PORTUGALIAE PHYSICA
Vol. 3 — Fasc. 1 — 1949

ENERGIE LIBRE ET FONCTION DE LAGRANGE. APPLICATION À L'ELECTRODYNAMIQUE ET À L'INTERACTION ENTRE COURANTS ET AIMANTS PERMANENTS

par LOUIS DE BROGLIE

(Reçu le 17 Novembre 1948)

117

1. Énergie libre et fonction de Lagrange. Une curieuse analogie entre la notion mécanique de «fonction de Lagrange» et la notion thermodynamique «d'énergie libre» a été signalée, il y a fort longtemps déjà par Helmholtz. Nous allons d'abord la rappeler.

Partons de la relation thermodynamique classique

$$(1) \qquad dW = dQ - p\,dV = T\,dS - p\,dV$$

et introduisons avec Helmholtz une variable ε telle que, par définition, la température soit la *vitesse* $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$ correspondant à cette variable. Nous posons donc:

$$(2) \qquad T = \dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Nous plaçant au point de vue du schéma général des équations de Lagrange, nous désignerons par $\mathcal{E}$ la force généralisée correspondant à la variable ε et nous aurons

$$(3) \qquad dW = \mathcal{E}\,d\varepsilon - p\,dV = \mathcal{E}\dot{\varepsilon}\,dt - p\,dV$$

d'ou par identification avec (1)

$$(4) \qquad \mathcal{E}\dot{\varepsilon}\,dt = T\,dS$$

ou

$$(5) \qquad \mathcal{E} = \dot{S}$$

Nous supposerons que la variable ε est du type qu'on nomme «cyclique» en Mécanique analytique, c'est à dire que la fonction de Lagrange ne contient pas ε.

Envisageons alors un processus reversible extrêmement lent pour lequel on aura $\dot{V} \simeq 0$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{V}} = 0$. Les équations de Lagrange pour les variables ε et V seront alors

$$(6) \qquad -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V} = -p \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varepsilon}}\right) = \mathcal{S}$$

ou

$$(6') \qquad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varepsilon}} = \int \mathcal{S}\, dt = \int \dot{S}\, dt = S$$

L'énergie sera donnée d'après sa définition générale en Mécanique analytique par

$$(7) \qquad W = \dot{\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varepsilon}} + \dot{V} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{V}} - \mathcal{L} = TS - \mathcal{L}$$

d'où

$$(8) \qquad \mathcal{L} = TS - W = -F$$

F étant l'énergie libre. Pour T constant, nous aurons

$$(9) \qquad d\mathfrak{T} = p\,dV = -dW + TdS = -d(W - TS) = -dF$$

$d\mathfrak{T}$ étant le travail effectué à l'extérieur, et nous retrouvons ainsi une propriété bien connue de l'énergie libre.

Le schéma canonique de Helmholtz comportant l'introduction d'une variable cyclique ε dont la température est la vitesse est fort curieux. Il conduit, comme le montre l'équation (8) à identifier l'énergie libre avec la fonction de Lagrange changée de signe. C'est là une analogie très remarquable qui a été utilisée par divers auteurs, notamment par Max Planck[1] dans ses études de thermodynamique relativiste. Nous allons la voir réapparaitre sous une autre forme.

2. Transformations à p_i constants et à $\dot{q}_i$ constants. Considérons un système mécanique dont la fonction de Lagrange est

$$\mathcal{L}(q_1 \cdots q_i \cdots \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_i \cdots),$$

les q_i étant les variables de Lagrange et les $\dot{q}_i$ les vitesses correspondantes. Nous poserons suivant l'usage en Mécanique analytique

[1] *Annalen der Physik*, t. 26 (1907) p. 1.

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \qquad W = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \tag{10}$$

pour définir les moments de Lagrange p_i et l'énergie du système. Les équations de Lagrange auront la forme générale

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + Q_i \tag{11}$$

les Q_i représentant des forces généralisées agissant de l'extérieur sur le système de sorte que le travail élémentaire *reçu* par le système soit $\sum_i Q_i dq_i$, tandis que les $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$ représentent l'ensemble des forces intérieures (dérivant des interactions internes et des forces d'inertie introduites par le choix des variables q_i).

Nous définirons l'énergie libre du système en accord avec les idées d'Helmholtz par la relation

$$F = -\mathcal{L} \tag{12}$$

soit $d\mathcal{T}_e$ le travail infinitésimal fourni au système par les forces extérieures et $d\mathcal{T}_i$ le travail infinitésimal effectué par les forces internes et les forces d'inertie. On a

$$d\mathcal{T}_e = \sum_i Q_i dq_i \qquad d\mathcal{T}_i = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i . \tag{13}$$

En différenciant l'expression de W, nous trouvons

$$\begin{aligned} dW &= \sum_i p_i d\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i = \\ &= \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i . \end{aligned} \tag{14}$$

En écrivant ceci, nous supposons que le système est purement mécanique, c'est à dire qu'il n'y a pas d'échanges de chaleur. Nous trouverons ensuite

$$d\mathcal{T}_e = \sum_i Q_i dq_i = \sum_i [\dot{p}_i dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i] = \sum_i [\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i] = dW \tag{15}$$

Ce résultat exprime la conservation de l'énergie.

Nous allons maintenant envisager deux cas particuliers.

a) *Les p_i sont maintenus constants.*

On a $dp_i=0$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}+Q_i=0$. Il y a donc équilibre entre les forces extérieures et les forces intérieures et d'inertie. On a donc $d\mathcal{T}_i=-d\mathcal{T}_e=-dW$, ce que nous écrirons

$$[d\mathcal{T}_i]_p=-[dW]_p \tag{16}$$

l'indice p rappelant que les p_i sont maintenus constants. Le travail $-d\mathcal{T}_e=d\mathcal{T}_i$ fourni à l'extérieur est égal à la diminution de l'énergie interne : aucun apport extérieur d'énergie n'est donc nécessaire.

b) *Les $\dot{q}_i$ sont maintenus constants.*

Alors $d\dot{q}_i=0$ et $[d\mathcal{L}]_{\dot{q}}=\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}dq_i$, d'où

$$[d\mathcal{T}_i]_q=\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}dq_i=[d\mathcal{L}]_{\dot{q}}=-[dF]_{\dot{q}} \tag{17}$$

Le travail des forces intérieures et d'inertie est égal à la diminution de l'énergie libre. Ici l'on n'a plus $dW+d\mathcal{T}_i=0$, mais d'après (14)

$$dW+d\mathcal{T}_i=\sum_i \dot{q}_i\,dp_i. \tag{18}$$

La quantité d'énergie $\sum_i \dot{q}_i\,dp_i$ doit donc être fournie au système.

Supposons les vitesses assez faibles par rapport à celle de la lumière pour pouvoir négliger les corrections de relativité et employer les formules de la Mécanique classique. L'énergie cinétique E_{cin} sera alors une fonction quadratique homogène des $\dot{q}_i$ et l'on aura

$$2E_{\text{cin}}=\frac{\partial E_{\text{cin}}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \tag{19}$$

d'où, puisque les $\dot{q}_i$ sont par hypothèse maintenus constants

$$2d\,E_{\text{cin}}=\sum_i \dot{q}_i\,dp_i. \tag{20}$$

La quantité d'énergie à fournir au système est donc alors égale à deux fois l'augmentation de l'énergie cinétique : la moitié de l'énergie fournie se retrouve dans l'augmentation de l'énergie cinétique, l'autre moitié sert à couvrir le travail des forces d'inertie.

On peut présenter la question autrement. La force Q_i peut être considérée comme la somme d'une force $Q_i' = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$ qui équilibre les forces internes et d'inertie et d'une force $Q_i'' = Q_i - Q_i'$ qui fournit l'énergie nécessaire au maintien de la valeur constante des $\dot{q}_i$. Des équations de Lagrange, on tire

$$
(21) \qquad \begin{aligned} \sum_i \dot{q}_i dp_i = \sum_i \dot{p}_i dq_i = \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + Q_i'\right] dq_i + \sum_i Q_i'' dq_i \\ = \sum_i Q_i'' dq_i \end{aligned}
$$

et l'on voit que le travail $\sum_i Q_i'' dq_i$ des forces Q_i'' a bien la valeur $\sum_i \dot{q}_i dp_i$.

3. Application à la Thermodynamique suivant le schéma d'Helmholtz. Dans les calculs faits au paragraphe I pour exposer le schéma canonique d'Helmholtz, nous avons supposée $\dot{V} = 0$. Si, de plus, nous supposons $\dot{\varepsilon} = T = C^{te}$ nous serons dans le cas des $\dot{q}_i$ constants et, d'après (17), nous obtiendrons la relation classique en Thermodynamique :

$$
(22) \qquad d\mathfrak{T}_T = -[dF]_T = TdS - dW.
$$

Désignons par l'indice 1 ce qui concerne le volume et par l'indice 2 ce qui concerne la variable ε. Nous avons

$$
(23) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} + Q_1' = 0 \quad \text{avec} \quad Q_1' = p, \qquad Q_1'' = 0 \\ &\frac{dp_\varepsilon}{dt} = Q_2'' \qquad\quad \text{avec} \quad Q_2' = 0, \qquad Q_2'' = \mathcal{S}. \end{aligned}
$$

L'énergie fournie au système par les forces Q_i' est

$$
(24) \qquad d\mathfrak{T}_i = -Q_1' dq_1 - Q_2' dq_2 = p\, dV
$$

Celle fournie par les forces Q_i'' est

$$
(25) \qquad Q_1'' dq_1 + Q_2'' dq_2 = \mathcal{S} d\varepsilon = \dot{S}\, \dot{\varepsilon}\, dt = TdS = dW + d\mathfrak{T}_T
$$

Ces résultats sont bien ceux que nous avions trouvés plus haut pour le cas des $\dot{q}_i$ constants.

Pour être dans le cas opposé des p_i constantes, il faut que $p_\varepsilon = S$ soit constant : la transformation est alors isentropique, $\mathcal{S} = \dot{S}$ est nul et l'on a

$$(26) \qquad [d\mathcal{T}_i]_s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V} dV + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon} d\varepsilon = p\,dV = -[dW]_s$$

Aucun apport d'énergie n'est nécessaire.

Nous avons ainsi une vérification complète de la théorie générale du paragraphe précédent. On en trouverait d'autres en étudiant des systèmes mécaniques [1] et en appliquant au cas de l'électrostatique. Nous laisserons ici de côté ces illustrations de la théorie générale et nous nous bornerons à faire son application au cas de l'Electrodynamique.

4. Application à l'Electrodynamique.

a) *Absence d'aimants permanents.*

Considérons d'abord des circuits parcourus par des courants qui interagissent sans intervention d'aimants permanents.

Nous distinguerons les coordonnées q_j qui fixent la position et la forme des circuits et les coordonnées «électriques» q_k (qui sont ici des charges électriques) telles que l'intensité du courant dans le k^e circuit soit :

$$(27) \qquad I_k = \dot{q}_k .$$

Si les conducteurs sont immobiles ou presque, les vitesses $\dot{q}_j$, les moments p_j et l'énergie cinétique mécanique sont nuls ou négligeables. L'énergie cinétique due au mouvement de l'électricité est

$$(28) \qquad W = \frac{1}{2} \sum_{kk'} M_{kk'} I_k I_{k'} = \mathcal{L} = -F \qquad (M_{kk'} = M_{k'k})$$

les $M_{kk'}$ étant les coefficients d'induction qui sont fonctions des coordonnées mécaniques q_j. Les équations de Lagrange relatives aux q_k sont

$$(29) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) = Q_k \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}\left(\sum_{k'} M_{kk'} I_{k'}\right) = Q_k$$

les Q_k étant les forces électromotrices. Comme $Q'_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$, on a ici $Q_k = Q''_k$.

Les $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{k'} M_{kk'} I_{k'}$, sont les *flux* qui traversent les divers

[1] Voir par exemple J. B. Pomey — *Cours d'Electricité théorique* — Gauthier Villars — t. I, pages 77-79.

circuits : ils jouent ici le rôle de moments de Lagrange. Si l'on maintient constants les p_k, c'est à dire les flux, les Q''_k sont nuls et, si les circuits se déforment pour que les flux restent constants, les intensités des courants doivent varier. Le travail alors effectué par les forces Q_j est

$$(30) \qquad [d\mathfrak{T}]_p = -[dW]_p = \frac{1}{2}\sum_{jkk'} \frac{\partial M_{kk'}}{\partial q_j} I_k I_{k'} dq_j$$

car

$$(31) \qquad dW = d\left(\frac{1}{2}\sum_k p_k I_k\right) = \frac{1}{2}\sum_k p_k dI_k =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{kk'} M_{kk'} I_{k'} dI_k = -\frac{1}{2}\sum_{kk'} I_k I_{k'} dM_{kk'}\,.$$

Si, au contraire, on maintient constantes les *intensités* de courant, les flux varient par suite du déplacement et de la déformation des circuits et, pour maintenir les intensités constantes, il faut faire intervenir des forces électromotrices extérieures qui comprennent les forces électromotrices d'induction dues aux variations du flux. On a alors $Q''_k \neq 0$ et le travail $d\mathfrak{T}_i$ est donné par

$$(32) \qquad [d\mathfrak{T}_i]_{\dot q} = -[dF]_{\dot q} = [dW]_{\dot q} = \frac{1}{2}\sum_{jkk'} \frac{\partial M_{kk'}}{\partial q_j} I_k I_{k'} dq_j$$

comme en (30).

Les forces électromotrices Q''_k fournissent alors l'énergie nécessaire pour compenser d'une part le travail $d\mathfrak{T}_i$ et pour augmenter d'autre part, l'énergie W d'une quantité égale.

Nous retrouvons ainsi tous les résultats de la théorie générale du paragraphe 2.

b) *Intervention d'aimants permanents.*

Supposons qu'en plus des circuits considérés ci-dessus, nous ayons des aimants permanents. L'Electrodynamique nous apprend que la déformation des circuits à *intensités constantes* s'accompagne de la fourniture du travail.

$$(33) \qquad [d\mathfrak{T}_i]_{\dot q} = \sum_j \left[\sum_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial q_j} I_k + \frac{1}{2}\sum_{kk'} \frac{\partial M_{kk'}}{\partial q_j} I_k I_{k'}\right] dq_j$$

où Φ_k est le flux magnétique envoyé par les aimants permanents à travers le k^e circuit. Comme ce travail doit être égal à $-[dF]_{\dot q}$, on en déduit que :

$$(34) \qquad F = W_0 - \sum_k \Phi_k I_k - \frac{1}{2} \sum_{kk'} M_{kk'} I_k I_{k'}$$

W_0 étant une constante. On doit aussi avoir

$$(35) \qquad W = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \mathcal{L} = F - \sum_k I_k \frac{\partial F}{\partial I_k}$$

On peut écrire $F = F_0 + F_1 + F_2$, $F_0\, F_1\, F_2$ étant des fonctions homogènes des I_k de degré égal à leur indice. On a donc

$$(36) \qquad W = (F_0 + F_1 + F_2) - (F_1 + 2F_2) = F_2 - F_0$$

d'après le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, d'où

$$(37) \qquad W = W_0 + \frac{1}{2} \sum_{kk'} M_{kk'} I_k I_{k'}$$

Le terme W_0 est visiblement égal à l'énergie propre des aimants permanents qui est invariable par hypothèse. Le deuxième terme dans l'expression de W est l'énergie mutuelle des courants entre eux. Le résultat remarquable contenu dans (37), c'est qu'il n'y a pas d'énergie mutuelle des courants et des aimants permanents, tout au moins si ces derniers sont des aimants permanents *idéaux,* c'est à dire tout à fait insensibles à la valeur des champs électromagnétiques auxquels ils sont soumis. Ce résultat a donné lieu à pas mal de controverses dues à une confusion entre les fonctions F et W. La question présentant de l'intérêt, nous allons l'étudier plus à fond.

5. Energie propre d'un aimant permanent idéal. Nous appellerons "aimant permanent idéal" un corps polarisé magnétiquement dont l'intensité d'aimantation reste invariable quelles que soient la valeur et les variations des champs électromagnétiques auxquels il est soumis. Les aimants naturels ne satisfont à cette définition que dans une certaine mesure puisqu'on peut les désaimanter en leur appliquant un champ magnétique suffisamment intense (champ coërcitif). Nous supposons donc que les amplitudes des champs appliqués à l'aimant sont assez faibles pour ne pas faire varier son aimantation. Les propriétés de l'aimant réel seront alors assimilables à celes de l'aimant permanent ideal.

On serait tenté de dire que l'énergie propre d'un aimant permanent est nulle. En effet, d'après la théorie électromagnétique la densité d'énergie dans un champ est $\frac{1}{8\pi}\,(\vec{B}\cdot\vec{H}+\vec{D}\cdot\vec{E})$, $\vec{H}$ et $\vec{E}$ étant les champs, $\vec{B}$ et $\vec{D}$ les inductions correspondantes. L'énergie propre d'un aimant permanent devrait donc être donnée par la formule

$$W_a = \frac{1}{8\pi} \iiint \vec{B} \cdot \vec{H} d\tau \tag{38}$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace aussi bien à extérieur de l'aimant ou $\vec{B} = \vec{H}$ qu'à son intérieur ou $\vec{B} \neq \vec{H}$. Dans un aimant rectiligne, nous pouvons supposer qu'à l'intérieur de l'aimant, $\vec{B}$ et $\vec{H}$ sont parallèles. Traçons un tube d'induction infiniment délié : la relation $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ nous montre qu'un tel tube est fermé sur lui-même. Soit un élément du tube de section ds et de longeur dl: l'élément correspondant dans l'intégrale de (38) pourra s'écrire $B\,ds \cdot H\,dl$: Or $B\,ds$ est le flux Φ de l'induction qui est constant tout le long du tube et par suite l'intégrale pour le tube est $\Phi \int H\,dl$. Comme le champ magnétique d'un aimant dérive d'un potentiel, l'intégrale $\int H\,dl$ pour le tube fermé sur lui-même est nulle. La contribution de chaque tube d'induction étant nulle, l'énergie totale W_a de aimant serait nulle.

Mais le résultat précédent est inexact parce que la formule $w = \frac{1}{8\pi}(\vec{B} \cdot \vec{H} + \vec{D} \cdot \vec{E})$ donnant la densité de l'énergie électromagnétique n'est pas ici applicable. Sa démonstration à partir des équations de Maxwell se fait en effet de la façon suivante. On part des équations classiques

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \operatorname{rot} \vec{E} & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{4\pi}{c}\vec{i} & \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho \end{aligned} \tag{39}$$

ou ρ et $\vec{i}$ sont les densités de charge et de courant. On multiplie scalairement la troisième équation par $\vec{E}$ en remarquant que le travail élémentaire du champ sur les charges par unités de temps et de volume est $\vec{E} \cdot \vec{i}$ et l'on obtient pour ce travail l'expression

$$\delta \mathfrak{T} = \vec{E} \cdot \vec{i} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{40}$$

Le travail total par unité de temps s'obtient en intégrant cette expression dans l'espace. Si l'on suppose les champs nuls à l'infini, on obtient, par une intégration par parties avec emploi de la première relation de Maxwell, comme expression du travail effectué par unité de temps par le champ électromagnétique sur les charges

$$(41) \qquad \mathcal{T} = -\frac{1}{4\pi}\iiint\left[\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right]d\tau\,.$$

Si l'on admet que les champs et les inductions sont liés par les relations

$$(42) \qquad \vec{B} = \mu\vec{H} \qquad \vec{D} = \chi\vec{E}$$

où μ et χ sont des constantes dans le temps, on a

$$(43) \qquad \mathcal{T} = -\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{8\pi}\iiint(\vec{B}\cdot\vec{H} + \vec{D}\cdot\vec{E})\,d\tau\right]$$

ce qui conduit à attribuer à l'énergie électromagnétique la valeur

$$(44) \qquad W = \frac{1}{8\pi}\iiint[\vec{B}\cdot\vec{H} + \vec{D}\cdot\vec{E}]\,d\tau$$

Mais cette relation n'est démontrée qu'en admettant une relation linéaire entre les inductions et les champs et une telle relation n'est pas satisfaite à l'intérieur des aimants permanents.

En effet, dans un aimant permanent idéal, l'intensité d'aimantation a en chaque point une valeur $\vec{I_0}$ qui, par définition est indépendante du champ magnétique $\vec{H}$. On a donc dans l'aimant :

$$(45) \qquad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{I_0}$$

et $\vec{B}$ n'est pas proportionnel à $\vec{H}$. De la formule (41) qui est toujours valable, on tire ici, puisque $\vec{D} = \vec{E} = 0$ et que $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ aussi bien dans l'aimant qu'hors de l'aimant,

$$(46) \qquad \mathcal{T} = -\frac{1}{4\pi}\iiint\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\,d\tau = -\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{8\pi}\iiint H^2\,d\tau\right].$$

L'énergie propre de l'aimant est donc égale à

$$(47) \qquad W_a = \frac{1}{8\pi}\iiint H^2\,d\tau$$

et non à (38).

Nous allons vérifier ce résultat en considérant le cas schématique d'un barreau magnétique rectiligne de section droite S et de longueur l dont les extremités sont supposées porter une densité uniforme de magnétisme égale à $\pm\sigma$ de sorte que les charges magnétiques des extremités sont $\pm Q = \pm\sigma S$.

$$\overset{l}{\overline{}}$$
$$-Q \begin{smallmatrix}-\\-\\-\end{smallmatrix}\boxed{S \qquad S}\begin{smallmatrix}+\\+\\+\end{smallmatrix} +Q$$

Le moment magnétique de l'aimant étant $Ql = \sigma Sl$, l'intensité d'aimantation I_0 est égale à σ et l'énergie propre du barreau est d'après (47)

$$W_a = \frac{1}{8\pi}\iiint H^2 d\tau = \frac{1}{8\pi}\iiint BH d\tau - \frac{1}{2}\iiint I_0 H d\tau \tag{48}$$
$$= \frac{1}{8\pi}\iiint BH d\tau - \frac{\sigma}{2}\iiint H dl$$

la première intégrale étant étendue à tout l'espace et la seconde à l'intérieur de l'aimant. Mais le raisonnement fait précédement montre que la première intégrale est nulle et comme H est constant dans l'aimant

$$W_a = W_0 = -\frac{\sigma_0 S}{2}\int H dl = -\frac{Q}{2}\int H dl = \frac{QV}{2} \tag{49}$$

V étant la différence de potentiel magnétique entre les deux extremités de l'aimant.

La formule (49) est satisfaisante car elle est entièrement analogue à celle qui donne l'énergie d'un condensateur plan dont les armatures porteraient une charge Q et présenteraient entre elles une différence de potentiel V avec cette seule différence qu'ici Q et V sont des charges et des potentiels magnétiques.

L'expression que nous avons trouvée pour l'énergie propre d'un aimant permanent va nous permettre de donner une démonstration du théorème dû à Vaschy suivant lequel il n'y a pas d'énergie mutuelle entre aimants permanents et courants.

6. Théorème de Vaschy. Le théorème de Vaschy peut s'énoncer ainsi: «L'énergie mutuelle des aimants permanents (ideaux) et des courants est nulle».

Soit un ensemble de courants et d'aimants permanents ideaux placés dans un milieu non polarisable ($\mu = \chi = 1$). Le champ magnétique $\vec{H}$ en un point du milieu est la somme géométrique du champ $\vec{H}_c$ créé par les courants et du champ $\vec{H}_a$ créé par les aimants

$$\vec{H} = \vec{H}_c + \vec{H}_a . \tag{50}$$

Puisque, d'après ce que nous avons vu, la densité de l'énergie est partout égale, même à l'intérieur des aimants, à $\frac{H^2}{8\pi}$, l'énergie totale du système est

$$W = \frac{1}{8\pi}\iiint(\vec{H}_a + \vec{H}_c)^2 d\tau = \frac{1}{8\pi}\iiint H_a^2 d\tau + \frac{1}{8\pi}\iiint H_c^2 d\tau + \frac{1}{4\pi}\iiint \vec{H}_c \cdot \vec{H}_a d\tau . \tag{51}$$

La première intégrale est égale à l'énergie propre des aimants; la seconde est égale à l'énergie des courants et des transformations de calcul classiques montreraient qu'elle vaut $\frac{1}{2}\sum_{kk'} M_{kk'} I_k I_{k'}$. Enfin, la dernière intégrale de (51) doit évidemment donner l'énergie mutuelle des aimants et des courants. Mais le champ magnétique créé par les courants dérive d'un potentiel-vecteur $\vec{A}$, tandis que le champ magnétique créé par les aimants dérive d'un potentiel magnétique de sorte que l'on a

$$\vec{H}_c = \mathrm{rot}\,\vec{A} \qquad \vec{H}_a = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V. \tag{52}$$

Une intégration par parties donne alors pour l'énergie mutuelle des aimants et des courants la valeur

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint \vec{H}_c \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V d\tau = \frac{1}{4\pi}\iiint V \,\mathrm{div}\,\vec{H}_c d\tau = 0 \tag{53}$$

car $\mathrm{div\,rot}\,\vec{A} = 0$.

L'énergie mutuelle en question est donc bien nulle en accord avec le résultat précédemment obtenu, mais nous allons encore regarder la question de plus près.

7. Examen détaillé du cas de deux circuits indéformables. Soient deux circuits supposés pour simplifier indéformables. Désignons les par 1 et 2 et soient I_1 et I_2 les intensités de courant qui les parcourent.

D'après les formules générales du paragraphe **4**, *a*, l'énergie W et l'énergie libre F du système sont données par

$$W = -F = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2 \tag{54}$$

L_1 et L_2 étant les coefficients de selfinduction des deux circuits, M_{12} leur coefficient d'induction mutuelle. Si nous déplaçons le circuit 2 par rapport au circuit 1, les coefficients L_1 et L_2 ne varient pas puisque les circuits sont supposés indéformables, mais M_{12} varie.

Supposons d'abord qu'on maintienne les intensités I_1 et I_2 constantes pendant le déplacement du circuit 2. Comme le flux magnétique envoyé par chaque circuit à travers l'autre varie, il nait dans chacun d'eux une force électromotrice d'induction et pour empêcher les courants de varier, il faut contrebalancer ces forces électromotrices en introduisant dans les circuits des électromoteurs de force électromotrice e_1 et e_2 de valeur appropriées. Les lois de l'induction et la définition des coefficients d'induction mutuelle montrent qu'on doit avoir

$$(55)\qquad e_1 = \frac{\partial}{\partial t}(M_{12} I_2) = I_2 \frac{\partial M_{12}}{\partial t}; \qquad e_2 = \frac{\partial}{\partial t}(M_{21} I_1) = I_1 \frac{\partial M_{12}}{\partial t}$$

L'énergie fournie par les électromoteurs pendant un déplacement élémentaire est donc égal à

$$(56)\qquad e_1 I_1 dt + e_2 I_2 dt = 2 I_1 I_2 dM_{12}$$

D'autre part, le travail effectué par les forces électrodynamiques sur le circuit 2 pendant le déplacement élémentaire est $I_1 I_2 dM_{12}$. Enfin l'énergie W subit la variation

$$(57)\qquad dW = I_1 I_2 dM_{12}$$

Finalement l'énergie fournie par les électromoteurs e_1 et e_2 sert par moitié à compenser le travail accompli par les forces électrodynamiques et par moitié à augmenter la réserve d'énergie magnétique W. Ceci est conforme à la théorie générale puisqu'ici la variation s'opère à I_k constants, donc à $\dot{q}_k$ constants.

Considérons maintenant une variation à p_k constants. Les p_k donnés par

$$(58)\qquad p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_1} = L_1 I_1 + M_{12} I_2; \qquad p_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_2} = L_2 I_2 + M_{21} I_1$$

sont les flux magnétiques à travers les deux circuits. Pour qu'ils restent constants, il faut que les variations de I_1, I_2 et M_{12} soient telles que

$$(59)\qquad -dM_{12} = \frac{1}{I_2}[L_1 dI_1 + M_{12} dI_2] = \frac{1}{I_1}[L_2 dI_2 + M_{12} dI_1].$$

Le travail des forces électrodynamiques est ici d'après la théorie générale

$$(60) \quad I_1 I_2 dM_{12} = -\frac{1}{2}[L_1 I_1 dI_1 + M_{12} I_2 dI_1 + L_2 I_2 dI_2 + M_{12} I_1 dI_2].$$

Or cette expression est égale à $-dW$ car

$$(61) \qquad W = \frac{1}{2}(p_1 I_1 + p_2 I_2)\,; \qquad dW = \frac{1}{2}[p_1 dI_1 + p_2 dI_2]$$

puisque les p restent constants et (61) montre bien que $-dW$ est égal au second membre de (60). Donc ici, toujours en accord avec la théorie générale, le travail des forces électrodynamiques est égal à la diminution de la réserve d'énergie magnétique localisée autour des circuits, de sorte que toute fourniture d'énergie extérieure est inutile.

8. Examen détaillé du cas d'un circuit indéformable en présence d'un aimant permanent idéal. Nous allons maintenant remplacer l'un des circuits par un aimant permanent idéal. D'après les formules du paragraphe **4**, *b*, nous avons alors pour W et F les expressions

$$(62) \qquad W = W_0 + \frac{1}{2} L I^2\,; \qquad F = W_0 - \Phi I - \frac{1}{2} L I^2 = -\mathcal{L}$$

L étant le coefficient de selfinduction du circuit parcouru par le courant I, Φ le flux que l'aimant envoie dans ce circuit et W_0 l'énergie propre de l'aimant.

Déplaçons le circuit par rapport à l'aimant en maintenant I constant. Le flux Φ variant, il nous faut pour celà introduire dans le circuit une force électromotrice de valeur $e = \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$ pour compenser la force électromotrice d'induction.

L'énergie fournie par l'électromoteur est pendant le temps dt

$$(63) \qquad e I dt = I \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt = I d\Phi\,.$$

Or, le travail des forces électrodynamiques est aussi égal à $I d\Phi$. Donc ici l'énergie fournie par l'électromoteur compense le travail des forces électrodynamiques et il n'y a pas à faire intervenir une énergie mutuelle de l'aimant permanent et du courant, ce qui confirme les résultats précédents. Comme nous opérons à $\dot{q} = I$ constant, nous avons bien pour le travail des forces électrodynamiques

$$(64) \qquad [d\mathcal{T}_i]_{\dot{q}} = -[dF]_{\dot{q}} = I d\Phi$$

comme le veut la théorie générale.

Ici $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I} = LI + \Phi$ est encore le flux magnétique total à travers le circuit. Si, au lieu d'opérer à I constant, on opérait à p constant, on aurait

$$dW = LIdI = -\,Id\Phi \tag{65}$$

et comme le travail des forces électrodynamiques est toujours $Id\Phi$, on a conformément à la théorie générale

$$[d\mathfrak{T}_i]_p = -\,[dW]_p. \tag{66}$$

On voit bien par les raisonements qui précèdent pourquoi dans le cas de deux circuits, il faut admettre l'existence d'une énergie mutuelle localisée dans le milieu ambiant, tandis qu'une telle supposition est inutile dans le cas d'un circuit en présence d'un aimant permanent idéal.

9. Un travail d'André Blondel. Dans certains traités de Physique, on trouve des énoncés de la loi de l'induction tels que celui-ci : «Quand, *pour une cause quèlconque*, le flux d'induction magnétique qui traverse un circuit vient à varier, une force électromotrice d'induction apparait dans ce circuit». Un tel énoncé est trop général. Le flux peut, en effet varier de deux manières : d'abord l'induction magnétique à l'endroit où se trouve le circuit peut varier au cours du temps $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \neq 0\right)$; ensuite le circuit peut se déformer ou se déplacer. Mais pour que, dans ce dernier cas, il y ait apparition d'une force électromotrice d'induction, il faut que le circuit dans son déplacement *coupe* les lignes d'induction magnétique. Du point de vue électronique, ceci est évident car la force subie par les électrons du circuit est $\frac{e}{c}[\vec{v} \times \vec{B}]$ et la force électromotrice qui en résulte dans un élément dl du circuit est proportionnelle à la composante suivant dl de l'ensemble des forces agissant sur les électrons, soit à $\vec{dl} \cdot [\vec{v} \times \vec{B}] = \vec{B} \cdot [\vec{dl} \times \vec{v}]$. Comme $[\vec{dl} \times \vec{v}]$ est un vecteur normal à la surface balayée en l'unité de temps par l'élément de circuit et égal à son aire, $\vec{B} \cdot [\vec{dl} \times \vec{v}]$ est le flux coupé par unité de temps par l'élément dl. Si donc il est possible de faire varier le flux d'induction à travers le circuit sans qu'il y ait de flux coupé, il n'y aura pas de force électromotrice induite contrairement à l'énoncé trop général des lois de l'induction rappelé ci-dessus.

André Blondel dans un travail très original[1] a étudié de près cette

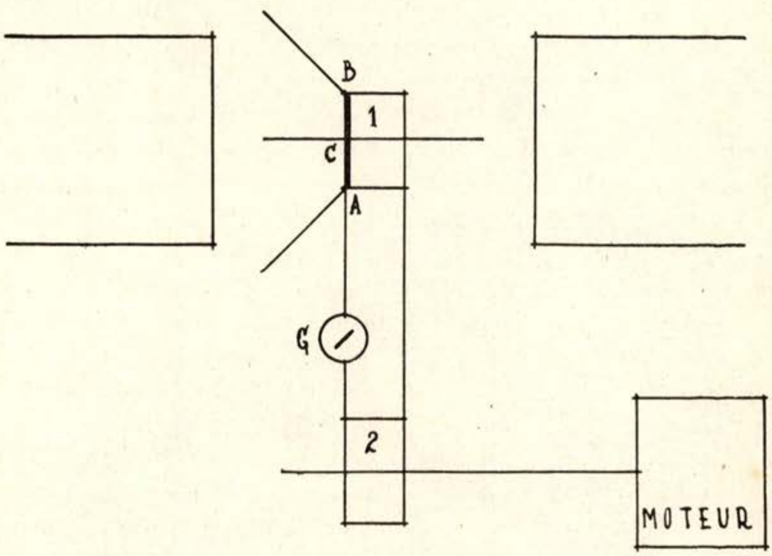
[1] Comptes rendus Académie des Sciences — t. 159 (1914) p. 676 et 788.

question. Nous considérerons avec lui une bobine de N spires égales placée dans un champ magnétique uniforme et soit φ le flux d'induction à travers une spire. Le flux total est $\Phi = N\varphi$ et, si nous faisons varier N en enroulant ou en déroulant la bobine, le flux variera suivant la loi

$$\frac{d\Phi}{dt} = \varphi \frac{dN}{dt}. \tag{67}$$

Blondel a montré expérimentalement que, si le déroulement de la bobine s'opère sans qu'aucune ligne de force magnétique ne soit coupée par une portion du circuit, ce qui, nous allons le voir, est possible, aucune force électromotrice d'induction ne prend naissance.

Blondel a monté une bobine 1 pouvant tourner autour d'un axe et l'a placée dans un électroaimant de façon que les lignes de force traversent normalement la bobine.



Une autre bobine semblable 2 est placée parallèlement à la première en dehors du champ de l'électroaimant et peut tourner autour de son axe sous l'action d'un moteur électrique. Quand le moteur fait tourner la bobine 2, le fil se déroule de 1 pour venir s'enrouler sur 2. La bobine 1 est flanquée latéralement d'un disque en cuivre AB percé en son centre par un trou qui laisse passer l'axe. Ce disque reste immobile et un point fixe du bord de son trou central est relié par un galvanomètre G à la bobine 2. L'extrémité gauche fixe de la bobine 1 est reliée à un balai qui frotte sur le bord du disque AB. De cette façon, pendant le déroulement, il n'y a aucun flux coupé par le fil en mouvement normalement aux lignes de force. Il faut naturellement que le disque AB soit fixe, car, s'il tournait on aurait une roue de Barlow et il y aurait une force électromotrice induite. Grâce à cet ingénieux dispositif, André Blondel a pu vérifier expérimentalement qu'il n'y avait pas de force électromotrice induite par le déroulement de la bobine.

Après avoir effectué cette expérience, André Blondel a eu l'idée interessante de l'utiliser pour démontrer l'absence d'énergie mutuelle entre courant et aimant permanent. Pour cela, il a simplement imaginé que l'on renverse le sens de l'expérience qu'il avait effectuée, c'est à dire que l'on enroule la bobine 1 au lieu de la dérouler. Pendant le processus d'enroulement, il n'y aura évidemment, d'après le résultat de l'expérience directe, aucune force électromotrice induite dans le circuit et aucun travail ne sera effectué par le champ magnétique puisque le fil, pendant l'enroulement, se meut normalement à la force électrodynamique de Laplace. C'est cette absence de force électromotrice d'induction et de travail fourni que sert de base au raisonnement de Blondel.

Pour bien rendre clair ce raisonnement, supposons d'abord que l'on fasse l'enroulement de la bobine en dehors de tout champ magnétique, le circuit étant parcouru par un courant I maintenu constant. L'énergie magnétique de la bobine, qui était nulle au début quand la bobine n'existait pas encore, est à la fin égale à $\frac{1}{2}LI^2$, L étant la self de la bobine une fois qu'elle est enroulée. Cette réserve d'énergie magnétique est égale au travail nécessaire pour enrouler la bobine et l'ensemble de ces deux énergies est fourni par la force électromotrice qui, dans le circuit, maintient à sa valeur constante l'intensité I. Ceci résulte de la théorie générale [1].

Supposons maintenant que l'enroulement de la bobine ait lieu en présence d'un champ magnétique avec le dispositif de Blondel. Le champ peut être dû à une autre bobine (solénoïde) ou à un aimant permanent. Dans un cas comme dans l'autre, il n'y a aucune réaction du champ sur la bobine et la création de la réserve $\frac{1}{2}LI^2$ d'énergie magnétique aura lieu exactement comme en l'absence de champ. Examinons la réaction de la formation de la bobine sur la source du champ magnétique.

Si le champ magnétique est crée par un aimant permanent idéal, la formation de la bobine fait apparaitre un champ magnétique à l'endroit ou se trouve l'aimant, mais d'après la définition que nous avons donnée

[1] Ce point n'est pas clairement indiqué dans le travail de Blondel.

d'un aimant permanent idéal, celui-ci n'en est aucunement affecté. Il n'y a donc aucune réaction de l'aimant sur la bobine, ni de la bobine sur l'aimant pendant l'enroulement. Il ne peut donc y avoir aucune réserve d'énergie mutuelle entre le circuit et l'aimant. Blondel tire ainsi du fait expérimental qu'il a observé une ingénieuse démonstration directe de l'absence de toute énergie mutuelle entre aimant permanent et courant.

Pour être complet, examinons ce qui se passe quand le champ magnétique est créé par un solénoïde parcouru par un courant i. Pendant que s'opere l'enroulement de la bobine, elle envoie un flux croissant dans le solénoïde qui est par suite le siège d'une force électromotrice d'induction égale à $-I\frac{dM}{dt}\cdot$ Pour maintenir constante la valeur i du courant dans le solénoïde, il faut introduire dans son circuit d'alimentation une force électromotrice constante égale à $I\frac{dM}{dt}\cdot$ Cette force électromotrice fournit pendant un temps dt une énergie égale à $iIdM$ et si M désigne la valeur finale du coëfficient d'induction mutuelle entre la bobine et le solénoïde quand la bobine est enroulée, l'énergie totale ainsi fournie est égale à MIi: elle se retrouve emmagasinée dans le milieu extérieur sous forme d'énergie mutuelle.

En comparant ce dernier raisonnement à ceux que nous avons fait précédement, aux paragraphes 7 et 8, pour le cas où l'on rapproche un circuit d'un autre circuit ou d'un aimant permanent, on arrive á là curieuse conclusion suivante: avec le dispositif d'enroulement et de déroulement imaginé par Blondel et bien qu'il y ait ici deux circuits en présence, tout se passe, en raison de l'absence de toute action du champ magnétique sur la bobine s'enroulant, comme si l'on approchait du solénoïde producteur du champ un aimant permanent: les phénomènes énergétiques sont les mêmes que dans ce dernier cas et ne sont pas les mêmes que ceux qui auraient lieu si l'on rapprochait deux circuits. Dans le rapprochement de deux circuits, on aurait pour maintenir les intensités constantes à fournir la même quantité d'énergie dans chacun d'eux et l'énergie totale ainsi fournie au système servirait par moitié à vaincre la resistance des forces electrodynamiques et par moitié à emmagasiner dans l'espace extérieur une réserve d'énergie magnétique mutuelle. Dans le cas de Blondel, on ne fournit de l'énergie électrique qu'au solénoïde et l'énergie ainsi fournie au système est moitié moindre; mais, comme il n'y a pas de travail à fournir contre les forces électrodynamiques, toute cette énergie est emmagasinée dans le milieu extérieur et la réserve d'énergie mutuelle est la même.

On voit par ces considérations que dans tous les cas (aimant permanent ou solénoïde), l'expression imaginée par Blondel se prête à des interprétations théoriques très interessantes.

10. L'inexistence d'énergie mutuelle entre courants et aimants et le spin de l'électron. L'inexistence d'énergie mutuelle entre courants et aimants permanents a été contestée. Le principal argument des adversaires de ce résultat est le suivant: "Nous savons depuis Ampère que le magnétisme a pour origine les courants particulaires qui ont lieu dans la substance de l'aimant et les découvertes modernes, précisant les vues d'Ampère, ont montré que ces courants sont dus à la circulation des électrons dans les édifices atomiques ou moléculaires. Quand on met un aimant en présence d'un circuit parcouru par un courant, tout doit donc se passer comme si l'on mettait ce courant en présence d'autres petits courants. Puisqu'il existe une énergie mutuelle entre courants, il doit donc y avoir aussi une énergie mutuelle entre courants et aimants".

Mais, s'il est vrai que le diamagnétisme s'explique par la présence dans les atomes d'électrons en mouvement (théorie de Langevin), par contre le ferromagnétisme se rattache intimement au *spin* des électrons et non à leur mouvement orbital. Or le spin de l'électron *ne peut pas se ramener à une circulation d'électricité qui serait soumise à des effects d'induction en présence d'un champ magnétique variable.* Au point de vue énergétique, l'électron doué de spin se comporte dans un champ extérieur comme un petit aimant et non comme un petit courant, et ceci explique pourquoi un aimant permanent macroscopique dont l'existence est rendue possible par le spin de l'électron n'a pas d'énergie mutuelle avec un courant.

On doit donc, nous semble-il, en conclure : 1.° que la théorie des courants particulaires d'Ampère ne donne pas une image exacte de l'origine du ferromagnétisme ; 2.° que le théoreme de Vaschy sur l'inexistence d'une énergie mutuelle entre aimants permanents et courants, bien que pouvant être démontré par la théorie électromagnétique la plus classique, ne s'explique réellement que par l'existence du spin. Celle-ci s'introduit implicitement dans le raisonnement életromagnétique quand on postule qu'il peut exister des aimants permanents sensiblement idéaux.

Mais il est finalement curieux de constater que par des raisonnements entièrement classiques, on est ainsi arrivé à établir que le ferromagnétisme ne peut se ramener au mouvement orbital des électrons et par suite à pressentir l'existence du spin.