

SUR L'ÉVOLUTION D'UN NUAGE DE PARTICULES EN COURS D'ACCÉLÉRATION VERS UNE DISTRIBUTION STATISTIQUE LIMITE (*)

J. ANDRADE E SILVA et G. LOCHAK

(Laboratoire Joliot-Curie de Physique Nucléaire, Orsay, et Institut Henri Poincaré, Paris)

RÉSUMÉ — On montre qu'à l'intérieur d'un faisceau de particules en cours d'accélération dans un accélérateur circulaire dont la h. f. est modulée existent des courants de convection responsables de l'évolution de la densité de répartition des particules dans le faisceau. Cette évolution, qui peut être regardée comme une illustration d'un problème célèbre déjà étudié par Maxwell, tend à rapprocher la composition du faisceau d'une certaine distribution statistique limite.

1. — INTRODUCTION

Si le mouvement d'ensemble d'un paquet de particules dans un accélérateur circulaire, ainsi que les oscillations betatroniques et synchrotroniques sont aujourd'hui assez bien connus, il ne semble pas qu'on puisse en dire autant de la composition interne du paquet lui-même [1]. Bien que cette connaissance puisse s'avérer importante même pour l'étude de certains problèmes pratiques — par exemple pour l'étude de la répartition énergétique des particules reçues sur une cible [2] — on se borne le plus souvent à admettre qu'à l'intérieur du paquet règne une sorte d'homogénéité assez mal définie.

Ce travail a pour but de montrer que l'étude de l'équation classique des oscillations synchrotroniques peut apporter quelques éclaircissements à cette question. En établissant une correspondance entre le mouvement des particules dans le plan de symétrie horizontal de la

(*) Reçu le 10 novembre 1964

machine et les mouvements d'un point représentatif dans l'extension en phase de l'équation des oscillations synchrotroniques nous montrons l'existence d'un mouvement de rotation de toutes les particules du faisceau autour de la particule synchrone. Cela permet de démontrer que la composition du faisceau évolue spontanément vers une distribution statistique d'équilibre qui s'exprime en fonction d'un seul paramètre. Enfin, un dernier paragraphe examine les possibilités d'utilisation pratique de cette analyse théorique.

2. — SUR L'EVOLUTION INTERNE DU FAISCEAU

Nous ferons ici abstraction des oscillations bétatroniques qui ne changeraient rien à cette étude et qu'il suffirait ensuite de superposer aux mouvements que nous allons étudier. La façon la plus naturelle de décrire le faisceau accéléré dans le plan de symétrie horizontal de la machine consiste alors à introduire des coordonnées polaires (r, θ) définies dans ce plan à partir du centre de la machine et d'un rayon fixe arbitraire. Mais nous pouvons tout aussi bien nous placer dans un système de coordonnées qui tourne avec le faisceau et mesurer les angles polaires à partir d'un rayon tournant avec la vitesse angulaire ω_0 de la h. f. accélératrice, ω_0 étant une fonction donnée du temps pour chaque machine. D'après la définition du déphasage φ d'une particule comme étant l'angle que fait à chaque instant son azimut avec celui de la h. f., cela revient à remplacer les coordonnées (r, θ) par les coordonnées (r, φ) .

La définition du déphasage que nous venons de rappeler permet d'écrire, par ailleurs,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \omega(r) - \omega_0(t) \quad (1)$$

où $\omega(r)$, la pulsation d'une particule, est une fonction monotone de r . Vu que la dérivée de ω par rapport à r ne s'annule jamais au cours du mouvement, l'équation (1) établit une relation biunivoque entre $\dot{\varphi}$ et r à chaque instant, relation dont la forme explicite est d'ailleurs assez compliquée.

Considérons alors un espace abstrait de coordonnées cartésiennes $(\varphi, \dot{\varphi})$. La relation (1) nous définit une transformation ponctuelle biunivoque (et conforme) entre l'espace $(\varphi, \dot{\varphi})$ et le plan de l'espace physique qui tourne à la vitesse ω_0 dans le plan de symétrie horizontal de la machine. Aux cercles $r = C^{te}$ de l'espace physique correspon-

dent les droites $\dot{\varphi} = C^{te}$ de l'espace $(\varphi, \dot{\varphi})$ et aux rayons $\varphi = C^{te}$ de l'espace physique correspondent les droites $\varphi = C^{te}$ orthogonales aux droites $\dot{\varphi} = C^{te}$. On remarquera qu'à la droite $\dot{\varphi} = 0$ correspond le cercle $r = r_s$ (l'indice s identifiant toujours des grandeurs attachées à la particule synchrone), car alors $\omega = \omega_s = \omega_0$; d'autre part, $\dot{\varphi} > 0$ pour $\omega > \omega_0$ et donc (puisque ω décroît quand r croît) $\dot{\varphi} > 0$ quand $r < r_s$; enfin, $\dot{\varphi} < 0$ quand $r > r_s$.

Nous voyons maintenant qu'au lieu d'étudier le mouvement du faisceau dans le plan tournant à la vitesse ω_0 nous pouvons étudier le mouvement de son image que nous venons de définir dans le plan cartésien $(\varphi, \dot{\varphi})$. Mais l'évolution de cette image nous la connaissons bien, car $(\varphi, \dot{\varphi})$ n'est autre que l'extension en phase de l'équation des oscillations synchrotroniques de McMillan-Veksler

$$\frac{E}{K \omega^2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{e V}{\pi} \sin \varphi = \frac{e V}{\pi} \sin \varphi_s \quad (2)$$

où E représente la valeur relativiste de l'énergie de la particule, e sa charge électrique, V l'amplitude de la chute de potentiel en un tour de machine et K un paramètre exprimé en fonction de l'indice du champ n et de la vitesse v de la particule par la formule

$$K = 1 + \frac{n}{1-n} \frac{c^2}{v^2} \quad (3)$$

Aux trajectoires des particules dans le plan tournant correspondra donc le «portrait de phase» de l'équation (2) dans le plan $(\varphi, \dot{\varphi})$, déterminé de la façon habituelle [3] par l'équation

$$\frac{d \dot{\varphi}}{d \varphi} = \frac{e V}{\pi} \frac{K \omega^2}{E} \frac{\sin \varphi_s - \sin \varphi}{\dot{\varphi}} \quad (4)$$

Au lieu d'étudier cette équation, nous pouvons néanmoins nous borner à remarquer qu'un tel portrait de phase est rendu intuitif par l'interprétation mécanique de l'équation (2) comme l'équation d'un pendule simple soumis à un couple extérieur constant. On voit qu'en deçà de la séparatrice des mouvements périodiques et apériodiques les trajectoires dans le plan de phase sont des courbes formées autour du point d'équilibre stable du type «centre» $\varphi = \varphi_s$, trajectoires qui sont naturellement toutes décrites dans le même sens mais avec des

périodes qui varient d'une trajectoire à l'autre. Cela traduit bien, en effet, le non-isochronisme des mouvements pendulaires périodiques autour de l'état d'équilibre.

La correspondance que nous avons établie montre qu'à une déformation près, définie par notre changement de variables, ces mouvements de l'espace des phases représentent les mouvements vrais des particules dans le système d'axes qui tourne en suivant le faisceau. Ainsi le faisceau se comporte comme une sorte de masse fluide en rotation autour de la particule synchrone. Cette masse fluide est divisée en couches concentriques, chacune étant définie par une amplitude d'oscillation synchrotronique et une période de rotation autour de la particule synchrone. La topologie de ces mouvements internes du faisceau est illustrée par la fig. 1.

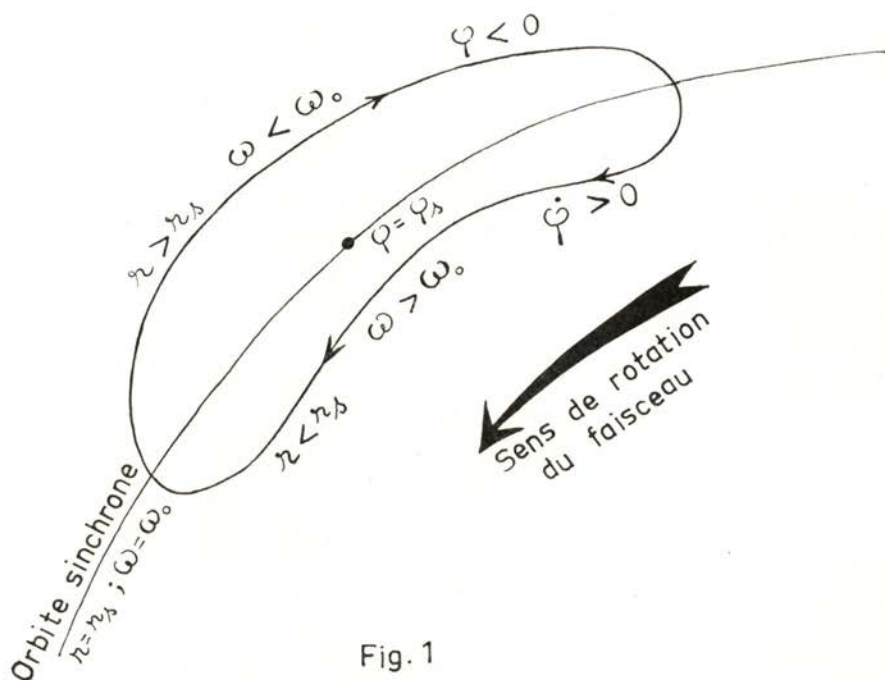


Fig. 1

Nous remarquerons encore à ce propos que, du fait de la variation lente des paramètres de l'équation (2) pendant la durée de l'accélération, ces trajectoires que nous avons représentées comme fermées dessinent en fait des sortes de figures de Lissajous autour du point $\varphi = \varphi_s$ dont la position par rapport à la h. f. accélératrice change elle-même lentement avec le temps.

3. — LES DISTRIBUTIONS D'EQUILIBRE DES PARTICULES DANS LE FAISCEAU

Nous avons mis en évidence au paragraphe précédent l'existence de certains mouvements périodiques des particules à l'intérieur d'un faisceau accéléré. Nous voulons maintenant étudier les conséquences qui peuvent en résulter pour la densité de répartition des particules à l'intérieur du faisceau. Pour cela, nous commencerons par déterminer l'expression des distributions statistiques d'équilibre.

Introduisons l'hamiltonien

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\varepsilon}{I} (\cos q + q \sin \omega_s); \quad (5)$$

nous vérifions immédiatement que, compte tenu des définitions

$$\varepsilon = \frac{e V}{\pi}, \quad I = \frac{E}{K \omega^2}, \quad \dot{p} = \dot{\varphi}, \quad q = \varphi \quad (6)$$

les équations canoniques correspondantes

$$\dot{p} = \frac{\varepsilon}{I} (\sin q - \sin \varphi_s), \quad \dot{q} = \dot{p} \quad (7)$$

sont équivalentes à l'équation des oscillations synchrotroniques (2). Nous allons donc chercher les distributions statistiques d'équilibre correspondantes à l'hamiltonien (5).

Si les paramètres I et φ_s de l'hamiltonien pouvaient être regardés comme indépendants du temps, l'énergie du système $H = h$ serait une intégrale première et les distributions d'équilibre statistique s'écriraient sous la forme habituelle

$$\rho = \rho(h) \quad (8)$$

On sait néanmoins qu'une telle hypothèse, tout en étant valable pendant des intervalles de temps qui ne sont pas trop grands par rapport à la période de rotation des ions, devient inexacte si elle est admise, par exemple, pendant la durée de plusieurs oscillations de phase. Dans ce cas il ne peut être question d'admettre la conservation de l'énergie. Les données de fonctionnement des diverses machines nous

apprennent néanmoins que la variation des paramètres I et φ_s est suffisamment lente et régulière (toujours à l'échelle des périodes synchrotroniques) pour qu'on puisse regarder leur changement comme adiabatique. À l'échelle de la durée de vie du faisceau nous devons donc prendre comme constant, au lieu de l'énergie, l'invariant adiabatique

$$J(h) = \oint p \, dq = 2 \int_{\alpha(h)}^{\beta(h)} \sqrt{2h - \frac{2\varepsilon}{I} (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi)} \, d\varphi \quad (9)$$

où $\alpha(h)$ et $\beta(h)$ sont les valeurs extrêmes prises par φ au cours du mouvement. Il s'ensuit naturellement que les distributions d'équilibre statistique du faisceau pour les durées de l'ordre de son temps de vie ne pourront être que de la forme

$$\rho = \rho(J) \quad (10)$$

Autrement dit, la variation lente des paramètres physiques de la machine restreint la forme possible des distributions statistiques d'équilibre du faisceau. Celles-ci correspondent toujours à des répartitions uniformes de points sur chacune des trajectoires $H = h$ de l'espace (p, q) mais dépendent de h à travers la fonction $J(h)$ définie para (9).

4. — LES PROPRIÉTÉS D'ERGODISME DE LA DISTRIBUTION INITIALE

Étudions maintenant l'évolution du nuage des particules qui constituent le faisceau, dans le cas général où la distribution statistique d'équilibre n'est pas réalisée au départ. Pour cela, effectuons une transformation de contact sur les variables (p, q) pour décrire le système dynamique à l'aide de la variable d'action J [donnée para (9)] et de sa conjuguée angulaire w . Les équations canoniques s'écriront alors

$$\dot{J} = 0 \quad \dot{w} = \frac{dH(J)}{dJ} = \nu(J) \quad (11)$$

et la période T de rotation des particules autour de la particule synchrone prendra la forme explicite.

$$T(J) = \frac{1}{\nu(J)} = \frac{dJ}{dH} = \frac{dJ}{dh} = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{\sqrt{2h - \frac{2\varepsilon}{I} (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi_s)}} \quad (12)$$

Dans ce nouveau plan de phase qui correspond aux coordonnées polaires (J, w) les mouvements des particules à l'intérieur du faisceau ont maintenant une image très simple: d'après les équations (11) ce seront des cercles concentriques $J = C^{te}$ décrits d'un mouvement uniforme $W = v(J) t + C^{te}$. La distribution d'équilibre y sera donnée par une répartition uniforme de points sur chacun des cercles et le nombre N de points dans un petit élément de surface, d'aire $J \Delta J \Delta w$ sera simplement donné par

$$N = C \rho (J) J \Delta J \Delta w \quad (13)$$

C étant un facteur de normalisation.

Supposons maintenant que le faisceau ait, au départ, une certaine répartition initiale

$$\rho (J_o, w_o) J_o \Delta J_o \Delta w_o = \rho (J, w_o) J d J d w_o \quad (14)$$

et examinons comment cette répartition d'équilibre va évoluer au cours du temps. La réponse est, apparemment, immédiate. Étant donné que sur chaque cercle (correspondant à une certaine valeur de J) tous les points se déplacent à la même vitesse, la répartition initiale sur chaque cercle ne subit qu'un mouvement tournant d'ensemble, de période $T(J)$. On pourrait donc être tenté de conclure que la répartition d'équilibre ne sera jamais atteinte.

Une telle conclusion serait néanmoins parfaitement inexacte d'un point de vue physique. Un instrument de mesure ne pourra jamais distinguer dans le faisceau deux trajectoires suffisamment rapprochées et donc comprises dans un petit intervalle de valeurs $(h, h + \delta h)$ de la fonction H . A ce petit continuum correspond dans l'espace (J, w) une mince couronne circulaire comprise entre les cercles $J = C^{te}$ et $J + \delta J = C^{te}$ et c'est cette couronne circulaire et non le cercle de rayon J qui doit être mise en correspondance avec les résultats d'une mesure possible. Il s'ensuit qu'à l'intérieur de ce que, physiquement, on doit appeler un cercle du plan (J, w) il y aura une infinité de fréquences de rotation légèrement différentes; les particules qui s'y trouvaient au départ y resteront mais en se rattrapant et se dépassant les unes les autres et changeant ainsi leur répartition dans la petite couronne.

Comment évoluera alors la distribution initiale? Nous le savons fort bien, puisque c'est là un problème célèbre posé et résolu par Maxwell dans ses recherches classiques sur la structure des anneaux de Saturne [4]. D'autres savants illustres comme Poincaré [5] et BOREL,

[6] se sont aussi intéressés à cette question. Nous nous bornerons donc à transcrire la conclusion essentielle de ces travaux qui peut s'énoncer comme suit:

La répartition dans une couronne d'épaisse δJ et quelle que soit sa forme initiale (14) tend avec le temps vers la répartition d'équilibre (13) où

$$\rho(J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(J, w_0) dw_0 \quad (15)$$

Le temps nécessaire à la réalisation de cette répartition d'équilibre statistique, ce qu'on pourrait appeler le temps de relaxation du faisceau, sera bien sur assez variable d'une machine à une autre. En effet, pour une certaine répartition initiale, il dépend à la fois du nombre total d'oscillations synchrotroniques qui ont lieu pendant le temps de vie du faisceau et du déphasage acquis par deux particules voisines au bout de chacune de ces oscillations. En plus, on doit remarquer que la notion même de particules «voisines» ne peut être définie dans chaque cas particulier car elle même dépend de la précision des mesures qu'on se propose de faire sur le faisceau.

5. — CONCLUSIONS

Trois idées essentielles ressortent* de cette analyse sur la distribution des particules à l'intérieur du faisceau:

- a) Le mouvement des particules dans le faisceau a pour image l'évolution d'un nuage de points dans l'extension en phase de l'équation des oscillations synchrotroniques;
- b) Cela met clairement en évidence que son évolution interne résulte de l'existence de courants de convection susceptibles d'être décrits sous une forme analytique très simple;
- c) Il existe une distribution statistique d'équilibre dans le faisceau et cette distribution sera effectivement atteinte si le nombre d'oscillations de phase pendant la durée de vie du faisceau est suffisamment grand.

Les deux premières remarques gardent leur valeur dans tous les cas. La composition du faisceau à l'injection (distribution initiale) nous est donnée par une densité ρ qui dépend de deux variables r et θ mais nous pouvons aussi l'exprimer en fonction des variables

φ et $\dot{\varphi}$ ou des variables J et w . Les raisonnements précédents montrent alors comment, à l'aide de l'équation de McMillan et Veksler, on peut trouver la composition du faisceau à un instant ultérieur quelconque. Nous remarquerons en particulier que l'usage des variables J et w facilite beaucoup ce calcul.

En outre, si la machine est telle que le nombre d'oscillations synchrotroniques d'une particule est assez grand, la distribution finale ne dépend que d'un seul paramètre et on peut la trouver par la simple formule (15). Il suffira d'ailleurs dans ce cas de connaître la distribution initiale en fonction de J pour déterminer immédiatement la distribution finale.

Ce travail a été réalisé au Laboratoire Joliot-Curie de Physique Nucléaire dans le cadre du Service «Théories des accélérateurs et Mécanique non-linéaire» dirigé par M. F. Fer.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) Voir, par exemple, M. S. LIVINGSTON and Y. P. BLEWETT — *Particle Accelerators*, Mc-Graw-Hill, N. Y., 1962.
- (2) J. ANDRADE E SILVA et G. LOCHAK — *C. R. Ac. Sc.*, t. 256 (1963), 2308; *Nucl. Inst. Meth.*, 26 (1964), 22.
- (3) A. A. ANDRONOW and C. E. CHAIKIN, *Theory of Oscillations*, Princeton Un. Press, 1949.
- (4) J. C. MAXWELL — *Phil. Mag.* (1857).
- (5) H. POINCARÉ — *J. Phys. Theor. et Appl.*, 4^{ème} série, t. 5 (1906), 369.
- (6) E. BOREL, *Ann. Sc. Ec. Normal Sup.*, t. XXIII (1906), 3.