde ont *séparément* une borne inférieure.

II. La probabilité de présence dans l'espace-temps

1. Distribution statistique d'événements. Nous allons traiter à présent d'un autre schéma, qu'inspire également le point de vue aléatoire et nous constaterons à travers un langage différent, son analogie formelle avec celui de l'onde aléatoire. Il nous apprendra en outre des choses nouvelles.

La Théorie de la Relativité restreinte et le Calcul des Probabilités emploient tous deux le terme «*événement*», mais tandis que celui-ci l'envisage en dehors de tout cadre spatio-temporel, celle-là fait reposer précisément ce cadre sur les notions de *coïncidence* de deux événements et de *distance* de deux événements.

Sous une forme ramassée, on peut dire que :

« *Un point de l'espace-temps représente une classe d'événements coïncidents*»

et que :

«*L'espace-temps est l'espace abstrait des classes d'événements coïncidents*».

En somme, la conception de l'espace temps revient à représenter un événement par un *point* de cet espace, en fondant dans une même «*congruence*» tous les événements qui se produisent en ce point (c'est à dire : au même lieu et au même instant). Un ensemble d'événements est alors un domaine de l'espace-temps, et attacher à chacun de ces événements une *probabilité* revient à considérer une *densité de probabilité* dans l'espace-temps.

On est ainsi conduit bien naturellement, à satisfaire un des desidérata des Nouvelles Mécaniques : introduire une statistique sur la coordonnée temps comme sur les coordonnées d'espace.

2. Sens physique d'une densité de probabilité dans l'espace-temps. Soit un système de référence $S(0)$, que signifie physiquement un point-événement de coordonnées (X, T) ? Il lui correspond dans l'espace géométrique (coordonnée X) un point animé de la vitesse X/T. On a en effet, en vertu des formules de Lorentz.

$$X(X/T)=0,$$

ce qui veut dire que les points (X, T) du système de référence $S(0)$, tels que $X/T = c^{te}$, ont pour transformés des points *immobiles* dans le système de référence $S(X/T)$. Ces points (X, T) ont donc bien, dans le système $S(0)$, la vitesse X/T.

On notera que les vitesses ainsi définies se composent selon la loi relativiste.

Soit maintenant une densité de probabilité dans l'espace-temps, repéré par un systéme de référence $S(0)$. Il lui correspond dans l'espace géométrique de ce système (coordonnée X) des points qui parcourent l'axe des x avec des vitesses dispersées autour d'une valeur probable $\overline{\left(\frac{X}{T}\right)}$. Cette densité de probabilité se manifeste donc, aux yeux de l'observateur de $S(0)$ comme un «*train de particules ponctuelles*» suivant la même trajectoire (l'axe des x), avec des vitesses distribuées selon une certaine loi de probabilité. N'est ce pas là précisément une image de ce que l'on voit dans la chambre de *Wilson,* lorsque les physiciens expérimentaux déclarent qu'elle est traversée par un «corpuscule»?

3. Le paquet d'événements. Considérons donc un point aléatoire (X, T) dans l'espace-temps, c'est à dire une certaine distribution de probabilité de présence, définie par une loi conjuguée : (x, t).

Comme pour l'onde aléatoire, linéarisons le problème en supposant les nombres aléatoires : X, T *faiblement dispersés.* Nous savons que, dans ces conditions, les nombres purement aléatoires :

$$X' = X - \overline{X} \quad \text{et} \quad T' = T - \overline{T}$$

sont distribués selon la loi de Gauss-Bravais.

De même que nous avions appelé : «paquet d'ondes», le cas correspondant pour l'onde aléatoire, nous appellerons maintenant : «*paquet d'événements*» cette distribution de probabilité dons l'espace-temps, concentrée autour d'un point probable. Nous nous proposons d'étudier *l'être physique* représenté par un paquet d'événements.

Une remarque s'impose ici : les corrélations entre eux des événements qui constituent le paquet et qui sont le lien indispensable pour faire d'un simple «*ensemble*» de points aléatoires un «*espace*», paraissent être laissées de côté. En fait, elles sont déjá implicitement contenues dans la *métrique* qui a été adoptée pour l'espace-temps. Le coefficient de corrélation entre deux points-événements doit être considéré comme étant une fonction :

$$f(s^2)$$

du carré de la distance, telle que $f(0)=1$ et satisfaisant d'autre part aux conditions de cohérence. C'est en posant *l'invariance* de ce coefficient de corrélation, c'est à dire celle de s^2, que nous avons été conduits à adopter comme groupe de transformations de l'espace-temps, le groupe de Lorentz étendu :

$$X(0)=\frac{X(\beta)+\beta c\,T(\beta)}{\varepsilon\sqrt{|1-\beta^2|}};\quad T(0)=\frac{T(\beta)+\beta/c\,X(\beta)}{\varepsilon\sqrt{|1-\beta^2|}}.$$

Appliquons aux coordonnées aléatoires (X, T), la transformation de Lorentz étendue. Un simple calcul algébrique donne immédiatement la loi de transformation des caractéristiques statistiques de la distribution :

$$\begin{cases} x_0(\beta)=\overline{X}(\beta)=\dfrac{\varepsilon\sqrt{|1-\beta^2|}}{1-\beta^2}(x_0-\beta c t_0) \\[2ex] t_0(\beta)=\overline{T}(\beta)=\dfrac{\varepsilon\sqrt{|1-\beta^2|}}{1-\beta^2}(t_0-\beta/c\,x_0) \\[2ex] E(\beta)=\overline{X'^2(\beta)}=\dfrac{1}{|1-\beta^2|}(E-2\beta cF+\beta^2c^2G) \\[2ex] F(\beta)=\overline{X'(\beta)\,T'(\beta)}=\dfrac{1}{|1-\beta^2|}[-\beta/cE+(1+\beta^2)F-\beta cG] \\[2ex] G(\beta)=\overline{T'^2(\beta)}=\dfrac{1}{|1-\beta^2|}(\beta^2/c^2E-2\beta/cF+G) \end{cases}$$

Ces transformations forment un groupe, caractérisé : d'une part, par l'invariance de $|x_0^2(\beta)-c^2t_0^2(\beta)|$; d'autre part, par celle de la probabilité de présence :

$$\frac{|dx\,dt|}{2\pi\sqrt{\Delta}}\exp\left[-\frac{1}{2\Delta}(Gx^2-2Fxt+Et^2)\right];\quad \Delta=EG-F^2.$$

L'analogie formelle de ces formules de transformation avec celles qui transforment les caractéristiques statistiques du paquet d'ondes, nous permet de répéter — en modifiant seulement le langage — la théorie que nous venons de développer à leur sujet.

Cette analogie existe même en dehors de la linéarisation «*en paquet*» que nous n'avons adoptée que pour rendre nos idées plus faciles à exposer.

4. Autre forme de la dualité onde-corpuscule. Occupons nous d'abord de l'aspect moyen du paquet d'événements ayant la vitesse probable :

$$\overline{\left(\frac{X}{T}\right)} = \frac{x_0}{t_0},$$

(en négligeant les parties purement aléatoires X' et T' devant les valeurs probables x_0 et t_0). Dans le système $S(0)$, ils apparaissent comme un courant de particules ponctuelles se déplaçant le long de l'axe des x avec la vitesse $\gamma = \frac{x_0(0)}{ct_0(0)}$.

a) Dans le système de référence $S(\gamma)$, on a, de par les formules de Lorentz :

$$x_0(\gamma) = 0 .$$

Cela veut dire que le courant est *immobile* dans le systême $S(\gamma)$ ou encore constitue un *corps solide* ou «*corpuscule*» qui, dans le système $S(0)$ est animé de la vitesse γ.

b) Dans le système de référence $S(1/\gamma)$, on a :

$$t_0(1/\gamma) = 0 .$$

L'être physique y apparaît donc comme un ensemble d'événements simultanés ou *onde stationnaire* ; dans le système $S(0)$ l'aspect correspondant est celui d'une *onde progressive* de vitesse $1/\gamma$.

Ainsi, un paquet d'évéments est à la fois un corpuscule (ou plutôt un *courant* de corpuscules) de vitesse γ et une onde de vitesse $1/\gamma$.

5. Considération des moments du second ordre. Tant qu'on se borne aux valeurs probables, on ne fait pas jouer le point de vue statistique. Celui-ci ne s'introduit qu'avec les moments du second ordre ; il va apporter une précision plus grande à nos idées.

Les systèmes de référence $S(\gamma)$ et $S(1/\gamma)$ sont aussi ceux qui jouissent des propriétés suivantes :

a) F *nul*.

b) E *et* G *minima*.

On n'aura plus en général de corpuscule et d'onde *parfaits*. Mais parmi tous les paquets d'événements ayant les mêmes caractéristiques P, Q, R et ne différant que par la vitesse probable, il y en a deux qui revêtent le mieux possible respectivement l'aspect onde et l'aspect corpuscule. Ces aspects *éclipsent* les autres dans leur manifestation expérimentale. Un cas limite est á examiner spécialement : c'est celui où :

$$\gamma = 1/\gamma = 1 .$$

Il s'agit alors du photon et de l'onde lumimeuse. Les trois invariants fondamentaux :

$$|c^2 t_0^2 - x_0^2|, \quad |c^2 \overline{T'^2} - \overline{X'^2}| \quad \text{et} \quad \sqrt{\overline{X'^2}\,\overline{T''^2} - \overline{X'^2}\,\overline{T''^2}}$$

étant nuls, on a nécessairement :

$$X = c\,T,$$

c'est à dire que chaque événement individuel consiste en la présence d'un photon.

Si $\gamma \neq 1$, l'argument de la loi de Gauss est, dans le système $S(\gamma)$ — par exemple — :

$$-1/2\left[\frac{x^2}{E(\gamma)} + \frac{t^2}{G(\gamma)}\right].$$

Le corpuscule imparfait n'est donc pas tout à fait ponctuel et sa distribution n'est pas tout à fait permanente. On peut dire encore que sa position et son temps propre[1] sont quelque peu incertains. Ces incertitudes sont de l'espèce «*renforcée*», c'est à dire qu'elles portent séparément sur la position et le temps. [2]

Nous verrons, au contraire, que les incertitudes sur la position et la vitesse sont bien de l'espèce d'*Heisenberg*.

6. Raccord des schémas de l'onde aléatoire et de la probabilité de présence. Si nous posons le principe que des grandeurs qui se transforment de la même manière, représentent les *mêmes êtres physiques,* nous sommes conduits à écrire :

d'une part :

$$\frac{x_0}{\omega_0} = \frac{t_0}{\mu_0} \quad \text{ou} \quad \frac{x_0}{\mu_0 c} = \frac{t_0}{\omega_0/c};$$

d'autre part :

$$\frac{E}{Pc} = \frac{Gc^2}{R/c} = \frac{Fc}{Q} \quad \text{ou} \quad \frac{E}{R/c} = \frac{Gc^2}{Pc} = \frac{Fc}{Q};$$

et à identifier — à un facteur près — les trois invariants :

$$|c^2 t_0^2 - x_0^2|, \quad |Gc^2 - E|, \quad \sqrt{EG - F^2},$$

[1] Cette question est visiblement la même que celle du temps propre à attribuer à ce qu'on appelle classiquement : «un système de corpuscules». Le point de vue aléatoire la résoud en adoptant le temps t_0 du centre de gravité et une incertitude sur la coordonnée «temps».

[2] Comme celles de Landau et Peierls.

aux trois autres invariants :

$$|\mu_0^2 c^2 - \omega_0^2|, \quad |Pc - R/c|, \quad \sqrt{PR - Q^2}.$$

On aura ainsi attaché un paquet d'ondes à un paquet d'événements et inversement. L'un et l'autre représentent le *même être physique,* qui est caractérisé par ses trois invariants.

7. De la relation d'incertitude. Calculons la partie purement aléatoire de la vitesse. On a :

$$V(0) = \frac{X(0)}{T(0)} = \frac{x_0(0) + X'(0)}{t_0(0) + T'(0)},$$

et, en vertu de l'hypothèse que les dispersions sont faibles :

$$V'(0) = \frac{1}{t_0(0)}[X'(0) - \gamma c\, T'(0)],$$

avec

$$\gamma c = \frac{x_0(0)}{t_0(0)}.$$

Formons le moment rectangle : $\overline{X'(0)V'(0)}$. On a :

$$\overline{X'(0)V'(0)} = \frac{1}{t_0(0)}[\overline{X'^2}(0) - \gamma c\, \overline{T'^2}(0)] = \frac{1}{t_0(0)}(E - \gamma c F).$$

Or :

$$E - \gamma c F = \frac{(E - Gc^2) \pm \sqrt{(E - Gc^2)^2 + 4c^2(EG - F^2)}}{2}$$

est un *invariant* que l'on peut désigner par :

$$E(\gamma) \quad \text{ou} \quad \overline{X'^2}(\gamma), \quad \text{car } F(\gamma) = 0.$$

D'autre part :

$$m(\gamma) = m(0)\sqrt{|1 - \gamma^2|},$$

masse au repos, est aussi un *invariant.*

Puis :

$$t_0(\gamma) = t_0(0)\sqrt{|1 - \gamma^2|}$$

est également un *invariant* que nous désignerons par $\frac{h}{2\pi}$.

Maintenant, d'après l'inégalité de Schwarz :

$$m(0)\sqrt{\overline{X'^2}(0)}\sqrt{\overline{V'^2}(0)} \geq m(\gamma)\frac{\overline{X'^2}(\gamma)}{|t_0(\gamma)|} = \frac{h}{2\pi}.$$

La borne inférieure de l'incertitude est donc un *invariant*, indépendant du système de référence $S(0)$ — qui est un systéme de référence quelconque — et caractéristique de l'être physique envisagé.

Remarques. 1. Pour $\gamma = 1$, le quotient $\dfrac{\overline{X'^2}(\gamma)}{|t_0(\gamma)|}$ se présente sous la forme indéterminée $0/0$; on ne trouve donc pas, même dans le cas du photon une incertitude nulle.

2. Dans le système $S(\gamma)$ du corpuscule, si l'on adopte le temps $t_0(\gamma)$ qui est, dans ce système, le temps de l'événement probable du paquet d'événements (le temps propre du corpuscule, pourrait-on dire), on a :

$$\overline{X'^2} = \frac{h}{m} t_0,$$

formule dans laquelle on reconnaît la loi du mouvement brownien.

Ainsi, «*l'évolution*» du paquet d'événements suit une loi *discontinue* (X non dérivable par rapport à t_0). Il est curieux de remarquer que l'on peut oependent traiter la même probléme à l'aide d'un paquet d'ondes, donc en utilisant la *dérivation aléatoire*. Ceci montre qu'il n'est pas interdit au schéma aléatoire dérivable de permettre la solution de problémes qui semblent ressortir d'un schéma non dérivable [1].

3, Une des grandes difficultés qui empêche le raccord des Nouvelles Mécaniques avec la Relativité est l'impossibilité apparente d'introduire un paramétre d'évolution jouant le rôle du temps. Il nous semble bien que le point de vue aléatoire résoud cette difficulté puisqu'on peut concevoir une évolution d'une distribution de probabilité dans l'espace--temps, en fonction du temps propre du point probable.

III. Le champ électro-magnétique

1. Champ électromagnétique. Nous traiterons maintenant d'un troisiéme schéma qui va éclairer le sens physique à donner aux deux précédents.

[1] Cette remarque vise des objections qui nous ont été faites autrefois sur la limitation du pouvoir d'explication du schéma aléatoire dérivable. Nous avons, pour notre part, toujours soutenu la thèse de la nécessité de la dérivée pour faire de l'Analyse mathématique, et de l'efficacité de cette notion, convenablement généralisée — (Voir «Mécanique Aléatoire», 1[ere] Partie).

Considérons un champ électromagnétique :

$$\mathcal{B}(0, B_2, B_3)$$
$$\mathcal{H}(0, H_2, H_3),$$

normal à l'axe des x ; et une densité de charge eléctrique ρ, les charges étant animées d'une vitesse w, dirigée selon l'axe des x.

Le calcul montre que les équations de Maxwell, relatives à ce champ ;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B_2}{\partial y}+\dfrac{\partial B_3}{\partial z}=4\pi\rho ; & 0=\dfrac{\partial B_2}{\partial z}-\dfrac{\partial B_3}{\partial y}; \quad 4\pi j=\dfrac{\partial H_3}{\partial y}-\dfrac{\partial H_2}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial y}+\dfrac{\partial H_3}{\partial z}=0 ; & \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial H_2}{\partial t}=\dfrac{\partial B_3}{\partial x}; \qquad \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial B_2}{\partial t}=-\dfrac{\partial H_3}{\partial x}, \\ j=\rho\dfrac{w}{c} ; & \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial H_3}{\partial t}=-\dfrac{\partial B_2}{\partial x}; \qquad \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial B_3}{\partial t}=\dfrac{\partial H_2}{\partial x}, \end{cases}$$

sont *invariantes* par rapport à la transformation de Lorentz étendue :

$$x=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{|1-\beta^2|}}(x'+\beta ct') ; \quad y=y' ; \quad z=z' ; \quad t=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{|1-\beta^2|}}\left(t'+\beta\frac{x'}{c}\right),$$

en adoptant les lois de transformation suivantes pour le champ électromagnétique :

$$\begin{cases} B_2(\beta)=\dfrac{1}{\alpha'}(B_2-\beta H_3); & H_2(\beta)=\dfrac{1}{\alpha'}(H_2+\beta B_3); \\ B_3(\beta)=\dfrac{1}{\alpha'}(B_3+\beta H_2); & H_3(\beta)=\dfrac{1}{\alpha'}(H_3-\beta B_2); \\ \rho(\beta)=\dfrac{1}{\alpha'}(\rho-\beta j); & j(\beta)=\dfrac{1}{\alpha'}(j-\beta\rho) ; \\ \alpha'=\dfrac{1-\beta^2}{\varepsilon\sqrt{|1-\beta^2|}}. \end{cases}$$

Les vecteurs $\mathcal{B}$ et $\mathcal{H}$ forment dans le plan des y, z une figure géométrique qui, abstraction faite de son orientation dans le plan, est définie par les invariants géométriques suivants :

$$\mathcal{B}^2, \quad \mathcal{H}^2 \quad \text{et} \quad (\mathcal{B}\times\mathcal{H})_1 .$$

Les deux premiers sont les modules carrés des vecteurs ; le troisiéme, la composante selon l'axe des x de leur produit vectoriel (dont les deux autres composantes sont nulles).

Ces grandeurs se transforment ainsi :

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{B}^2(\beta) &= \frac{1}{|1-\beta^2|}[\mathcal{B}^2-2\beta(\mathcal{B}\times\mathcal{H})_1+\beta^2\mathcal{H}^2]; \\ (\mathcal{B}(\beta)\times\mathcal{H}(\beta))_1 &= \frac{1}{|1-\beta^2|}[-\beta\mathcal{B}^2+(1+\beta^2)(\mathcal{B}\times\mathcal{H})_1-\beta\mathcal{H}^2]; \\ \mathcal{H}^2(\beta) &= \frac{1}{|1-\beta^2|}[\mathcal{H}^2-2\beta(\mathcal{B}\times\mathcal{H})_1+\beta^2\mathcal{B}^2]. \end{aligned}\right.$$

2. Association d'un champ électromagnétique à l'onde aléatoire. On remarque immédiatement que ces grandeurs se transforment comme :

$$Pc, \quad Q \quad \text{et} \quad R/c,$$

tandis que ρ et j se transforment comme ω_0 et $\mu_0 c$. Par conséquent, on peut associer les caractéristiques du paquet d'ondes aux grandeurs électromagnétiques en posant :
d'une part :

$$\frac{\rho\,(\text{ou } j)}{\mu_0 c} = \frac{j\,(\text{ou } c)}{\omega_0},$$

et d'autre part :

$$\frac{(\mathcal{B}^2 \text{ ou } \mathcal{H}^2)}{R/c} = \frac{(\mathcal{H}^2 \text{ ou } \mathcal{B}^2)}{Pc} = \frac{(\mathcal{B}\times\mathcal{H})_1}{Q}.$$

On notera que les proportions précédentes sont bien *homogènes en dimensions* ($\mathcal{B}$ est exprimé en unités électrostatiques et $\mathcal{H}$, en unités électromagnétiques).

Les trois invariants de la transformation des grandeurs éléctromagnétiques :

$$|\rho^2-j^2|, \quad \mathcal{B}^2-\mathcal{H}^2, \quad |\mathcal{B}\,.\,\mathcal{H}|,$$

s'identifient respectivement aux trois invariants de la transformation des caractéristiques du paquet d'ondes :

$$|\mu_0^2 c^2-\omega_0^2|, \quad |R/c-Pc|, \quad \sqrt{PR-Q^2}.$$

Dans les systèmes de l'onde et du corpuscule (vitesse γ et $1/\gamma$), on a vu que :

$$\mu_0(\gamma)=0 \quad \text{et} \quad \omega_0(1/\gamma)=0.$$

Il en résulte que dans l'un de ces systèmes, ou ρ ou j est nul.

Remarque. Nous ne pouvons pas nous empêcher de souligner combien simplement le point de vue aléatoire permet d'incorporer (grâce à l'apparition des caractéristiques P, Q, R, circonstance qui lui est propre) l'électromagnétisme dans la Relativité restreinte, alors que la Relativité généralisée ne réussit que très imparfaitement à en rendre compte. Et pourtant, la Relativité restreinte étant basée sur l'invariance des équations de Maxwell, on aurait dû raisonnablement penser qu'elle devait contenir en puissance l'électromagnétisme.

3. Charge électrique et moment magnétique. Choisissons, par exemple, l'association :

$$\frac{e}{\mu_0 c} = \frac{\omega_0}{j};$$

(ce que nous allons dire est vrai aussi bien pour l'autre association possible).

Alons $\rho(\gamma)$ et $j(1/\gamma)$ sont nuls.

Le corpuscule transporte une charge :

$$e(1/\gamma) = \rho(1/\gamma)\, dx(1/\gamma),$$

et l'onde est accompagnée par le courant électrique :

$$i(\gamma) = j(\gamma)\, dx(\gamma).$$

A ce courant, correspond un *moment magnétique,* situé dans le plan des (y, z), et ayant pour composantes :

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_2(\gamma) = -zj(\gamma)\, dx(\gamma) \\ \mathfrak{M}_3(\gamma) = yj(\gamma)\, dx(\gamma). \end{cases}$$

Montrons que la charge électrique et le moment magnétique sont des *invariants.*

On a d'abord :

$$\begin{cases} \rho(0) = \dfrac{\gamma}{\sqrt{|1-\gamma^2|}}\rho(1/\gamma) \\[2ex] j(0) = \dfrac{\gamma}{\sqrt{|1-\gamma^2|}} j(\gamma). \end{cases}$$

Ensuite :

$$|dx(0)\, dt(0)| = |dx(1/\gamma)\, dt(1/\gamma)| = |dx(\gamma)\, dt(\gamma)|,$$

et

$$\frac{dt(0)}{dt(1/\gamma)} = \frac{\gamma}{\sqrt{|1-\gamma^2|}}; \quad \frac{dt(0)}{dt(\gamma)} = \frac{1}{\sqrt{|1-\gamma^2|}};$$

d'où enfin :

$$\rho(1/\gamma)\, dx(1/\gamma) = \rho(0)\, dx(0)$$

$$j(\gamma)\, dx(\gamma) = j(0)\, dx(0);$$

et comme y et z se transforment selon l'identité, ρ, $\mathfrak{M}_2$ et $\mathfrak{M}_3$ ne dépendent pas du système de référence $S(0)$.

Ainsi, à un paquet d'ondes aléatoire, de vitesse de phase γ, sont associés :

$$\left.\begin{array}{l}\text{une charge électrique}\\ \text{un moment magnétique}\end{array}\right\}\ \textit{invariants,}$$

et l'on peut considérer que la charge électrique accompagne un corpuscule de vitesse $1/\gamma$ et que le moment magnétique accompagne une onde de vitesse γ (ou inversement).

Il y a donc une espèce de «*dédoublement*» de la conception courante qui consiste à attacher à un corpuscule *à la fois* une charge électrique et un moment magnétique. Ces entités se rattachent en fait à l'être physique: paquet d'ondes, et l'une accompagne l'aspect corpuscule, l'autre, aspect onde.

Lorsque $\gamma=1$, l'invariant $|\rho^2-j^2|$ est nul, ce qui entraîne que $\rho(1)$ et $j(1)$ sont nuls. Un paquet d'ondes lumineuses (ou un photon) n'a donc ni charge électrique ni moment magnétique.

4. Ondes électromagnétiques de Maxwell. Supposons d'abord le paquet formé d'ondes électromagnétiques de vitesse 1.

Alors l'équation :

$$Q(\beta)=0,$$

admet la racine *double* 1, ce qui entraîne à la fois :

$$\begin{cases} R/c-Pc=0\\ PR-Q^2=0. \end{cases}$$

On aussi d'autre part:

$$\mu_0^2c^2-\omega_0^2=0,$$

puisque par hypothèse: $\dfrac{\omega_0}{\mu_0}=c$.

Cela exprime:

1.°) que le corpuscule de vitesse égale à c (photon) n'a pas de charge étectrique;

2.°) qu'il est accompagné par des champs électrique et magnétique *ortogonaux* et *égaux,* car :

$$\mathcal{B}\cdot\mathcal{E}=0 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}^2-\mathcal{E}^2=0.$$

Ces conséquences sont de nature à donner confiance dans l'assimilation que nous avons faite des propriétés electromagnétiques aux caractéristiques statistiques du paquet d'ondes.

5. Ondes de vitesse $\gamma \neq 1$. Soit maintenant un paquet d'ondes de vitesse de phase $\gamma \neq 1$.

Si $\gamma > 1$, nous pouvons appeler ces ondes: ondes de *L. de Broglie,* et nous avons vu que le paquet représente: un (infra) corpuscule, de vitesse $1/\gamma < 1$, et une (ultra) onde, de vitesse $\gamma > 1$.

Si $\gamma < 1$, c'est un nouveau genre d'ondes, duales des précédentes, dont le paquet se manifeste sous l'aspect:

d'un (ultra) corpuscule, de vitesse $1/\gamma > 1$,
et d'une (infra) onde, de vitesse $\gamma < 1$.

Dans les systèmes de référence liés aux corpuscules et aux ondes, on a:

$$Q(\gamma) = Q(1/\gamma) = 0.$$

Il en résulte que:

$$\mathcal{B} \times \mathcal{H} = 0,$$

c'est à dire que, dans ces systèmes, les vecteurs $\mathcal{B}$ et $\mathcal{H}$ sont portés par le même support.

D'ailleurs, les supports relatifs au système $(1/\gamma)$ sont *orthogonaux.* On le voit, en remarquant que le changement de β en $1/\beta$ produit, dans les formules de transformation du champ électromagnétique, l'effet suivant:

$$\begin{cases} B_2(1/\beta) = H_3(\beta) & H_2(1/\beta) = -B_3(\beta) \\ B_3(1/\beta) = -H_2(\beta) & H_3(1/\beta) = B_2(\beta), \end{cases}$$

de sorte que:

$$\mathcal{B}(\beta) \,.\, \mathcal{B}(1/\beta) = B_2(\beta)\, B_2(1/\beta) + B_3(\beta)\, B_3(1/\beta) = [\mathcal{B}(\beta) \times \mathcal{H}(\beta)]_1,$$

soit zéro si $\beta = \gamma$ ou $1/\gamma$.

Les vitesses γ et $1/\gamma$ des corpuscules et des ondes sont reliées au champ électromagnétique par les formules:

$$\left. \begin{matrix} \gamma \\ 1/\gamma \end{matrix} \right\} = \frac{\mathcal{B}^2 + \mathcal{H}^2 \pm \sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{H}^2)^2 + 4\,(\mathcal{B} \,.\, \mathcal{H})^2}}{2\,(\mathcal{B} \times \mathcal{H})_1}.$$

Dans le cas de corpuscules et d'ondes *parfaits,* c'est à dire lorsque:

$$PR - Q^2 = 0,$$

ou encore, lorsque la dispersion (optique) est *certaine* — cas des ondes électromagnétiques dans un diélectrique — on a, de plus :

$$P(\gamma)=0; \quad R(1/\gamma)=0,$$

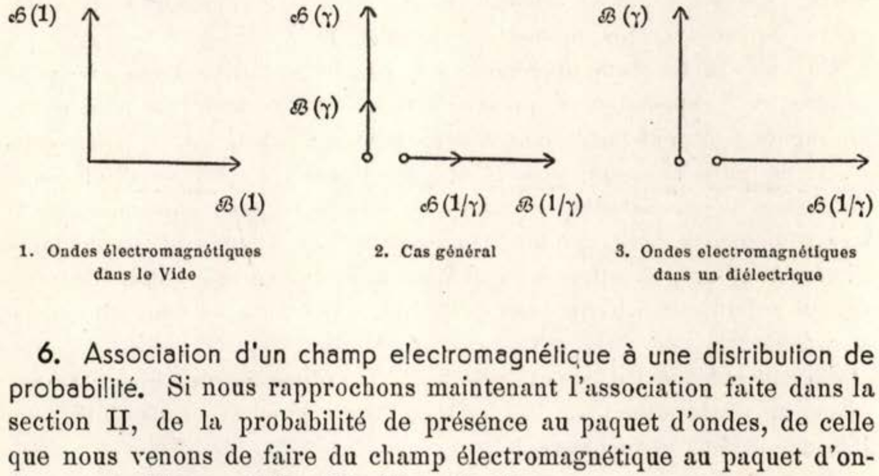
d'où :

$$\mathcal{E}(\gamma)=0; \quad \mathcal{B}(1/\gamma)=0.$$

Alors, chaque corpuscule (ou onde) est accompagné par un champ exclusivement électrique ou exclusivement magnétique, orthogonaux et égaux en module. Il y a une sorte de *dédoublement* de l'onde électromagnétique de Maxwell.

Il y a là une différence avec la propre théorie de Maxwell, selon laquelle les vecteurs électrique et magnétique sont alors inégaux en module et orthogonaux, et se propagent avec la même vitesse.

La figure suivante résume nos conclusions :



1. Ondes électromagnétiques dans le Vide — 2. Cas général — 3. Ondes électromagnétiques dans un diélectrique

6. Association d'un champ électromagnétique à une distribution de probabilité. Si nous rapprochons maintenant l'association faite dans la section II, de la probabilité de présénce au paquet d'ondes, de celle que nous venons de faire du champ électromagnétique au paquet d'ondes, nous obtenons l'identification suivante :

d'un part : $\frac{x_0}{j} = \frac{ct_0}{\rho}$ ou $\frac{x_0}{\rho} = \frac{ct_0}{\ }$,

d'autre part : $\frac{E}{\mathcal{E}^2} = \frac{Gc^2}{\mathcal{B}^2} = \frac{Fc}{(\mathcal{E}\times\mathcal{B})_1}$ ou $\frac{E}{\mathcal{B}^2} = \frac{Gc^2}{\mathcal{E}^2} = \frac{Fc}{(\mathcal{E}\times\mathcal{B})_1}$.

Nous laissons au lecteur le soin d'exprimer en langage clair les conconséquences de cette nouvelle analogie.

7. Généralité des résultats précédents. Nous croyons n'avoir rien enlevé d'essentiel à l'exposé de nos idées, en limitant dans les schémas aléatoires l'espace-temps à deux dimensions. Nous indiquerons pourtant que si l'on voulait traiter le problème sous une forme tensorielle générale, il faudrait :

1°) dans le schéma de l'onde aléatoire, partir d'un coefficient de corrélation :

$$r(\tau, k_1, k_2, k_3) = \overline{\cos(\Omega\tau - M_1 k_1 - M_2 k_2 - M_3 k_3)},$$

la loi de probabilité $(\omega, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ étant-dans la linéarisation du paquet — représentée par le tenseur symétrique formé avec les 16 moments rectangles (10 différents) des Ω et des M.

2°) dans le schéma de la probabilité de présence, partir d'un loi de distribution :

$$(x, y, z, t);$$

qui se représente par un tenseur symétrique à 16 composantes (10 différents), formé avec les moments rectangles de X, Y, Z, T.

Chacun des tenseurs précédents représente en fait, le tenseur *le plus général* de l'espace-temps, puisqu'en faisant varier la loi de probabilité conjuguée, on peut lui donner *n'importe quelle valeur*. Il a là, croyons nous, en puissance, une possibilité d'explication, en termes d'ondes ou en termes de probabilité, de toutes les lois physiques, puisque celles-ci s'expriment par des relations tensorielles. Un tenseur quelconque pourra toujours, en effet, être identifié avec une certaine onde aléatoire (ou distribution de fréquences et de longueurs d'ondes dans un espace d'ondes).

En second lieu, il serait évidemment intéressant de reprendre ces idées, en se dispensant de la linéarisation qui nous a permis de ne faire que des calculs élémentaires.

IV. Les ultracorpuscules et la lumière

1. Les ultracorpuscules et leur dynamique. Nous avons soutenu que, au même titre que L. de Broglie a associé une (ultra) onde à un (infra) corpuscule, on devait aussi associer un (ultra) corpuscule à une (infra) onde. Or, les ondes lumineuses dans un milieu réfringent sont justement des infraondes. On doit donc pouvoir aussi bien traiter de leurs propriétés en langage d'ultra corpuscules (disons même d'ultraphotons), à condition de prêter à ceux-ci la dynamique qui leur convient. Notre avis est d'ailleurs que si la théorie corpusculaire de la Lumière n'a pas encore pu être réconciliée avec sa théorie ondulatoire, c'est parce qu'on a songé uniquement à des infracorpuscules, les vitesses supérieures à c, étant considérées, à tort, comme prohibées par la Théorie de la Relativité restreinte.

L'ultracorpuscule suit, bien entendu, une dynamique différente de la relativiste classique (où $\beta < 1$). Dans le groupe de Lorentz étendu, on est conduit à baser ainsi la dynamique du corpuscule (infra ou ultra) :

Masse : $m(0) = \dfrac{m(\beta)}{\sqrt{|1-\beta^2|}}$.

Quantité de mouvement : $p(0) = \dfrac{m(\beta)\, c\beta}{\sqrt{|1-\beta^2|}}$.

Énergie : $\mathcal{E}(0) = \dfrac{m(\beta)\, c^2}{\sqrt{|1-\beta^2|}}$.

Ces formules qui, pour $\beta^2 < 1$, rejoignent la dynamique relativiste, créent d'assez sérieuses différences lorsque $\beta^2 > 1$.

Pour $\beta = \infty$, la masse est nulle ; la quantité de mouvement est égale à $m(\infty)\, c$; et l'énergie est nulle.

On remarquera que l'on a, en tous cas, la relation suivante entre la quantité de mouvement et l'énergie :

$$p(0) = \frac{E(0)}{c}\beta.$$

2. Propagation rectiligne de la Lumière. On a tendance à croire que la théorie corpusculaire de la Lumière rend compte ipso-facto des faits de l'Optique Géométrique et n'éprouve de difficultés qu'en face de l'Optique Ondulatoire. Or à notre avis, tel n'est pas le cas. Car si la Lumière est formée de petits projectiles susceptibles de choquer les particules élémentaires de la matière, on explique bien la diffusion, particulièrement l'incohérente (*effet Compton*), mais on devient incapable d'expliquer un aussi *gros fait* que la *propagation rectiligne* de la Lumière, sans diffusion appréciable, dans certains milieux *matériels* dits transparents et homogènes (comme les verres d'optique). Il faudrait en effet nous expliquer pourquoi la lumière est capable de poursuivre imperturbablement sa course rectiligne, en dépit des chocs qu'éprouvent les photons avec les constituants élémentaires du milieu *non vide* qu'elle traverse. Et aussi pourquoi les rayons lumineux se traversent les uns les autres et reprennent leur course sans modification après être sortis de la zone d'interférence.

Eh bien ! nous allons précisément constater, sur nos équations, que le choc des photons (ou plutôt des ultraphotons) sur des ultracorpuscules ne modifient ni leur trajectoire, ni leur fréquence.

Considérons un milieu matériel, formé d'ultracorpuscules, et ayant l'indice de réfraction : n. La lumière, dans ce milieu, ne consiste pas en photons proprement dits (de vitesse c), mais en *ultraphotons* de vitesse $nc > c$, qui sont associés aux ondes *infralumineuses* de vitesse c/n. La dynamique de ces ultraphotons est caractérisée, d'après ce que nous avons dit, par la relation :

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c} n .$$

Examinons ce qui se passe quand, par un phénoméne tout à fait analogue à l'effet Compton, un ultraphoton *choque* un ultracorpuscule de masse propre m_0. $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_1$ étant ses énergies avant et après le choc; θ, l'angle de déviation du rayon lumineux, et φ l'angle de la direction de recul de l'ultracorpuscule choqué, écrivons les équations de conservation. On obtient[1] :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{\beta^2 - 1}} + \mathcal{E}_1 \\ \frac{n\mathcal{E}_0}{c} &= \frac{n\mathcal{E}_1}{c} \cos\theta + m_0 c \cos\varphi \left[\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}} - 1 \right] \\ 0 &= \frac{n\mathcal{E}_1}{c} \sin\theta + m_0 c \sin\varphi \left[\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}} - 1 \right]. \end{aligned} \right.$$

On en tire, par un calcul tout à fait parallèle au calcul classique :

$$(n^2-1)(\mathcal{E}_0^2 + \mathcal{E}_1^2) + 2(1 - n^2 \cos^2\theta)\mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1 = 2m_0 c^2 \left[m_0 c^2 - \sqrt{(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1)^2 + m_0^2 c^4} \right]$$

expression qui se laisse mettre sous la forme *remarquable :*

$$(n^2-1)(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1)^2 + 2n^2(1-\cos\theta)\mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1 = 2m_0 c^2 \left[m_0 c^2 - \sqrt{(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1)^2 + m_0^2 c^4} \right].$$

Cette égalité va nous conduire à des relations *très strictes*. Le premier membre est, en effet : $\geqq 0$, et le second : $\leqq 0$. On doit donc avoir *nécessairement :*

$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1$ (pas de changement de fréquence);
$\cos\theta = 1$ (pas de déviation du rayon lumineux).

[1] On étudie le choc dans un système de référence dans lequel l'anticorpuscule a la vitesse $\beta = \infty$ avant le choc, c'est à dire aussi, dans lequel l'infraonde est stationnaire.

Pour mémoire, nous noterons que l'anticorpuscule reste immobile. Ainsi, la Lumière est bien — comme l'expérience *la plus grossière* nous l'a d'abord montré — capable de traverser sans perturbation certains milieux.

Ce calcul nous explique aussi pourquoi des faisceaux lumineux se traversent sans modification (puisqu'il s'agit toujours du choc nul de deux ultracorpuscules). Cela ne préjuge rien de ce qui peut se passer dans la zone d'interférence parce que :

1°) Les équations du choc ne sont qu'un bilan «avant, après» qui ignore le détail du mécanisme du choc.

2) Les franges résultent d'une question d'intensité, et non pas du mécanisme élémentaire. Elles doivent s'expliquer par des superpositions de probabilité.

Si nous tirons de là les conséquences qui s'imposent, il nous paraît qu'il faille y voir une confirmation de l'existence *physique* des ultracorpuscules : il faut les chercher parmi les constituants élémentaires de la matière transparente et homogéne.

3. La masse des ultraphotons. Aux ondes lumineuses dans un milieu réfringent, il faut associer non des photons, mais des ultraphotons. Ceux-ci ont une masse, d'ailleurs très petite, dont on peut évaluer l'ordre de grandeur de la maniére suivante.

La longueur d'onde associée étant :

$$\lambda(0) = \frac{h}{p(0)},$$

on en déduit :

$$m(\beta) = \frac{h}{\lambda(0)c}\frac{\sqrt{\beta^2-1}}{\beta}.$$

La masse propre des ultraphotons est nulle pour $\beta=1$, et ce sont alors des photons. Elle croit ensuit avec β et tend vers la limite :

$$m(\infty) = \frac{h}{\lambda(0)\, c}.$$

Or, on a :

$$\frac{h}{c} = \frac{6{,}6\times10^{-27}}{3\times10^{10}} = 2{,}2\times10^{-37}.$$

Donc pour les ondes lumineuses ($\lambda(0)$ compris entre 10^{-6} et 10^{-4} cm), $m(\infty)$ est compris entre :

$$2{,}2 \times 10^{-31} \quad \text{et} \quad 1{,}2 \times 10^{-33}$$

(pour mémoire : masse de l'électron $= 0{,}9 \,.\, 10^{-27}$).

4. La loi de la réfraction. La loi de la *réflexion* s'interpréte banalement en termes corpusculaires, que le corpuscule acompagne ou non l'onde lumineuse. Il en va tout autrement de la loi de la *réfraction* qui, si l'on attache le corpuscule à l'onde, donne pour l'indice de réfraction *l'inverse* de la valeur réelle[1].

Le raisonnement corpusculaire peut se résumer ainsi :

On pose la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement paralléle à la surface de séparation des deux milieux.

Et cela donne :

$$\frac{E}{c} \sin i = \frac{E\beta}{c} \sin r \,,$$

βc étant la vitesse du photon réfracté.

Or, $\beta = \frac{1}{n}$ (n = indice de réfraction) et l'on a le résultat *faux :*

$$\sin i = \frac{1}{n} \sin r \,.$$

Dans le concept de l'ultraphoton, la loi de Descartes s'établit au contraire, *correctement.* En effet, à l'onde infralumineuse de vitesse $\frac{c}{n}$ dans le milieu réfringent, s'associe un ultraphoton de vitesse nc. Par suite l'on a bien :

$$\sin i = n \sin r \,.$$

La loi de Descartes est équivalente au principe de Fermat. Donc, on a :

$$\int nds \ \text{minima} \,;$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\int vds \ \text{minima} \,;$$

$v = nc$ étant la vitesse de l'ultraphoton.

Le principe de Fermat est donc identique au principe de Maupertuis appliqué à l'ultraphoton, et ce dernier principe résulte de la dynamique des ultracorpuscules (puisque E se conserve).

[1] Les remarques qui suivent ne sont pas nouvelles. L. de Broglie y a déjà beaucoup insisté, mais ce que nous apportons de neuf c'est l'ultraphoton (corpuscule de vitesse supérieure à c).

Nous pensons avoir montré que les faits fondamentaux de l'optique s'expliquent avec une grande simplicité, dans l'hypothèse corpusculaire, lorsqu'on admet des vitesses supérieures à c, ce que nous avons montré ne pas être interdit par la conception relativiste.

V. Les particules élémentaires

1. Idées générales. Lorque la Physique expérimentale décrit le résultat de ses investigations dans le domaine atomique, elle s'exprime en langage de «*particules*», c'est à dire de corps matériels très petits, doués de certaines propriétés mécaniques et électromagnétiques. Tout le monde sait bien à présent que les particules élémentaires sont tout autre chose que de simples «*petites billes*». Nons croyons avoir précisément montré quelle idée on pouvait s'en faire, soit comme *paquet d'ondes*, soit comme *paquet d'événements*. Et nous sommes amenés à appeler «*particule*» cet être physique *ambigü* qui se compose d'un corpuscule et d'une onde associés.

Mais une fois *pensé* cet être, il y a bien des cas où l'on peut raisonner sur lui comme sur une «*petite bille*» — la théorie cinétique a tout de même donné des resultats, et la Mécanique Céleste traite les astres comme des points matériels. Peut être un jour se dispensera-t-on d'employer de telles images. En attendant, nous les utiliserons encore car c'est le seul moyen de confrontrer nos concepts avec les connaissances expérimentales.

Rappelons que nous avons distingué deux sortes de particules, que nous appellerons dorénavant :

infraparticules (infracorpuscule/ultraonde)
et *ultraparticules* (ultracorpuscule/infraonde).

Laissons provisoirement de côté l'interprétation à donner de cette distinction, et voyons comment s'attribuent aux particules élémentaires une charge électrique et un moment magnétique.

2. Charge électrique et moment magnétique des particules élémentaires. La charge électrique d'une particule est l'intégrale invariante :

$$e = \int \rho \, dx \, dy \, dz \, .$$

Lorsqu'il s'agit d'une particule «*simple*», les différentes charges qui constituent la distribution électrique dans l'espace sont toutes de *même* *signe,* et la charge totale e ne saurait être nulle sans que ρ le soit. On a vu qu'il en résulte alors que la particule a nécessairement la vitesse de la lumière (aussi bien sous l'aspect corpuscule que sous l'aspect onde) : c'est un *photon.*

Mais pour une particule «*complexe*», e peut être nul sans que ρ le soit, par suite des compensations entre les charges des deux signes. On échappe ainsi à la conclusion précédente et on peut concevoir des particules neutres n'ayant pas obligatoirement la vitesse de la lumiére (neutron, atome).

Quant au moment magnétique, ses composantes sont :

$$\mathcal{M}_2 = -\int z\,j\,dx\,dy\,dz\,;$$

$$\mathcal{M}_3 = \int y\,j\,dx\,dy\,dz\,;$$

avec $j = \rho\gamma$ ou ρ/γ.

Si $j = 0$, la particule a nécessairement la vitesse de la lumiére, à la fois sous ses aspects corpuscule et onde : c'est un *photon.*

Mais une particule *simple* peut avoir un moment magnétique nul sans que j le soit : cela dépend de la distribution des charges, à les supposer même toutes du même signe. Il peut y avoir également des particules neutres pourvues d'un moment magnétique. Enfin, moment magnétique nul n'entraine pas *spin* nul, si la particule est neutre (photon).

3. Confrontation avec les particules élémentaires de la Physique. Nous n'avons évidemment pas l'ambition, par des schémas aussi simplifiés, d'apporter une *explication* des particules élémentaires, mais seulement de tirer les conséquences de nos considérations et de les confronter avec les connaissances expérimentales.

Nous partons de l'idée de représenter les particules élémentaires de la Physique par un «*paquet*» d'ondes ou d'événements. Nous savons d'abord que ce paquet revêt deux aspects que nous noterons.

$$\circ\!\sim \quad \text{et} \quad \sim\!\circ,$$

— le signe $\circ$, désignant l'aspect corpuscule et le signe $\sim$, l'aspect onde — selon que c'est le corpuscule ou l'onde qui a une vitesse inférieure à 1.

Nous nous occuperons seulement des infraparticules.

Nous devons attribuer ensuite à chaque demi-entité ($\circ$ ou $\sim$) une charge de l'un ou l'autre signe et un moment magnétique susceptible de deux signes. L'un ou l'autre de ces deux caractères, ou même les deux, peuvent d'ailleurs faire défaut.

Enfin, de part et d'autre de la vitesse de la lumière, charges et moments changent de signe.

La confrontation donne les résultats suivants :

$$\begin{array}{ll} \text{Electron} & \multirow{2}{*}{$\left\{ \overset{-}{\circ}\ \underset{\swarrow}{\sim} \qquad \overset{\nearrow}{\circ}\ \overset{-}{\sim} \right.$} \\ \text{Mésoton}- & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Positon} & \multirow{2}{*}{$\left\{ \overset{+}{\circ}\ \overset{\nearrow}{\sim} \qquad \underset{\swarrow}{\circ}\ \overset{+}{\sim} \right.$} \\ \text{Mésoton}+ & \end{array}$$

$$\text{Neutron} \quad : \circ\ \overset{\nearrow}{\sim} \qquad \underset{\swarrow}{\circ}\ \sim$$

$$\text{Photon} \quad : \overset{\circ}{\sim}$$

Il y a dans ce tableau certaines coïncidences heureuses :

a) Une même particule chargée et pourvue d'un moment magnétique existe sous quatre formes ; ainsi :

electron/position
mésoton−/mésoton+.

b) La combinaison de deux particules de même nature et de charge opposées crée un photon.

En effet, l'ensemble infraparticule (vitesse β) et ultraparticule (vitesse $1/\beta$) a pour quantité de mouvement :

$$p = \frac{mc\,\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{mc/\beta}{\sqrt{1/\beta^2-1}} = \frac{mc\,(\beta+1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

et pour énergie :

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1/\beta^2-1}} = \frac{mc^2(1+\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \text{d'où} : \frac{\mathcal{E}}{p} = c\,.$$

c) Le photon est bien représenté, car absence de moment magnétique ne veut pas nécessairement dire *spin nul* (quand la charge est nulle).

Il y a aussi quelques discordances :

a) Il y aurait la possibilité de particules chargées sans moment magnétique ; elles ne sont pas connues.

b) Le proton ne trouve pas sa place (il n'a pas de correspondant de charge négative), mais on sait qu'il est possible de le considérer comme formé de la combinaison d'un neutron avec un mésoton positif.

4. Interprétation des ultraparticules. L'hypothése que nous allons émettre ici est *toute intuitive.*

Un des résultats les plus nets de nos Schémas est qu'une même particule élémentaire se présente sous deux variétés ; infra ou ultraparticule selon que son aspect corpuscule a une vitesse inférieure ou supérieure à la lumiére. L'hypothèse spéculative que nous avançons est celle-ci : les infraparticules seraient les éléments extranucléaires et *les ultraparticules, les constituants du noyau.*

Nous allons examiner quelques conséquences de cette conception.

Calculons d'abord les ordres de grandeur des ondes associées aux particules élémentaires considérées non plus comme des *infra-*, mais comme des *ultra-* particules. La formule à appliquer est :

$$\lambda(0) = \frac{h}{m(\beta)\,c}\,\frac{\sqrt{\beta^2-1}}{\beta}\,; \quad \beta>1\,;$$

Contrairement à ce qui se passe pour la formule de L. de Broglie (avec $\beta<1$), la longueur d'onde associée à un ultracorpuscule n'est pas très sensible à la vitesse. Ainsi β serait il égal à 2 — ce qui est le cas homologue des électrons les plus rapides connus (vitesse 1/2) —, que $\lambda(0)$ ne serait diminué que dans le rapport 0,85.

Nous calculerons donc sur l'expression :

$$\lambda = \frac{h}{mc},$$

(connue d'autre part sous le nom de longueur d'onde de Compton).

On obtient :

Pour l'électron : $\lambda = \dfrac{2{,}2\,.\,10^{-37}}{0{,}9\,.\,10^{-27}} = 2{,}4\,.\,10^{-10}$ cm, soit de l'orde de 10^{-2} Å, qui est la longueur d'onde des rayons γ.

Pour le proton (ou le neutron) : $\lambda = \dfrac{2{,}2\,.\,10^{-37}}{1{,}65\,.\,10^{-24}} = 1{,}3\,.\,10^{-13}$ cm, soit de l'ordre de 10^{-5} Å, ce qui correspond à des ondes apparemment en dehors du domaine exploré.

5. Comment se conçoit la désintégration. La conception ordinaire du noyau est celle d'une matiére fortement concentrée dans un très petit espace et défendu contre les bombardements de particules par une solide barrière de potentiel. Ce noyau renferme une énorme quantité d'énergie (relativiste) : mc^2. La «désintégration» du noyau améne la libération de cette énergie ou d'une partie de cette énergie.

Nous sommes conduits à voir les choses d'une manière extrêmement différente. Les particules sont des êtres physiques ayant une extension spatio-temporelle quelconque ; tout au plus celle-ci est-elle concentrée autour d'un point probable. Ces particules sont *à la fois* des corpuscules et des ondes. Elles revêtent en outre deux aspects : *infra* et *ultra*, selon que leur *corpuscule* est *moins* ou *plus* rapide que la lumière, ou encore que leur *onde* est *plus* ou *moins* rapide que la lumière. L'aspect ultra est celui des particules du *noyau*. La *barrière de potentiel* est remplacée par la *ligne de démarcation* de la vitesse de la lumière.

Nous avons dit que l'on pouvait jusqu'à un certain point raisonner sur les particules comme sur des petites billes. La théorie de *l'effet Compton* en est un des meilleurs exemples. Nous avons vu, en étudiant un *ultra-effet Compton* (choc d'ultracorpuscules) qu'en raison de leur dynamique toute spéciale, les billes se traversaient, dans ce cas, sans perturbation. Ceci montre bien à quel point il est nécessaire d'idéaliser cette image des billes. Nous avons pu expliquer ainsi pourquoi la lumière se propage en ligne droite et pourquoi deux rayons lumineux se croisent sans accident. Maintenant, nous allons étudier un autre phénoméne : celui où le choc transforme une des *ultra* particules en une *infra* particule.

Plaçons nous dans un système de référence où un ultracorpuscule du noyau a une vitesse infinie — c'est à dire où son onde associée est *stationnaire*. L'énergie de l'ultracorpuscule est alors *nulle*. On voit que, contrairement à la conception d'*Einstein*, nous considérons le noyau «*au repos*» comme dépourvu d'énergie, et non pas doué de l'énergie énorme mc^2. Il posséde par contre une quantité de mouvement «*au repos*» égale à mc.

Bombardons maintenant le noyau avec d'autres ultracorpuscules $\left(\text{c'est à dire avec un «rayonnement» au sens habituel, de vitesse } \frac{c}{n}\right)$.

Ecrivons les équations du choc élastique :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1 + \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{n\mathcal{E}_0}{c} = \dfrac{n\mathcal{E}_1}{c}\cos\theta + m_0 c \cos\varphi\left(\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \\ 0 = \dfrac{n\mathcal{E}_1}{c}\sin\theta + m_0 c \sin\varphi\left(\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right). \end{cases}$$

Le calcul familier donne:

$$(n^2-1)(\mathcal{E}_0-\mathcal{E}_1)^2+2\mathcal{E}_0\mathcal{E}_1 n^2(1-\cos\theta)=-2m_0 c^2\sqrt{(\mathcal{E}_0-\mathcal{E}_1)^2-m_0^2c^4},$$

et comme $n \geq 1$ (les partícules incidentes étant des «ultra»), l'égalité ne peut être satisfaite que si.

$$a)\ \theta=0;$$
$$b)\ \mathcal{E}_0-\mathcal{E}_1=m_0 c^2.$$

Le choc a donc transformé l'*ultra* particule au repos, du noyau, en une *infra* particule au repos, pourvue de l'énergie $m_0 c^2$. La libération de l'énergie a consisté au total, à convertir l'énergie du rayonnement incident en une énergie *infra*-particulaire. Il a été «*arraché*» au noyau une masse m_0 qui s'est trouvée de ce fait dotée d'une énergie $m_0 c^2$ qu'elle n'avait pas, tant qu'elle appartenait au noyau. Cette énergie a éte empruntée au rayonnement incident: elle a seulement changé de forme. Pourrait on dire: elle a été *transférée* du monde ultralumineux (intranucléaire) dans *notre* monde infralumineux (extranucléaire).

La condition de possibilité de ce transfert est que l'énergie initiale du rayonnement incident, $\mathcal{E}_0$, soit supérieure ou égale à $m_0 c^2$. Or, pour ce rayonnement incident — qui est une ultra-particule — on a:

$$\mathcal{E}_0=h\nu,$$

ν étant la fréquence de son ultracorpuscule (associé à une infraonde). On a vu que la longueur d'onde de celle-ci est:

$$\lambda=\frac{c}{\nu}.$$

D'où la condition de possibilité:

$$\lambda<\frac{h}{m_0 c}.$$

Si l'on admet que le plus petit constituant de la matiére est l'électron, on voit qu'un rayonnement ne commence à provoquer la désintégration du noyau qu'à partir des rayons γ:

$$\lambda<\lambda_\gamma^-.$$

La désintégration sera en général, d'autant plus facile que les «*ultra-projectiles*» employés seront *lourds*. En fait, c'est avec des particules α que Rutherford a réussi les premiéres désintégrations artificielles. Et dans les désintégrations réussies couramment depuis, (par neutrons, protons, deuterons), la longueur d'onde associée[1] est très courte (10^{-5} Å).

Il commence à se manifester une certaine «*cohérence*» dans les conséquences de notre hypothése. Des rayonnements d'une longueur d'onde supérieure à celle des rayons γ ont la propriété de traverser sans les perturber ni sans être perturbés, les noyaux atomiques. Cela explique bien la *transparence* de certains corps à la lumiére et aux rayons X. Les interactions entre rayonnement et matiére sont dus aux électrons libres et périphériques (émission, absorption, diffusion, diffraction). Et si la longueur d'onde du rayonnement incident dépasse λ_γ, on assiste à un nouveau genre de phénoménes : interaction du rayonnement et de la matiére nucléaire.

6. La Radioactivité. Les phénoménes de la radioactivité ont ceci de surprenant qu'ils paraissent violer le principe sacro-saint de la conservation de l'énergie. La difficulté est levée quand on confére l'énergie relativiste mc^2 à la matiére au repos. Mais, dans notre thése, la matiére nucléaire au repos ne posséde pas d'énergie. Il n'y a plus place à une «désintégration spontanée» d'éléments instables, puisque le réservoir d'énergie est *vide*. La désintégration ne peut venir que de chocs entre ultracorpuscules, disons plus briévement entre noyaux. C'est le moment de se servir de l'image des «*petites billes*».

A une autre échelle, nous avons l'exemple des trois états de la matiére : gaz d'une part et solide, liquide d'autre part. Les molécules des gaz sont douées d'une agitation «*thermique*», en conséquence de laquelle, elles se choquent, ce qui n'arrive pas aux molécules des deux autres états.

Il y a, disons nous, la même différence entre un élément chimique *radioactif* et un élément chimique *stable*, qu'entre les états gazeux et les états solide et liquide.

Dans un élément radioactif, ce sont les ultracorpuscules (ou noyaux) qui sont doués d'une agitation qui les améne à se choquer. Bien des chocs sont inoffensifs $(\lambda > \lambda_\gamma)$, mais ceux des noyaux pour lesquels : $\lambda < \lambda_\gamma$, provoquent des catastrophes nucléaires, dont la fréquence dépend de la distribution en probabilité des longueurs d'onde associées.

[1] En tant qu'ultracorpuscules, bien entendu.

7. Conclusion. Les ressources de nos schémas aléatoires sont encore loin d'être épuisées. Si, dans leur forme actuelle, ils ne sont pas encore en mesure d'apporter des théories *quantitatives*, ils auront du moins, projeté quelque lumiére sur des concepts obscurs des Nouvelles Mécaniques, et peut être, ouvert une voie à la Mécanique nucléaire.

Remarques complémentaires

1. Le paramétre d'évolution. Il a été reconnu souhaitable pour le raccord. de la Mécanique quantique avec la Relativité, d'introduire une statistique sur la coordonnée t, mais la difficulté est de le faire,en gardant dans la théorie, une *variable d'évolution,* ce qui ne paraît pas trés facile (L. de Broglie[1]).

Nous croyons bien que ce souhait est précisément réalisé par les considérations précédentes. Un paquet d'évenements représente en effet, un être physique, *à un instant macroscopique* t_0, entaché de l'incertitude $\sqrt{\overline{T'^2}}$. *L'évolution* d'un être physique est représenté par une *suite continue* de paquets d'événements, au même titre qu'en Relativité (non statistique), l'évolution d'un être physique *ponctuel* est représentée par une *ligne d'Univers.* L'évolution d'une être physique *aléatoire* est donc représentée par un *faisceau* de *lignes d'Univers,* concentré autour de la ligne d'Univers de *l'événement probable.* Celle-ci définit, à chaque instant t_0 (qui est le temps propre du système de référence considéré), la position du point probable dans l'espace géométrique, tandis que les caractéristiques statistiques du paquet (moments du second ordre), varient avec t_0. En somme, on pent dire que le point aléatoire (X, T) de l'espace-temps, est une *fonction aléatoire* du *paramétre d'évolution* t_0.

Il est donc parfaitement — et trés naturellement — possible d'introduire une statistique sur le temps, *tout en gardant une variable d'évolution.*

L'idée d'un temps aléatoire nous parait, d'autre part, conférer au temps de nouvelles propriétés qui pourraient rapprocher la notion vulgaire du Temps de sa notion relativiste. Mais ce sujet dépasse le cadre de cette Note.

2. Des moyennes; de la réconciliation du champ et du corpuscule. La Mécanique quantique, sous sa forme relativiste *(Dirac)* considère exclusivement des moyennes prises dans l'espace géométrique ; ce sont

[1] Rapport présenté à la Réunion organisée à Varsonie, en 1938, par l'Institut International de Coopération Intellectuelle.

des fonctions du temps *seul*. On peut les appeler des «*moyennes corpusculaires*» puisqu'elles se rapportent à chaque instant, à un être physique ayant une certaine extension spatiale, définie par une probabilité de présence.

Pour avoir des «*grandeurs de champ*», c'est à dire fonctions de x et de t, il faut considérer les «*densités de moyenne*», c'est à dire le coefficient de l'élément différentiel sous le signe $\int$. Mais alors, ces grandeurs, n'étant plus des moyennes, n'ont pas de signification physique.

Le schéma d'une distribution statistique dans l'espace-temps, fait disparaître ipso-facto ces difficultés et fait même surgir une possibilité nouvelle et inattendue, qui est sans doute la veritable clef du probléme.

La loi de probabilité conjuguée (x, t), des deux nombres aléatoires (X, T), peut se décomposer de deux maniéres en le produit d'une loi individuelle par une loi liée :

$$(x, t) = (x)(x; t) = (t)(t; x).$$

Il y a donc deux sortes de lois liées :

a) $(x; t)$, qui est déjà connue sous le nom de : *probabilité de présence* et qui est, en fait, celle employée dans les moyennes quantiques. Elle donne lieu à des moyennes fonctions de t seul (ou «corpusculaires)».

b) $(t; x)$, qu'est une loi jamais encore considérée et qu'on pourrait appeler : *probabilité d'existence.* Il lui correspond des moyennes, fonction de x (ou «*moyennes de champ*»).

Ces moyennes sont, comme les «*densités de moyenne*», des grandeurs de champ, mais elles sont susceptibles de recevoir un sens physique, du fait qu'elles sont des moyennes.

En réalité, les moyennes qui ont un sens physique *absolu* sont les moyennes *spatio-temporelles* (loi (x, t)) étendues au paquet d'événements qui seul, représente l'être physique sans découpage arbitraire. Ce qui a retenu jusqu'à présent, de les considérer, c'est que ces moyennes paraissaient être des *constantes*, ce qui aurait conduit à une Physique purement statique. Comme le dit L. de Broglie[1], au cours du temps, un atome subit des actions très diverses, est le siége d'effets *Stark* et d'effets *Zeeman* etc . . . Il paraît inacceptable de définir des valeurs propres dépendant de toute l'existence de l'atome, mais invariables au cours du temps.

[1] Loc cit.

La difficulté est ainsi mise en évidence, de la manière la plus claire, par ces citations (approximatives) empruntées au rapport de L. de Broglie.

Or, nous venons précisément de voir, que la vie d'une être physique est représentée par une *suite continue* de paquets d'événements — comme, lorsque cet être est ponctuel, elle est tracée par une ligne d'Univers. Alors, les moyennes spatio-temporelles, prises sur un paquet d'événements, deviennent des *fonctions du temps* t_0, qui n'est autre que le *temps propre* d'un système de référence quelconque, ou encore le temps propre d'un observateur macroscopique quelconque.

Ce point de vue nous paraît éminemment susceptible d'apporter une solution aux difficultés éprouvées par la Mécanique quantique relativiste, particulièrement par celle des Systèmes.

3. Considération des 4 dimensions. En réduisant l'espace-temps á 2 dimensions : x et t, nous avons simplifié à l'extrême l'exposé de nos idées — et c'était nécessaire pour les faire bien comprendre — mais nous nous somme privés en revanche des ressources complémentaires qu'offraient les dimensions x et y.

Introduisons les à présent et voyons comment elles enrichissent le schéma du paquet d'événements. On peut toujours placer l'axe des x, de manière que :

$$y_0 = \overline{Y} = 0 \text{ et } z_0 = \overline{Z} = 0 .$$

Les nouveaux moments à considérer sont :

a) $\overline{Y^2}$, $\overline{YZ}$, $\overline{Z^2}$, qui se transforment selon l'identité ; le moment rectangle $\overline{YZ}$ peut d'ailleurs disparaître par une rotation convenable des axes (y, z). Mais après cela les 3 axes $0(x, y, z)$ se trouvent fixés.

b) $\overline{XY}$, $\overline{TY}$ et $\overline{XZ}$, $\overline{TZ}$, qui se transforment selon :

$$\begin{cases} \overline{XY}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{|1-\beta^2|}}[\overline{XY}(\beta) + \beta c\, \overline{TY}(\beta)] \\ \overline{TY}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{|1-\beta^2|}}[\overline{TY}(\beta) + \beta/c\, \overline{XY}(\beta)], \end{cases}$$

et deux formules analogues pour $\overline{XZ}$ et $\overline{TZ}$. $\overline{XY}$ et $\overline{TY}$ se transforment donc respectivement comme x_0 et t_0, ou comme ct_0 et x_0/c.

D'après le principe suivi jusqu'à présent, d'identifier les grandeurs covariantes, nous devons poser :

$$\text{soit : } \frac{\overline{XY}}{x_0} = \frac{\overline{TY}}{t_0}$$

$$\text{soit : } \frac{\overline{XY}}{ct_0} = \frac{\overline{TY}}{x_0/c},$$

la valeur commune des rapports étant un *invariant*. Il y aura donc une des vitesses γ ou $1/\gamma$, pour laquelle : $\overline{TY}(\gamma)=0$,

— car $x_0(\gamma)$ ou $t_0(\gamma)$ est nul —

et pour la même raison : $\overline{TZ}(\gamma)=0$.

Dans le système $S(\gamma)$, les coordonnées d'espace sont indépendantes en probabilité de la coordonnée de temps.

Symétriquement, dans le système $S(1/\gamma)$, c'est X qui est indépendant de (T, Y, Z).

La transformation des moments rectangles admet l'invariant :

$$|\overline{XY}^2 - c^2\,\overline{TY}^2|,$$

qui est égal à :

$$\overline{XY}^2(\gamma),$$

puisque $\overline{TY}(\gamma)=0$.

4. Polarisation. Dans un système de référence quelconque, la distribution de probabilité dans le plan (y, z) consiste en une famille d'ellipses homothétiques. Cette famille est *invariante* par rapport à un changement du système de référence. C'est donc bien une *caractéristique intrinsèque* de l'être physique représenté par le paquet d'événements. Elle est éminemment propre à représenter la *polarisation* d'une onde (elliptique, circulaire ou rectiligne).

5. Moment cinétique de spin. A la vitesse aléatoire $V=\dfrac{X}{T}$, dirigée selon l'axe des x, correspond un moment cinétique, situé dans le plan (y, z) :

$$\xi_1=0, \quad \xi_2=m\overline{ZV}, \quad \xi_3=-m\overline{YV}.$$

Les moyennes sont prises dans *l'espace-temps* (ce qui est logiquement nécessaire puisque le temps est aléatoire, dans notre schéma).

Plaçons nous dans le système $S(0)$. On a:

$$V(0)=\frac{x_0(t_0)}{t_0(0)}+\frac{X'(0)-\gamma cT'(0)}{t_0(0)}.$$

D'où:

$$\xi_2(0)=\frac{m(0)}{t_0(0)}[\overline{ZX'}(0)-\gamma c\,\overline{T'Z}(0)];$$

et en vertu des formules de transformation:

$$\xi_2(0)=\frac{m(\gamma)}{t_0(\gamma)}\overline{ZX}(\gamma)=\xi_2(\gamma).$$

$\overline{ZX}(\gamma)$ étant un invariant, ξ_2 est aussi un *invariant* (car $S(0)$ est un système de référence quelconque).

Le paquet d'événements est donc pourvu d'un moment cinétique de «*spin*», invariant, situé dans le plan (y, z) et dont la grandeur est:

$$\xi=\frac{m(\gamma)}{t_0(\gamma)}\sqrt{\overline{ZX}^2(\gamma)+\overline{YX}^2(\gamma)}.$$

Si l'on attribue à ce moment la valeur $h/4\pi$ et qu'on le compare à l'expression trouvée pour l'incertitude:

$$\frac{m(\gamma)}{t_0(\gamma)}\overline{X'^2}(\gamma)=\frac{h}{4\pi},$$

on obtient la relation:

$$\overline{X'^2}(\gamma)=\sqrt{\overline{ZX}^2(\gamma)+\overline{YX}^2(\gamma)},$$

qu'on peut encore écrire:

$$\overline{X'^2}=r_1\,\overline{Y^2}+r_2\,\overline{Z^2},$$

r_1 et r_2 étant les coefficients de corrélation de Y et Z avec X (relation valable dans le système $S(\gamma)$).

Remarques. 1. D'après l'assimilation que nous avons faite des moments rectangles à x_0 et t_0, nous avons:

$$\frac{\overline{XY}(\gamma)}{c\,t_0(\gamma)}=\frac{\overline{XZ}(\gamma)}{c\,t_0(\gamma)}=\varkappa,$$

$\varkappa$ étant un invariant (il n'y a pas de raison d'attribuer des $\varkappa$ différents aux coordonnées Y et Z).

Nous aurons donc :

$$\begin{cases} \overline{XY}(\gamma) = \overline{XZ}(\gamma) = \varkappa c\, t_0(\gamma) \\ \overline{X'^2}(\gamma) = \sqrt{2}\, \varkappa c\, t_0(\gamma). \end{cases}$$

Ce sont là les lois d'évolution des caractéristiques statistiques du paquet (sous son aspect corpuscule), en fonction du temps propre $t_0(\gamma)$ du système de référence attaché au corpuscule.

Comme d'autre part :

$$\overline{X'^2}(\gamma) = \frac{h}{4\pi m(\gamma)}\, t_0(\gamma),$$

on en déduit :

$$\varkappa = \frac{h}{4\sqrt{2}\, \pi m(\gamma)\, c} = \frac{\lambda_0(\gamma)}{4\sqrt{2}\, \pi},$$

$\lambda_0(\gamma)$, étant la longueur d'onde associée au corpuscule (exprimée dans le système de référence qui lui est attaché).

2. $\lambda_0(\gamma)$, qui est proportionnel à $X'^2(\gamma)$, mesure l'étendue spatiale du corpuscule. C'est aussi un ordre de grandeur de la dimension au dessous de laquelle les concepts statistiques cessent d'être valables, puisqu'alors la finesse de l'observation est telle qu'on n'intégre pas dans un domaine assez grand pour *estimer* les valeurs probables.

A cette échelle, le déterminisme statistique n'existe plus, l'observation portant sur un trop petit nombre d'épreuves individuelles pour permettre á la régularisation des moyennes, de jouer. La loi d'évolution :

$$\overline{X'^2}(\gamma) = \frac{h}{4\pi m(\gamma)}\, t_0(\gamma),$$

qui est celle du mouvement brownien, montre d'ailleurs bien que les déplacements des points-événements suivent les caprices du hasard.

6. Nouvelle conception de la charge électrique. Nous avons, comme il est classique, considéré la charge électrique comme étant la moyenne *spatiale* de la densité de charge électrique. Conformément à notre nouveau point de vue, au sujet des moyennes, ce sera maintenant la moyenne *spatio-temporelle* de la densité de charge. La charge du corpuscule sera donc :

$$\bar{\rho}(\gamma);$$

c'est un *invariant*, qui s'écrit dans le système de référence de l'observateur :

$$\mathrm{Moy}\left\{\sqrt{|\rho^2(0) - j^2(0)|}\right\}.$$

7. Moment magnétique de spin. Avec le point de vue des moyennes *spatio-temporelles*, le moment magnétique de spin est :

$$\mathfrak{M}_1 = 0\,; \quad \mathfrak{M}_2 = \bar{\rho}\,\frac{\overline{ZV}}{c}\,; \quad \mathfrak{M}_3 = -\bar{\rho}\,\frac{\overline{YV}}{c}\,.$$

Dans le système $S(0)$, on a :

$$\mathfrak{M}_2(0) = \bar{\rho}(0)\,\frac{\overline{ZX}(0) - \gamma c\,\overline{TX}(0)}{ct_0(0)} = \bar{\rho}(\gamma)\,\frac{\overline{ZX}(\gamma)}{ct_0(\gamma)}\,,$$

qui est un *invariant*.

$\bar{\rho}(\gamma)$ n'étant autre que la charge e du corpuscule, on a :

$$\mathfrak{M} = \frac{e\zeta}{mc} = \frac{he}{4\pi mc}\,.$$

Le corpuscule est donc doué d'un moment magnétique, porté par le même support que le moment cinétique, et égal à un magnéton quand le moment cinétique est égal à un demi-quantum.

Il nous semble bien à présent que nous ayons réussi à fabriquer un être mathématique pourvu de toutes les propriétés que les Physiciens prêtent aux particules élémentaires, y compris leur double aspect d'onde et de corpuscule. Et nous sommes persuadés qu'il y a là beaucoup plus qu'une simple image.